ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
1δ. Ασκήσεις στους Πίνακες

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

Άσκηση 1

Να δειχτεί ότι αν ο πίνακας A είναι διαγώνιος

$$A = \begin{bmatrix} a-b+1 & -a-b-c+2 \\ a^3+b^3+c^3-3abc & a+\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

τότε ο πίνακας A είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή ο μοναδιαίος 2×2.

Λύση

Αν ο $A = \begin{bmatrix} a-b+1 & -a-b-c+2 \\ a^3+b^3+c^3-3abc & a+\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος τότε πρέπει:

$$\boldsymbol{-a-b-c+2=0}$$
$$\boldsymbol{\kappa\alpha\iota\ a^3+b^3+c^3-3abc=0.}$$

Όμως από την ταυτότητα του Euler έχουμε:

$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}$$

- Άρα λαμβάνουμε:

$$a^3 + b^3 + c^3 \ - 3abc = o \leftrightarrow$$

$$(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0\ .$$

Άρα

$$2 \cdot [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0 \leftrightarrow$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \leftrightarrow \alpha = b = c\ .$$

$$1\eta \ \ \varepsilon\xi\iota\sigma\omega\sigma\eta\ a + b + c = 2 \Leftrightarrow \alpha + \alpha + \alpha = 2 \Leftrightarrow 3\alpha = 2$$

Επομένως $\alpha = b = c = \frac{2}{3}$. Και προκύπτει από πράξεις ότι $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Άσκηση 2

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$ $\kappa\alpha\iota$ $B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$,

να προσδιοριστούν τα x, y, z έτσι ώστε να ισχύει:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Λύση

Γενικά ισχύει η σχέση: $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 + AB - BA$.

Η σχέση

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

ισχύει αν και μόνο αν οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} x & xy & 0 \\ xy & y & z \\ x & y & z^2 \end{bmatrix} \text{ και } BA = \begin{bmatrix} x & x^2 & 0 \\ y^2 & y & y \\ z & z & z^2 \end{bmatrix}$$

Επομένως η δοσμένη σχέση αληθεύει αν και μόνο αν:

$$xy = x^2, xy = y^2, x = z, y = z.$$

Άρα τελικά

$$\boxed{x = y = z.}$$

Άσκηση 3

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$. Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες: $B^2 = I_\nu$ $και$ $A = \frac{1}{2}(B + I_\nu)$, να δείξετε ότι $A^2 = A$.

Λύση

$$A^2 = A \cdot A =$$

$$\frac{1}{2}(B + I_\nu) \cdot \frac{1}{2}(B + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(B + I_\nu)\,(B + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(B \cdot B + I_\nu \cdot B + B \cdot I_\nu + I_\nu \cdot I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(B^2 + B + B + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(I_\nu + 2 \cdot B + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(2 \cdot B + 2 \cdot I_\nu) =$$

$$\frac{2}{4}(B + I_\nu) = \frac{1}{2}(B + I_\nu) = A.$$

Άσκηση 4

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$. Αν ισχύει ότι $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_\nu$, τότε να δείξετε ότι οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Λύση

- Αφού $A^2 = I_\nu$ αυτό σημαίνει ότι $A \cdot A = I_\nu$ δηλαδή ο Α είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $A^{-1} = A$. (*)
- Ομοίως αφού $B^2 = I_\nu$ αυτό σημαίνει ότι ο Β είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $B^{-1} = B$. (**)
  - Ομοίως αφού $(AB)^2 = I_\nu$, αυτό σημαίνει ότι $(AB)^{-1} = A \cdot B$.
  - Αλλά από γνωστή ιδιότητα $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B \cdot A$, (λόγω των σχέσεων (*) και (**)).

$$\boxed{\text{Επομένως: } A \cdot B = B \cdot A!}$$

Β τροπος

$$A \circ B = B \circ A \Leftrightarrow$$

$$(A \circ B) \circ (A B) = B \circ A)(A \circ B) \Leftrightarrow$$

$$I_\nu = B(A \circ A) \circ B \Leftrightarrow$$

$$I_\nu = B \circ I_\nu \circ B \Leftrightarrow$$

$$I_\nu = B \circ B \Leftrightarrow$$

$I_\nu = I_\nu$ που ισχύει

Άσκηση 5

Θεωρούμε τους τετραγωνικούς πίνακες A, B τάξης $n \times n$.

Αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A + B = A \cdot B$,

να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$A^{-1} + B^{-1} = I_n \,.$$

Λύση άσκησης 5

Αν A, B πίνακες τάξης $n \times n$, B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A + B = A \cdot B$, να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

- $A + B = A \cdot B$
- $(A + B) \cdot B^{-1} = (A \cdot B) \cdot B^{-1}$ *πολ/ζω με B^{-1} (B αντιστρέψιμος)*
- $A \cdot B^{-1} + B \cdot B^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1})$ *επιμεριστική / προσεταιριστική*
- $A \cdot B^{-1} + I_n = A \cdot (I_n)$
- $A \cdot B^{-1} + I_n = A$
- $I_n = A - A \cdot B^{-1}$
- $I_n = A \cdot (I_n - B^{-1})$, *δηλ. ο αντίστροφος του A είναι ο $I_n - B^{-1}$*
- Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$A^{-1} = I_n - B^{-1} \Leftrightarrow \quad A^{-1} + B^{-1} = I_n$$

Άσκηση 6

Αν $A = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3, A^ρ.

Λύση

$$A^2 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 & -2sin\theta cos\theta \\ 2sin\theta cos\theta & (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & cos2\theta \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & cos2\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta \cdot cos2\theta - sin\theta \cdot sin2\theta & -sin\theta cos2\theta - cos\theta sin2\theta \\ sin\theta cos2\theta + cos\theta sin2\theta & (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos3\theta & -sin3\theta \\ sin3\theta & cos3\theta \end{bmatrix}$$

Ομοίως

$$\boxed{A^\rho = \begin{bmatrix} cos\rho\theta & -sin\rho\theta \\ sin\rho\theta & cos\rho\theta \end{bmatrix}}$$. Απόδειξη επαγωγικά.

Άσκηση 7 Να υπολογίσετε τη ν-οστή (ν≥ 1) δύναμη του τετραγωνικού πίνακα A, όπου $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I_2 \ (\text{ή } A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2 \cdot I_2 = I_2)$$

Επομένως:

$$A^\nu = \begin{cases} I_2, & \alpha\nu\ \nu = 2\rho, \rho \in N \\ A, & \alpha\nu\ \nu = 2\rho + 1, \rho \in N \end{cases}$$

Απόδειξη επαγωγικά.

Άσκηση 8 Δίνεται τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_n$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος και τέτοιος ώστε: $A^{-1} = I_n - A$. Να δείξετε ότι: $A^6 - I_n = O_n$.

Λύση

Αφού ο A αντιστρέψιμος, υπάρχει πίνακας A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Επομένως:

$$I_n = A \cdot (I_n - A) \Leftrightarrow I_n = A \cdot I_n - A \cdot A \Leftrightarrow \boxed{I_n = A - A^2} \ (1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2 - A + I_n = O_n \Leftrightarrow A \cdot (A^2 - A + I_n) = A \cdot O_n \Leftrightarrow$$

$$A^3 - A^2 + A = O_n \Leftrightarrow A^3 + (A - A^2) = O_n \underset{(1)}{\Leftrightarrow} A^3 + I_n = O_n \Leftrightarrow \boxed{A^3 = -I_n} .$$

Άρα

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-I_n) \cdot (-I_n) = (-1) \cdot (-1) \cdot (I_n)^2 = 1 \cdot I_n = I_n .$$

Επομένως: $\boxed{A^6 - I_n = O_n}$

Άσκηση 9

Δίνονται τρεις τετραγωνικοί πίνακες A, B, Γ διάστασης $n \times n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A = B + \Gamma$ (1), να δείξετε ότι $B \cdot A^{-1} \cdot \Gamma = \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B$.

Λύση

Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}, και επομένως:

$\boxed{B \cdot A^{-1} \cdot \Gamma} =$ (από σχέση 1)

$= (A - \Gamma) \cdot A^{-1} \cdot (A - B) =$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$= (A \cdot A^{-1} - \Gamma \cdot A^{-1}) \cdot (A - B) =$ $(\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I_n})$

$= (I_n - \Gamma \cdot A^{-1}) \cdot (A - B) =$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$= I_n \cdot (A - B) - \Gamma \cdot A^{-1} \cdot (A - B) =$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$= A - B - \Gamma \cdot \boxed{A^{-1} \cdot A} + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B =$

$= A - B - \Gamma \cdot I_n + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B = A - B - \Gamma + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B =$

$= O_n + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B = \boxed{\Gamma \cdot A^{-1} \cdot B}.$

Άσκηση 10 Αν ο A είναι $n \times n$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας και ο B είναι $n \times m$ πίνακας, να δείξετε ότι ο πίνακας $B^T \cdot A \cdot B$ είναι συμμετρικός.

Λύση

$$\boxed{(B^T \cdot A \cdot B)^T} =$$

Από γνωστή ιδιότητα ισχύει $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$= (A \cdot B)^T \cdot (B^T)^T =$$

Από γνωστή ιδιότητα ισχύει $\left(B^T\right)^T = B$

$$= (B^T \cdot A^T) \cdot B =$$

$$= B^T \cdot A^T \cdot B =$$

Αφού ο A είναι συμμετρικός, ισχύει $A^T = A$

$$= \boxed{B^T \cdot A \cdot B.}$$

Σημείωση: $(A \cdot B \cdot \Gamma)^T = [(A \cdot B) \cdot \Gamma]^T = \Gamma^T \cdot (A \cdot B)^T = \Gamma^T \cdot B^T \cdot A^T$

Άσκηση 11 Αν A, B είναι $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο $I_n - AB$ να είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι και ο $I_n - BA$ είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει:

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$$

Λύση Υπολογίζουμε το γινόμενο:

$$\boxed{(I_n - BA)\cdot(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)} = \text{(επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$I_n + B(I_n - AB)^{-1}A - BAI_n - BAB(I_n - AB)^{-1}A =$$

$$I_n + B[(I_n - AB)^{-1} - I_n - AB(I_n - AB)^{-1}]\cdot A =$$

$$I_n + B[-I_n + (I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1}]\cdot A =$$

$$I_n + B[-I_n + (I_n - AB)\cdot(I_n - AB)^{-1}]\cdot A =$$

$$I_n + B(-I_n + I_n)\cdot A = \quad I_n + B\cdot O_n\cdot A = \boxed{I_n}$$