ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF
ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND
PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
11. Διαγωνοποίηση Πίνακα

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

Ορισμοί

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ είναι <u>διαγωνοποιήσιμος</u> αν και μόνο αν είναι <u>όμοιος</u> με διαγώνιο πίνακα $D \in M_{n\times n}$.

Λέμε ότι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα D , αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D$$

<u>Σημ:</u> Σημαντική εφαρμογή της διαγωνοποίησης είναι ο υπολογισμός δυνάμεων!

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ είναι <u>διαγωνοποιήσιμος</u> αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D \text{ ή αλλιώς } A = PDP^{-1}$$

όπου D διαγώνιος πίνακα $D \in M_{n\times n}$.

Ο πίνακας <u>P διαγωνοποιεί τον A</u>.

Ο πίνακας <u>D είναι ο όμοιος διαγώνιος του A</u>.

Ιδιότητες ομοίων πινάκων

Αν $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}_{n\times n}$ όμοιοι πίνακες, δηλ. υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{M}_{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$\boldsymbol{P^{-1}AP = B}, \boldsymbol{\tau \acute{o} \tau \varepsilon} \begin{cases} \boldsymbol{detA = detB} \\ \boldsymbol{X_A(\lambda) = X_B(\lambda)} \\ \boldsymbol{B^k = P^{-1}A^kP}, \forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{N} \end{cases}$$

Απόδειξη 1

$$A)\ P^{-1}AP = B \Rightarrow det(P^{-1}AP) = detB \Rightarrow$$

$$(detP^{-1}) \cdot (detA) \cdot (detP) = detB \Rightarrow$$

$$\frac{1}{detP} \cdot (detA) \cdot (detP) = detB \Rightarrow \boxed{detA = detB}.$$

- <u>Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει!</u>

Δηλαδή, αν δύο πίνακες $A, B \in M_{n\times n}$ έχουν $detA = detB$, αυτό δεν σημαίνει ότι είναι και όμοιοι!!!!

Απόδειξη 1

Γ) $P^{-1}AP = B \Rightarrow \left(P^{-1}AP\right)^k = B^k \Rightarrow$

- $\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) \cdot \dots \cdot \left(P^{-1}AP\right) = B^k \Rightarrow$
- $P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)A\left(PP^{-1}\right) \dots \left(PP^{-1}\right)AP = B^k \Rightarrow$
- $P^{-1}AIAI \dots IAP = B^k \Rightarrow$
- $P^{-1}AA \dots AP = B^k \Rightarrow \quad P^{-1}A^kP = B^k$

Παρατήρηση

Αφού $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$, αυτό σημαίνει ότι οι δυο πίνακες έχουν τις ίδιες ιδοτιμές.

Πρόταση

Αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε ο P που τον διαγωνοποιεί έχει ως στήλες n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και ο διαγώνιος D έχει στη διαγώνιό του τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του A, δηλαδή:

$$P = \left[\overrightarrow{x_1} \middle| \overrightarrow{x_2} \middle| \dots \middle| \overrightarrow{x_n}\right] \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ είναι τοποθετημένες στον D με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P.

Και επομένως ισχύει: $A = PDP^{-1}$

Βήματα για τη διαγωνοποίηση πινάκων

1) Δημιουργία του πίνακα $[A-\lambda I_n]$, ο οποίος προκύπτει από τον A με την αφαίρεση της παραμέτρου λ από την κύρια διαγώνιο.

2) Υπολογισμός της $\boldsymbol{det(A-\lambda I_n)=X_A(\lambda)}$, δηλ. του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A ως προς λ.

3) Επίλυση της εξίσωσης $\boldsymbol{X_A(\lambda)=0}$, δηλ. της $\boldsymbol{det(A-\lambda I_n)=0}$. Οι διαφορετικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ $(\mu\varepsilon\ \rho \leq n)$ αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A.

4) Βρίσκουμε μια βάση $\boldsymbol{B_{\lambda_1}}$ του χώρου $V_{\lambda_1}(A)$.

Βρίσκουμε μια βάση $\boldsymbol{B_{\lambda_2}}$ του χώρου $V_{\lambda_2}(A)$

$\vdots$

Βρίσκουμε μια βάση $\boldsymbol{B_{\lambda_\rho}}$ του χώρου $V_{\lambda_\rho}(A)$.

Βήματα για τη διαγωνοποίηση πινάκων (συνέχεια)

5) Θεωρούμε το σύνολο $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \cdots \cup B_{\lambda_\rho}$.

6) Αν το B έχει n διανύσματα τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος , αλλιώς όχι.

7) Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή αν $B = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ τότε:

$$P = \underbrace{\left[\overrightarrow{x_1} \middle| \overrightarrow{x_2} \middle| \dots \middle| \overrightarrow{x_n}\right]}_{\text{Πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των ιδιοδιανυσμάτων}} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Όπου οι ιδιοτιμές $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ είναι τοποθετημένες στον D με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P.

Παράδειγμα 1

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_{3\times 3}$ με $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Α) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A.

Β) Να δείξετε ότι ο A διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν πίνακα P που τον διαγωνοποιεί καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D .

Γ) Να βρείτε τον A^{80}.

Δ) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα $detA$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Παράδειγμα 1α-λύση

Α) χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A :

$$X_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\cdot[-\lambda(3-\lambda)-4] - 2[2(3-\lambda)-8] + 4(4+4\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 2(-2\lambda - 2) + 16(\lambda+1) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4) + 20(\lambda+1) = (\lambda+1)[(3-\lambda)(\lambda-4)+20] =$$

$$= (\lambda+1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = \boxed{-(\lambda+1)^2(\lambda-8).}$$

Δηλαδή: $\boxed{X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8\,.}$

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1\ (\delta\iota\pi\lambda\eta) \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

- Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι εξής: $\boxed{\lambda_1 = -1\ (\delta\iota\pi\lambda\eta) \kappa\alpha\iota\ \lambda_2 = 8\,.}$

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Β) Για να δούμε αν ο A διαγωνοποιείται, πρέπει να βρούμε μια βάση B_{λ_1} του ιδιόχωρου του A ως προς κάθε ιδιοτιμή του $V_{\lambda_1}(A)$, άρα πρέπει να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή.

1) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε :

$$(A-\lambda_1 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow [A-(-1)I_3]\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επίλυση ομογενούς συστήματος

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \frac{1}{4}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

y, z ελεύθερες μεταβλητές

x βασική μεταβλητή

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε λοιπόν:

$$(A-\lambda_1 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\left\{ \begin{matrix} x = -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{matrix} \right., y \in R, z \in R.}$$

- Άρα ο ιδιοχώρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R, z \in R.$$

Και μια βάση B_{-1} του ιδιοχώρου $V_{-1}(A)$ είναι:

$$\boxed{B_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.}$$

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Λύση ομογενούς συστήματος

2) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε :

$$(A-\lambda_2 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow [A-8\cdot I_3]\,\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3\to\gamma_3-2\gamma_2]{\gamma_1\to-\frac{1}{5}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 2 & -8 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

x, y βασικές μεταβλητές

z ελεύθερη μεταβλητή

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε λοιπόν:

$$(A-\lambda_2 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}z, z \in R. \\ z \end{cases}}$$

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Άρα ο ιδιοχώρος $V_8(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R.$

Και μια βάση B_8 του ιδιοχώρου $V_8(A)$ είναι: $\boxed{B_8 = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$

Εύρεση του συνόλου $B = B_{-1} \cup B_8 = \left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$

Άρα το B έχει 3 διανύσματα και άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Επειδή $n = 3$ συνεπάγεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του B.

Εύρεση διαγώνιου πίνακα :

- Άρα ο πίνακας P που διαγωνοποιεί τον A είναι ο εξής: $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Ο αντίστοιχος διαγώνιος όμοιος με τον A είναι ο εξής:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \; και \; A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P.

Παράδειγμα 1γ-λύση (συνέχεια)

Γ) Υπολογισμός του A^{80}: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

- Γνωρίζουμε ότι $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1}$.

Αν $A, B \in M_{n\times n}$ όμοιοι πίνακες δηλ. $P^{-1}AP = B$ τότε ισχύει $B^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in N$

Επομένως:

$$D^{80} = \begin{bmatrix} (-1)^{80} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{80} & 0 \\ 0 & 0 & 8^{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix}$$

- Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε:

- $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Αν D διαγώνιος πίνακας η νιοστή δύναμη του D είναι ίση με τον πίνακα με υψωμένα εις την ν μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου.

Παράδειγμα 1γ-λύση (συνέχεια)

Επομένως:

- $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1} =$
- $= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \cdots =$

$$\boxed{A^{80} = \begin{bmatrix} \frac{5+2^{242}}{9} & \frac{2^{241}-2}{9} & \frac{2^{242-4}}{9} \\ \frac{2^{241}-2}{9} & \frac{2^{240}+8}{9} & \frac{2^{241}-2}{9} \\ \frac{2^{242}-4}{9} & \frac{2^{241}-2}{9} & \frac{5+2^{242}}{9} \end{bmatrix}}$$

Παράδειγμα 1δ-λύση (συνέχεια)

Δ) Υπολογισμός $detA$

Α’ τρόπος: $detA = X_A(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 8 = 8.$ Άρα $\boxed{detA = 8.}$

Β’ τρόπος:

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A ως γινόμενο των ιδιοτιμών:

- $A, D\ ομοιοι\ πινακες \Rightarrow\ detA = detD \xRightarrow[D\ διαγώνιος]{}$

$detD = γινομενο\ των\ διαγωνιων\ στοιχειων \Rightarrow detD = γινομενο\ των\ ιδιοτιμων\ του\ \mathrm{A}!$

Άρα $\boxed{detA = (-1) \cdot (-1) \cdot 8 =}\, 8$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Την ιδιοτιμή $\lambda = -1$ η οποία είναι διπλή (έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2) την χρησιμοποιούμε 2 φορές! Αντίστοιχα, αν είχαμε μια τριπλή ιδιοτιμή θα τη χρησιμοποιούσαμε τρεις φορές, κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2 (για λύση)

- Δίνεται ο πίνακας $A \in M_{3\times 3}$ με $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- Α) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A.
- Β) Να δείξετε ότι ο A διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν πίνακα P που τον διαγωνοποιεί καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D .
- Γ) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα $detA$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Παράδειγμα 2α-Λύση

Α) χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_{\mathrm{A}}(\lambda)$ και ιδιοτιμές του A :

- $X_{\mathrm{A}}(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$

$$(2-\lambda)\cdot[(1-\lambda)(4-\lambda)+2] = (2-\lambda)\cdot\left(4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2\right)$$
$$= (2-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-5\lambda+6\right) = (2-\lambda)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-3).$$

$$X_{\mathrm{A}}(\lambda) = -\lambda^3+7\lambda^2-16\lambda+12$$

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\ (\delta\iota\pi\lambda\eta) \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2\ (\delta\iota\pi\lambda\eta) \kappa\alpha\iota\ \lambda_2 = 3$.

Συνεχίστε την επίλυση του 2β και 2γ όπως στο παράδειγμα 1.

Πρόταση

- Ο πίνακας $A \in M_{n\times n}$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\boldsymbol{dimV_{\lambda_1}(A) + dimV_{\lambda_2}(A) + \cdots + dimV_{\lambda_\rho}(A) = n}$$

- Όπου όλες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ $\mu\varepsilon$ $\rho \le n$ όλες οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του A.

Παρατήρηση

- Έχουμε δει ότι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Άρα αν ο $A \in M_{n\times n}$ έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές τότε διαγωνοποιείται.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Αν όμως κάποια ιδιοτιμή είναι διπλή, τριπλή κ.τ.λ. τότε το αν ο A διαγωνοποιείται ή όχι εξαρτάται από το πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να βρούμε συνολικά για όλες τις ιδιοτιμές.