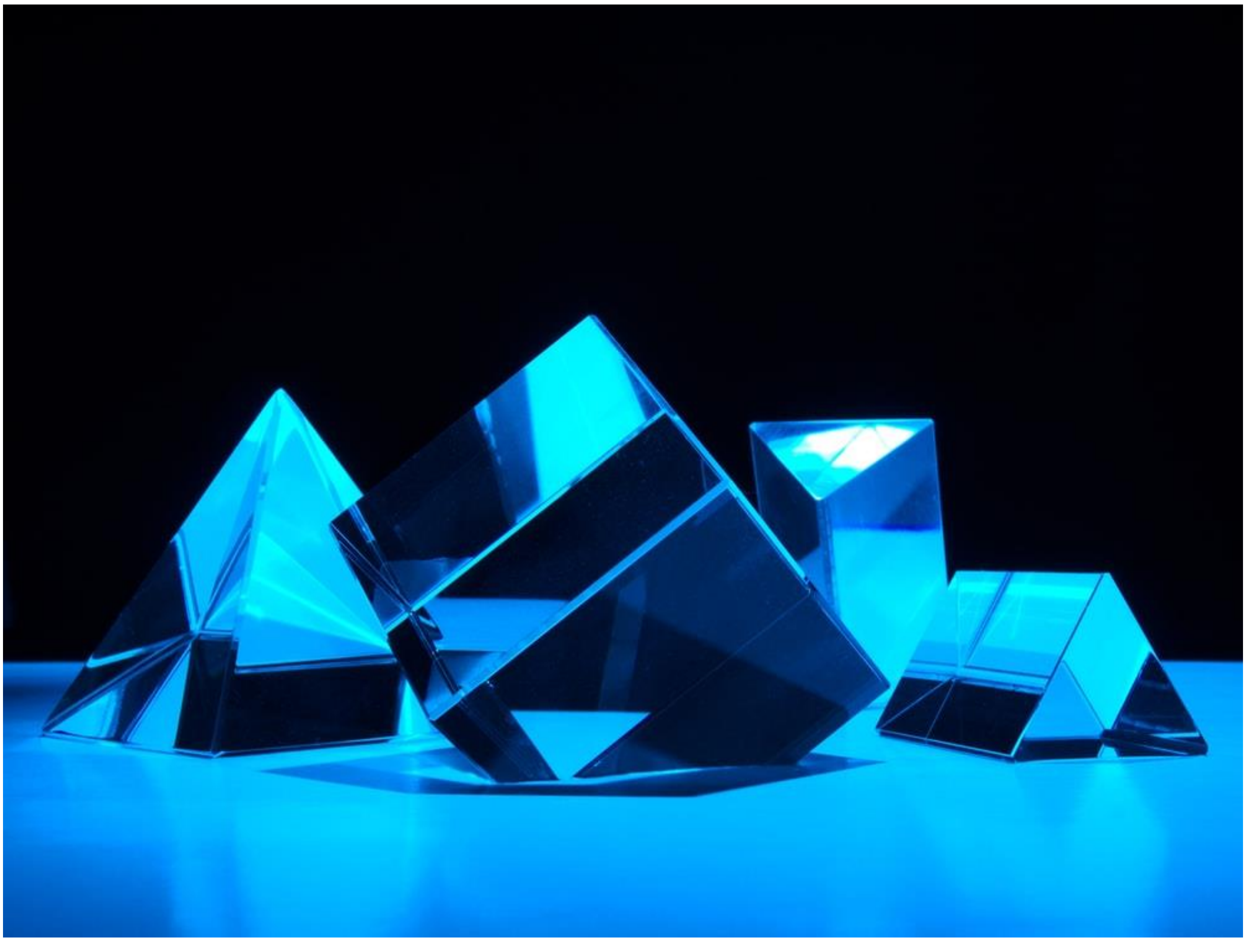

13α. Επαναληπτικές Ασκήσεις

Κάλλια Παυλοπούλου| Γραμμική Άλγεβρα | 2022-23

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για έναν τετραγωνικό πίνακα 3×3 ισχύει ότι

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B. Ο πίνακας B αντιστρέφεται; (δικαιολόγηση) Ο πίνακας B διαγωνοποιείται; (δικαιολόγηση) Αν ναι, ποια είναι η διαγωνοποιημένη του μορφή και ποιος είναι ο πίνακας που τον διαγωνοποιεί; Να υπολογίσετε τον πίνακα B.

Λύση

Εύκολα προκύπτει ότι ιδιοτιμές είναι οι 3, 0, -2, αφού παρατηρούμε ότι:

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Επομένως το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\chi_B(\lambda) = \lambda(\lambda+2)(3-\lambda)$

Επειδή οι ιδιοτιμές είναι όλες διαφορετικές, ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος.

Ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα είναι ο P.

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Ο P είναι αντιστρέψιμος διότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές.

Ο B δεν αντιστρέφεται διότι $detB = 3 \cdot 0 \cdot (-2)$=0 (γινόμενο ιδιοτιμών).

Άρα αρκεί να βρούμε τον αντίστροφο του P για να υπολογίσουμε στη συνέχεια τον πίνακα B, από τη σχέση $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$$D = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ο 3×3 τετραγωνικός πίνακας $\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}00001 & 1 \\ 1{,}00001 & 1 & 1{,}00001 \\ 1 & 1{,}00001 & 1 \end{bmatrix}$. Να δείξετε ότι ο πίνακας Π έχει μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή.

Λύση

Θέτουμε α=1,00001 . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Π είναι:

$$\chi_\Pi(\lambda) = det(\Pi - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 1 \\ \alpha & 1-\lambda & a \\ 1 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ \alpha & 1-\lambda & a \\ 1 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & 2a \\ 1 & \alpha & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot [(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - \alpha \cdot 2\alpha] = -\lambda \cdot (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2\,\alpha^2) =$$

$$= -\lambda \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\,\alpha^2)$$

Σημείωση:

1) Οι πράξεις που έγιναν για τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι οι εξής $\Gamma 1 \to \Gamma 1 - \Gamma 3, \Sigma 3 \to \Sigma 3 + \Sigma 1$.
2) Για τον υπολογισμό της διακρίνουσας του τριωνύμου $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\,\alpha^2$ έχουμε $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - 2\alpha^2) = 9 - 8 + 8\alpha^2 = 1 + 8\alpha^2 > 0$.

Επομένως μία ιδιοτιμή είναι το 0 και έστω λ_1 και λ_2 οι άλλες δύο ιδιοτιμές του Π. Άρα:

$$\chi_\Pi(\lambda) = det(\Pi - \lambda \cdot I_3) = -\lambda \cdot (\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2) = -\lambda \cdot [\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2] .$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 - 2\,\alpha^2 = 2 \cdot (1 - \alpha^2) < 0$, $\alpha\varphi o\acute{\upsilon}$ $\alpha = 1{,}00001 > 1$.

Αφού το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ είναι αρνητικό, συμπεραίνουμε πως **υπάρχουν δύο λύσεις ετερόσημες, μία θετική και μία αρνητική**.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 2 \\ d & e & f \end{bmatrix}, a, b, c, d, e, f \in R$, τότε είναι και ιδιοδιάνυσμα του πίνακα M^3 ;

Αν ναι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας και να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές των M και M^3 που αντιστοιχούν στο $\vec{u}$.

Λύση

Αφού $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα M τότε θα ισχύει:

$$M \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \Leftrightarrow = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 2 \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - 2b + c \\ 4 - 2 + 2 \\ d - 2e + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - 2b + c \\ 4 \\ d - 2e + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Από όπου συμπεραίνουμε πως πρέπει να ισχύει $4 = -2\lambda$, επομένως $\boldsymbol{\lambda = -2}$.

Αν λ ιδιοτιμή του $\vec{u}$, τότε $M \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$. Τότε:

$$M^3 \cdot \vec{u} = (M^2 \cdot M) \cdot \vec{u} = M^2 \cdot (M \cdot \vec{u}) = M^2 \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot (M^2 \cdot \vec{u}) =$$
$$= \lambda \cdot [M \cdot (M \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [M \cdot (\lambda \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [\lambda \cdot (M \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [\lambda \cdot (\lambda \cdot \vec{u})] = \lambda^3 \cdot \vec{u} .$$

Επομένως $\boldsymbol{M^3 \cdot \vec{u} = \lambda^3 \cdot \vec{u}}$, δηλαδή το $\vec{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του M^3 με ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda^3 = -8}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Για ποια τιμή του a ο A διαγωνοποιείται;

Λύση

Ας υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$x_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & a & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)^2(1-\lambda).$$

Κατά συνέπεια, οι ιδιοτιμές του A είναι :

$\lambda_1 = 2 \ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda \acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 1),$

$\lambda_2 = 3 \ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda \acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 2) \ \kappa\alpha\iota \ \lambda_3 = 1 \ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda \acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 1)$

Για να διαγωνοποιείται ο A θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου V_3 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 να είναι ίση με 2.

Ας βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, λύνοντας το σύστημα:

$$(A - 3 \cdot I_4)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 \to L_4 + 2L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_1 \to (-1)\cdot L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 + L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Για να έχει ο ιδιόχωρος V_3 διάσταση 2 θα πρέπει $a = 0$ διότι το σύστημα θα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, αφού από την κλιμακωτή μορφή συμπεραίνουμε ότι $rankC = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

(i) Για ποιες τιμές των $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ ο πίνακας $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση

(i) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B:

$$\chi_B(\lambda) = det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(b-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)^2 \cdot (b-\lambda).$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Αν $b = 2$, τότε ο πίνακας B έχει ιδιοτιμή λ=2 με πολλαπλότητα 3. Για να είναι ο B διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου με ιδιοτιμή 2 να είναι ίση με 3, δηλαδή $dimV_2 = 3$. Ας δούμε το ομογενές σύστημα:

$$(B - 2\cdot I)\cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & a \\ 3 & 0 & 2-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ας μελετήσουμε το βαθμό του πίνακα του συστήματος:

$$rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2, \alpha\nu\ \alpha \neq 0 \\ 1, \alpha\nu\ \alpha = 0 \end{cases}. \quad \text{Επομένως} \begin{cases} dimV_2 = 3-2 = 1 \neq 3, \alpha\nu\ \alpha \neq 0 \\ dimV_2 = 3-1 = 2 \neq 3, \alpha\nu\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Άρα για $b = 2$ και $a \in R$, δεν διαγωνοποιείται ο B .

2) Αν $b \neq 2$, τότε ο πίνακας B έχει ιδιοτιμή λ=2 με πολλαπλότητα 2 και ιδιοτιμή $\lambda = b$ με πολλαπλότητα 1. Σε αυτή την περίπτωση για να είναι ο πίνακας διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει $dimV_2 = 2$. Ας δούμε το ομογενές σύστημα:

$$(B - 2\cdot I)\cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ας μελετήσουμε το βαθμό του πίνακα του συστήματος:

$rank\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a\\ 3 & 0 & b-2\end{bmatrix} = \begin{cases}2, αν\ α \neq 0\\ 1, αν\ α = 0\end{cases}$. Επομένως $\begin{cases}dimV_2 = 3-2 = 1 \neq 2, αν\ α \neq 0\\ dimV_2 = 3-1 = 2, αν\ α = 0\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8\\ 3 & 0 & b-2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow$$

Άρα για $\alpha = 0\ και$ και $b \neq 2$, ο πίνακας B διαγωνοποιείται.

(ii) Για $\boldsymbol{a = 0}$ και για $\boldsymbol{b = 1}$, να βρείτε τον διαγώνιο πίνακα $\boldsymbol{D}$ που είναι όμοιος με τον $\boldsymbol{B}$ καθώς και τον πίνακα $\boldsymbol{P}$ που τον διαγωνοποιεί.

__Λύση (ii)__ Για $a = 0$ και για $b = 1$ έχουμε $B = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του (από το πρώτο σκέλος της άσκησης) είναι $\lambda=2$ με πολλαπλότητα 2 και ιδιοτιμή $\lambda = b = 1$ με πολλαπλότητα 1. Άρα ο όμοιος πίνακας με τον B είναι ο $D = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

- Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα με ιδιοτιμή λ=2 λύνουμε το σύστημα:

$$(B - 2\cdot I)\cdot u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2-2 & 0 & 0\\ 0 & 2-2 & 0\\ 3 & 0 & 1-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Έχουμε δηλαδή την εξίσωση: $3x - z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{z}{3}$. Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι: $S = \left\{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\cdot z\\ y\\ z\end{bmatrix} = y\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + z\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, y, z \in R\right\}$.

- Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή λ=1 λύνουμε το σύστημα:

$$(B - 1\cdot I)\cdot u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2-1 & 0 & 0\\ 0 & 2-1 & 0\\ 3 & 0 & 1-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Το σύστημα έχει τη μορφή: $\begin{cases}x = 0\\ y = 0\\ 3x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = 0\\ z \in R\end{cases}$.

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι: $S = \left\{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ z\end{bmatrix} = z\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, z \in R\right\}$.

Και ο πίνακας P που διαγωνοποιεί τον B είναι ο εξής: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

(i) Για ποιες τιμές του $\boldsymbol{b \in R}$ ο πίνακας $\boldsymbol{\Gamma = \begin{bmatrix} b-6 & 0 & 2-b \\ 6 & -1 & -6 \\ b-2 & 0 & -b-2 \end{bmatrix}}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση

(i) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Γ:

$$\chi_\Gamma(\lambda) = \det(\Gamma - \lambda I) = \begin{vmatrix} b-6-\lambda & 0 & 2-b \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ b-2 & 0 & -b-2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} b-6-\lambda & 2-b \\ b-2 & -b-2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \cdot [(b-6-\lambda) \cdot (-b-2-\lambda) - (2-b)(b-2)] =$$

$$= -(\lambda+1)(-b^2 - 2b - b\lambda + 6b + 12 + 6\lambda + b\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + b^2 + 4 - 4b)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2 + 8\lambda + 16) = -(\boldsymbol{\lambda+1})(\boldsymbol{\lambda+4})^{\boldsymbol{2}}.$$

Κατά συνέπεια, οι ιδιοτιμές του Γ είναι :

$$\boldsymbol{\lambda_1 = -1\ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1)\ \kappa\alpha\iota\ \lambda_2 = \lambda_3 = -4\ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 2)}$$

Για να δούμε αν διαγωνοποείται ή όχι ο πίνακας Γ μπορούμε να το ελέγξουμε με δύο τρόπους:

1ος) Με τη γεωμετρική πολλαπλότητα, δηλαδή η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα 2, να είναι και αυτή 2 [$\dim V_{-4} = n - rank(\Gamma - \lambda I)$]

Για να διαγωνοποιείται ο Γ θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου V_{-4} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -4 να είναι ίση με 2.

$$[\Gamma - (-4) \cdot I_3] \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{b-2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2-b} \\ \boldsymbol{6} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-6} \\ \boldsymbol{b-2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2-b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)x - (b-2)z = 0 \\ 6x + 3y - 6z = 0 \\ (b-2)x - (b-2)z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

- Αν $b \neq 2$ τότε

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0, z \in R. \\ x = z \end{cases}$

Άρα

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\\x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, z\in R\right\}$$

Δηλαδή αν $b\neq 2$ έχουμε ένα ιδιοδιάνυσμα , $dimV_{-4}=1$ και ο $Γ$ δεν διαγωνοποιείται.

- Αν $b=2$ τότε

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\6x+3y-6z=0\Leftrightarrow 2x+y-2z=0\Leftrightarrow y=-2x+2z, x,y\in R\\0=0\end{cases}$$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-2x+2z\\z\end{bmatrix}=x\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}+z\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, x,z\in R\right\}$$

Δηλαδή αν $b=2$ έχουμε $dimV_{-4}=2$ και ο $Γ$ διαγωνοποιείται.

2ος) Ο Γ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.
Αν $m_Γ(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda+4)$. Θα ελέγξουμε αν ο $Γ$ το μηδενίζει.
Κάνοντας πράξεις:

$$(Γ+I_3)(Γ+4I_3)=0_3\Leftrightarrow \dots\Leftrightarrow\begin{bmatrix}b^2-7b+10 & 0 & 3b-6\\0 & 0 & 0\\-3b+6 & 0 & 3b-6\end{bmatrix}=0_3\Leftrightarrow b=2$$

(ii) Για τις τιμές που υπολογίσατε να βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα Γ.

- <u>**Λύση (ii)**</u> Για $b=2$ έχουμε για την ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda_2=\lambda_3=-4}$ $(\boldsymbol{πολλαπλότητα\ 2})$ έχουμε τα ιδιοδιανύσματα $\overrightarrow{u_2}=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$ και $\overrightarrow{u_3}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$.

Θα υπολογίσουμε το ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda_1=-1}$ $(\boldsymbol{πολλαπλότητα\ 1})$:

- Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda_1=-1}$ λύνουμε το σύστημα:

$$(Γ+1\cdot I)\cdot\overrightarrow{u_1}=0$$

$$[Γ-(-1)\cdot I_3]\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{-4+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\\mathbf{6} & \mathbf{-1+1} & \mathbf{-6}\\\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-4+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ 6x + 0y - 6z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y \in R \right\}$$

Και βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως μία διαγωνοποίηση του Γ είναι η εξής:

$$\Gamma = P \cdot D \cdot P^{-1} = [\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{u_3}] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot [\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{u_3}]^{-1}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\times\nu$ αντιστρέψιμο πίνακα A, ισχύει $|\boldsymbol{adjA}| = |\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{\nu-1}}$ και $\boldsymbol{adj(adjA)} = |\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{\nu-2}} \cdot \boldsymbol{A}$.

Λύση

(α) Για οποιονδήποτε $\nu\times\nu$ πίνακα A, ισχύει

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{detA} \cdot adjA \Leftrightarrow I = A \cdot adjA \cdot \frac{1}{detA} \Leftrightarrow$$

$$A \cdot adjA = detA \cdot I \Leftrightarrow A \cdot adjA = |A| \cdot I$$

$A \cdot adjA = |A| \cdot I \Rightarrow |A \cdot adjA| = \big||A| \cdot I\big| \Rightarrow |A| \cdot |adjA| = |A|^{\nu}$*(αριθμός επί ορίζουσα του μοναδιαίου)*

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος και $|A| \neq 0$ προκύπτει

$$|adjA| = |A|^{\nu} \cdot \frac{1}{|A|} \Leftrightarrow |adjA| = |A|^{\nu-1}$$

Άρα

$$|adjA| = |A|^{\nu-1} \ (1)$$

(β) Για το δεύτερο σκέλος, έχουμε

$$A \cdot adjA = |A| \cdot I \Rightarrow adjA = |A| \cdot A^{-1} \Rightarrow (adjA)^{-1} = |A|^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|adjA|} \cdot adj(adjA) = |A|^{-1} \cdot A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{|A|^{\nu-1}} \cdot adj(adjA) = |A|^{-1} \cdot A \Rightarrow$$

$$adj(adjA) = |A|^{\nu-1} \cdot |A|^{-1} \cdot A \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{adj(adjA) = |A|^{\nu-2} \cdot A}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B τέτοιοι ώστε ο A είναι αντιστρέψιμος, $AB = BA$ και λ_0 μια απλή ιδιοτιμή του B με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\overrightarrow{x_0}$. Να αποδείξετε ότι το $\overrightarrow{x_0}$ είναι ιδιοδιάνυσμα και του A.

Λύση

Από τον ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, έχουμε $\overrightarrow{x_0} \neq \vec{0}$ και

$$B \cdot \overrightarrow{x_0} = \lambda_0 \cdot \overrightarrow{x_0} \Rightarrow A \cdot B \cdot \overrightarrow{x_0} = A \cdot \lambda_0 \cdot \overrightarrow{x_0} \Rightarrow B \cdot (A \cdot \overrightarrow{x_0}\,) = \lambda_0 \cdot (A \cdot \overrightarrow{x_0}\,)$$

Συνεπώς, το διάνυσμα $A \cdot \overrightarrow{x_0}$ (το οποίο είναι μη μηδενικό διότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $\overrightarrow{x_0} \neq \vec{0}$) είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0.

Επειδή όμως αυτή η ιδιοτιμή είναι απλή, έχει πολλαπλότητα 1 και πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{x_0}$ και $A \cdot \overrightarrow{x_0}$ να είναι συγγραμμικά.
Άρα υπάρχει αριθμός μ_0 τέτοιος ώστε $A \cdot \overrightarrow{x_0} = \mu_0 \cdot \overrightarrow{x_0}$ και το $\overrightarrow{x_0}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ_0 του A .