ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
2α. Ορίζουσες

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

Άσκηση 1

α) Αν a, b, c, x πραγματικοί αριθμοί, να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{bmatrix}$$

β) Στη συνέχεια, για $\alpha, b, c \geq 0$, να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $|A| = 0$.

<u>Σημείωση:</u> Για να υπολογίσουμε μία ορίζουσα που έχει παραμέτρους, βοηθάει να εμφανίσουμε μηδενικά σε μία γραμμή ή στήλη:

- είτε για να την υπολογίσουμε ως προς τα στοιχεία εκείνης της γραμμής ή στήλης
- είτε για να την γράψουμε πιο άμεσα σε παραγοντοποιημένη μορφή

Άσκηση 1 α -Λύση:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ -b & b & x \\ 0 & -c & c+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & x+0 \\ -b & b & x+0 \\ 0 & -c & x+c \end{vmatrix} =$$

$C1 \rightarrow C1 - C2$

$C2 \rightarrow C2 - C3$

Ιδιότητα 7

Ιδιότητα 6

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ -b & b & x \\ 0 & -c & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ 0 & -c & c \end{vmatrix} =$$

Ιδιότητα 8

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου

Ιδιότητα 4

Ιδιότητα 7

$L2 \rightarrow L2 - L1$

$L3 \rightarrow L3 - L1$

$$= x \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -b & b & 1 \\ 0 & -c & 1 \end{vmatrix} + abc = x \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -b-a & b & 0 \\ -a & -c & 0 \end{vmatrix} + abc = x \cdot \begin{vmatrix} -b-a & b \\ -a & -c \end{vmatrix} + abc =$$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 3ης στήλης

Άσκηση 1 α –Λύση (συνέχεια):

Τύπος υπολογισμού ορίζουσας 2×2

$$= x \cdot [(-b-a) \cdot (-c) - (-a) \cdot b] + abc = x \cdot (bc + ac + ba) + abc$$

Επομένως:

$$\boxed{|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{abc} + \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc})}$$

Άσκηση 1 β –Λύση (συνέχεια)

β) Αν $\boldsymbol{a, b, c \geq 0}$, για ποιες τιμές του $\boldsymbol{x}$ έχουμε $\boldsymbol{detA = 0}$;
Δηλαδή, πότε $\boldsymbol{|A| = abc + x \cdot (ab + ac + bc)}$;

i) Αν υποθέσουμε πως όλοι οι αριθμοί a, b, c είναι μη μηδενικοί τότε προφανώς $\boxed{ab + ac + bc > 0}$, και

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-abc}{ab+ac+bc}, \text{ μοναδική λύση.}}$$

ii) Αν ακριβώς μόνο ένα από τα a, b, c είναι ίσο με μηδέν, τότε

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \xRightarrow{\alpha\nu\ a=0\ \kappa\alpha\iota\ b,c>0} \boxed{x = 0 \text{ , μοναδική λύση .}}$$

iii) Αν δύο από τους αριθμούς a, b, c είναι ίσοι με μηδέν, τότε η εξίσωση δέχεται κάθε πραγματικό αριθμό x ως λύση.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \xRightarrow{\alpha\nu\ a=0\ \kappa\alpha\iota\ b=0} 0 + x \cdot 0 = 0 \quad \boxed{\text{Άπειρες λύσεις}}$$

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

Λύση:

Ιδιότητα 7

$L1 \rightarrow L1 + L2 + L3 + L4$

Ιδιότητα 4

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ιδιότητα 8

$$\Leftrightarrow (3x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & -1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3x-1)\cdot(-1-x)^3 = 0 \Leftrightarrow -(3x-1)\cdot(1+x)^3 = 0$$

Ιδιότητα 7

$C2 \rightarrow C2 - C1$
$C3 \rightarrow C3 - C1$
$C4 \rightarrow C4 - C1$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 1/3 \text{ ή } x = -1}$

Άσκηση 3

Αν a τυχαίος πραγματικός αριθμός, να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

Λύση:

Ιδιότητα 7

$C1 \rightarrow C1 + C2 + C3$

Ιδιότητα 4

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+a & 1 & 1 \\ 3+a & 1+a & 1 \\ 3+a & 1 & 1+a \end{vmatrix} =$$

$$= (3+a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (3+a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \boxed{(3+a) \cdot a^2}$$

Ιδιότητα 7

$L2 \rightarrow L2 - L1$

$L3 \rightarrow L3 - L1$

Ιδιότητα 8

Άσκηση 4 (εφαρμογή ιδιοτητών)

Οι ορίζουσες των πινάκων $A, B, C \in M_8$ είναι $detA = -5, detB = -2, detC = 0$.

Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων $-2A, B^5, AB^2C, -2\left(A^{-1}\right)^T B^{-3}$.

Λύση:

Ιδιότητα 4

α) $det(-2A) = (-2)^8 \cdot detA = 2^8 \cdot detA = 256 \cdot (-5) = -1280$

Ιδιότητα 9

β) $det(B^5) = det(B \cdot B \cdot B \cdot B \cdot B) = detB \cdot detB \cdot detB \cdot detB \cdot detB =$

$= (detB)^5 = (-2)^5 = -32$

Ιδιότητα 9

γ) $det(AB^2C) = detA \cdot det(B^2) \cdot detC = detA \cdot (detB)^2 \cdot detC = (-5) \cdot (-2)^2 \cdot 0 = 0$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

δ) Αν $\boldsymbol{detA = -5, detB = -2}$, τότε $\boldsymbol{det\left[-2\left(A^{-1}\right)^{T} B^{-3}\right] =?}$

δ) $de\,t[-2(A^{-1})^T B^{-3}] = (-2)^8 \cdot det[(A^{-1})^T (B^{-1})^3] = (-2)^8 \cdot det[(A^{-1})^T] \cdot det[(B^{-1})^3] =$

Ιδιότητα 1

Ιδιότητα 9

Ιδιότητα 9

$$= (-2)^8 \cdot det(A^{-1}) \cdot [det(B^{-1})]^3 = (-2)^8 \cdot \frac{1}{detA} \cdot \left(\frac{1}{detB}\right)^3 =$$

$$= 2^8 \cdot \frac{1}{-5} \cdot \left(\frac{1}{-2}\right)^3 = \frac{32}{5}\,.$$

Ιδιότητες οριζουσών
(Υπενθύμιση, για την χρήση αρίθμησησης στις ασκήσεις)

1) Ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα $\boldsymbol{det(A^T) = detA}$.

2) Η εναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών) επιφέρει αλλαγή στο πρόσημο της ορίζουσας $\boldsymbol{detB = -detA}$.

3) Αν ο πίνακας A έχει δύο γραμμές ή στήλες ίσες ή ανάλογες (δηλ. η μία είναι το πολλαπλάσιο της άλλης), τότε $\boldsymbol{detA = 0}$.

4) Αν πολλαπλασιαστεί μία γραμμή με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε όλη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επί λ, $\boldsymbol{detB = \lambda \cdot detA}$. Κατά συνέπεια: $\boldsymbol{det(\lambda \cdot A) = \lambda^{\nu} \cdot A}$.

5) Αν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $\boldsymbol{detA = 0}$.

6) Μία ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών αν κάθε στοιχείο μιας στήλης ή γραμμής είναι άθροισμα δύο προσθετέων.

Ιδιότητες οριζουσών (Υπενθύμιση-συνέχεια)

7) Η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσω ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης $\boldsymbol{detB = detA}$.

8) Αν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. (Ειδικότερα η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1 , δηλαδή $\boldsymbol{detI_n = 1}$.)

9) Το γινόμενο δύο οριζουσών είναι ίσο με την ορίζουσα του γινομένου τους, δηλαδή $\boldsymbol{det(AB) = detA \cdot detB}$, όπου $A, B \in M_\nu$. Κατά συνέπεια: $\boldsymbol{det\left(A^{-1}\right) = 1/detA}$.

10) Συνήθως $\boldsymbol{det(A + B) \neq detA + detB}$, όπου $A, B \in M_\nu$.