ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BOOLE.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΗ KARNAUGH (καρνώ)

Ο ΧΑΡΤΗΣ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΜΕ ΤΟΥΣ ΟΠΟΙΟΥΣ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΚΦΡΑΣΤΕΙ ΣΕ ΠΡΟΤΥΠΗ ΜΟΡΦΗ.

ΧΑΡΤΗΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

x \ y	0	1
0	$x'y'$	$x'y$
1	xy'	xy

m_0	m_1
m_2	m_3

ΠΧ: Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $xy = m_3$ ΕΧΕΙ ΤΟΝ ΧΑΡΤΗ KARNAUGH ΜΕ ΑΣΣΟ ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΟ m_3

x \ y	0	1
0		
1		1

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $x+y =$

$$= x'y + xy' + xy =$$

$$m_1 + m_2 + m_3$$

x \ y	0	1
0		1
1	1	1

ΕΝΑΣ ΧΑΡΤΗΣ ΤΡΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ:

x \ yz	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
x { 1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

y: 11, 10 — z: 01, 11

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

ΠΑΡΑΤΗΡΩ: ΣΕ ΚΑΘΕ ΒΗΜΑ (ΣΕ ΚΑΘΕ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑΚΙ) ΜΟΝΑΧΑ ΕΝΑ ΒΙΤ ΑΛΛΑΖΕΙ ΑΠΟ $0 \to 1$ ή ΑΠΟ $1 \to 0$.

ΠΑΡΕ ΔΥΟ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑΚΙΑ.

πχ m_5 κ' m_7. ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΜΟΝΟ ΚΑΤΑ ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ (την y) η οποία

$m_5 \to 001 \to xy'z$

$m_7 \to 011 \to xyz$

ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ΣΑΝ ΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΤΟ ΕΝΑ κ' ΣΑΝ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΗΣ ΤΙΜΗ ΣΤΟ ΑΛΛΟ.

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΡΩΝ ΣΕ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑΚΙΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΘΕΙ ΣΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΚΑΙ ΜΕ ΔΥΟ ΜΟΝΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ:

$$xy'z + xyz = xz(y'+y) = xz$$

ΥΛΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$F(x,y,z) = \Sigma(2,3,4,5)$$

010 011 100 101

x \ yz	00	01	10	11
0			m_3 1	m_2 1
1	m_4 1	m_5 1		

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$$m_2 + m_3 = x'yz' + x'yz =$$
$$= x'y(z'+z) = x'y$$

$$m_4 + m_5 = xy'z' + xy'z = xy'(z'+z)$$
$$= xy'$$

HENCE: $F(x,y,z) = \Sigma(2,3,4,5) =$
$$= x'y + xy'$$

ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΚΙ'ΑΣ ΜΗΝ ΑΚΟΥΜΠΑΝΕ:

m_0 κ' $m_2 = x'y'z' + x'yz' = x'z'$

m_4 κ' $m_6 = xy'z' + xyz = xz$

$F(x,y,z) = \Sigma(3,4,6,7)$

x \ yz	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$F(x,y,z) = (m_3 + m_7) + (m_4 + m_6)$

$= yz + xz'$

ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΟΡΟΙ

→ ΚΑΤΑΛΗΓΕΙ ΣΕ ΕΚΦΡΑΣΗ ΜΕ

ΕΝΑΝ ΜΟΝΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ !

πχ ΠΕΣ ΠΩΣ ΕΧΕΙΣ

	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

$m_0 + m_4 + m_2 + m_6 =$

$\underbrace{x'y'z' + xy'z'}+\underbrace{x'yz' + xyz'} =$

$= y'z' + yz' = z'(y'+y) = z'$!

ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΟΜΑΔΟΠΟΙΩ ΕΝΑΝ ΑΣΣΟ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΜΙΑ ΟΜΑΔΕΣ!

x \ yz	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1		1

$$F = \Sigma(0,2,4,5,6)$$

$$m_0 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 =$$

$$= \underbrace{m_0 + m_4 + m_2 + m_6} + \underbrace{m_4 + m_5} =$$

$$= z' + xy'$$

ΕΡΩΤΗΣΗ!

ΕΑΝ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΝΕΤΑΙ ΣΑΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΚΑΙ ΟΧΙ ΣΑΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΟΡΩΝ ΠΩΣ ΓΕΜΙΖΩ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ?

ΧΑΡΤΗΣ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$F(w,x,y,z)$

ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΑΥΤΑ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΝΑ ΔΙΠΛΑ ΣΤΟ ΑΛΛΟ

wx \ yz	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

ΘΕΩΡΩ ΟΤΙ Η ΔΕΞΙΑ ΑΚΜΗ ΑΚΟΥΜΠΑ ΣΤΗΝ ΑΡΙΣΤΕΡΗ ΚΑΙ Η ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΚΑΤΩ.

ΠΧ m_0 ΓΕΙΤΟΝΙΚΟ ΜΕ m_8

m_{12} ΓΕΙΤΟΝΙΚΟ ΜΕ m_{14}

ΕΝΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ → ΕΝΑΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΟΡΟΣ

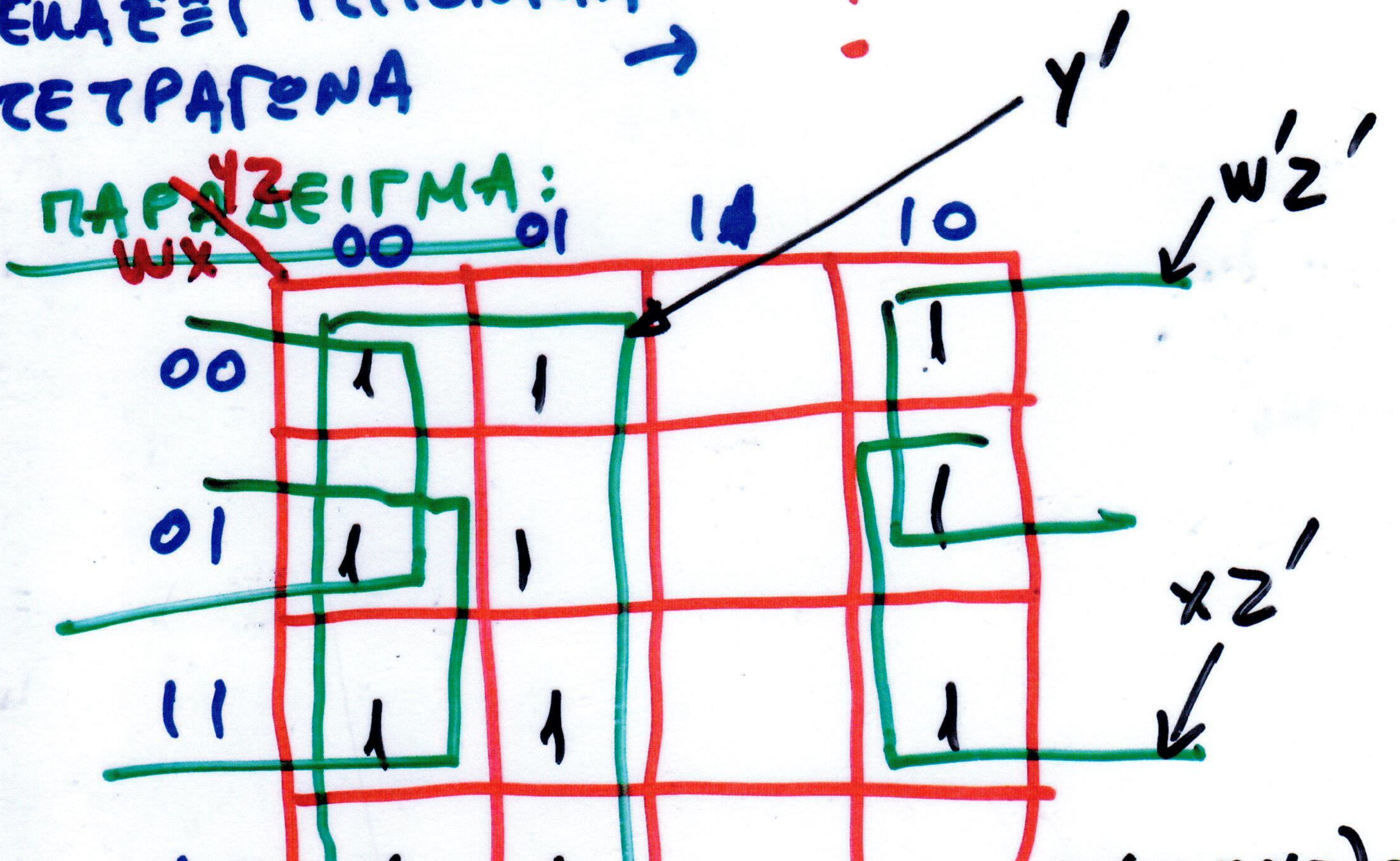
ΔΥΟ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ → ΕΝΑΣ ΟΡΟΣ - ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

ΤΕΣΣΕΡΑ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ → ΕΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

ΟΚΤΩ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΟΝΑ → ΟΡΟΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ

ΔΕΚΑΕΞΙ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ → ?

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$F(w,x,yz) = y' + w'z + xz'$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

$$F = B'D' + BD + A\overset{D}{\cancel{C}} + CD$$

- PRIME IMPLICANT

ΕΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΣΥΝΔΙΑΣΜΟ ΤΟΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΓΕΙΤΟΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

- ΟΥΣΙΩΔΗΣ PRIME IMPICANT.

ΕΑΝ ΕΝΑΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΟΡΟΣ ΚΑΛΥΠΤΕΤΑΙ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΕΝΑΝ PRIME IMPICANT ΤΟΤΕ ΑΥΤΟΣ ΛΕΓΕΤΑΙ ΟΥΣΙΩΔΗΣ

$$(BD,\ B'D')$$

ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
ΔΥΣΚΟΛΟ ΝΑ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΘΟΥΝ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

A=0

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

A = 1

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

ΕΠΕΚΤΕΙΝΕΤΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΥ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟΥΣ ΔΥΟ ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ

πχ m_5 m_{21}

m_{10} m_{26} κλπ.

1 ΚΟΥΤΙ → 1 ΕΛΑΧΙΣΤΟΡΟΣ
2 → ΓΙΝΟΜΕΝΟ 4 ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
4 → " 3 "
8 → " 2 "
16 → " 1 "

A=0

BC \ DE	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11		1		
10		1		

A=1

BC \ DE	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	
10		1		

$$F = A'B'E' + BD'E + ACE.$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ (11)

ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

Π.Χ. $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,1,2,5,8,9,10)$

1. ΠΙΝΑΚΑΣ.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

2. ΟΜΑΔΟΠΟΙΩ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΚΑΙ ΠΑΙΡΝΩ:

$$F' = CD + AB + BD'$$

$\Rightarrow$

$$F = (CD + AB + BD')'$$

DE MORGAN $\Rightarrow$

$$F = (CD)' \cdot (AB)' \cdot (BD')'$$

$\Rightarrow$

$$= (C'+D')(A'+B')(B'+D)$$

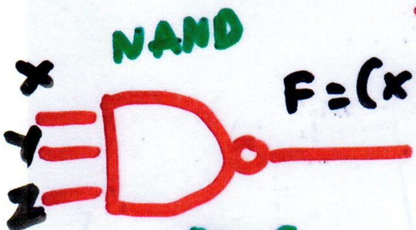
ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΥΛΕΣ NAND ή NOR

$(A \cdot B \cdots)'$ $(A+B+\cdots)'$

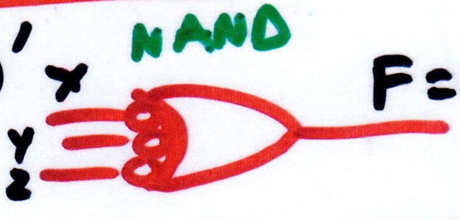
ΟΙ ΠΥΛΕΣ NAND ή NOR ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΝΤΑΙ ΚΑΛΥΤΕΡΑ (ΕΥΚΟΛΟΤΕΡΑ) ΜΕ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

ΠΙΟ ΓΡΗΓΟΡΕΣ - ΛΙΓΟΤΕΡΟ ΧΩΡΟ ΚΛΠ.

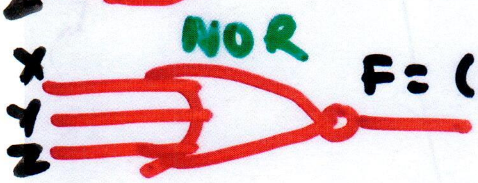
⇒ ΘΕΛΩ ΝΑ ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΜΕΤΑΤΡΕΨΩ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ BOOLE (ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ AND, OR, NOT) ΣΕ ΜΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ Η ΟΠΟΙΑ ΝΑ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΜΟΝΑΧΑ ΤΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ NAND ή NOR ή NOT



$F=(xyz)'$



$F=x'+y'+z'=(xyz)'$



$F=(x+y+z)'$

$F=(x'y'z')=$

$=(x+y+z)'$

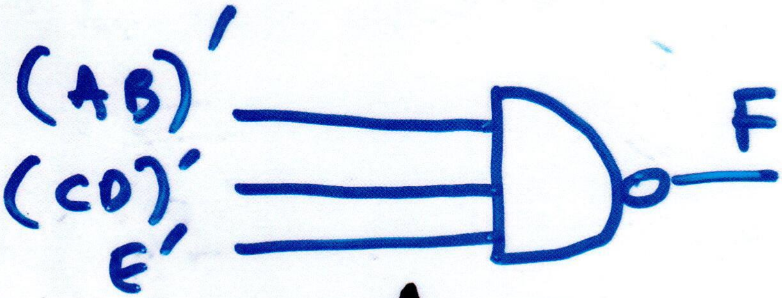
ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΥΛΕΣ NAND.

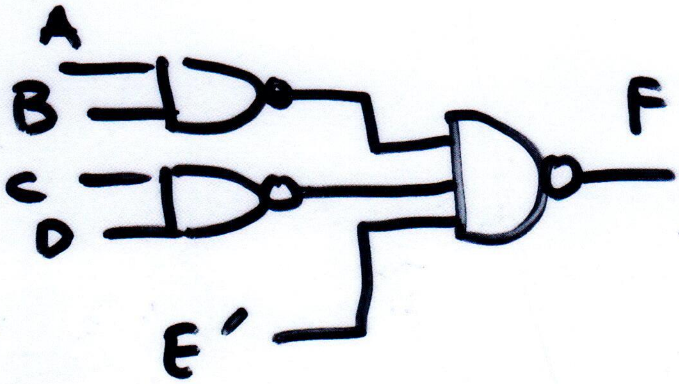
πχ: $F = AB + CD + E$

$$\Rightarrow F' = [AB + CD + E]' =$$

$$= (AB)'(CD)'(E)'$$

$$\Rightarrow F = [(AB)'(CD)'E']'$$



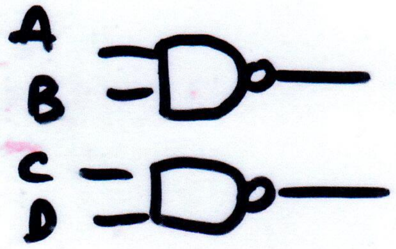


ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕ NAND ΠΥΛΕΣ.

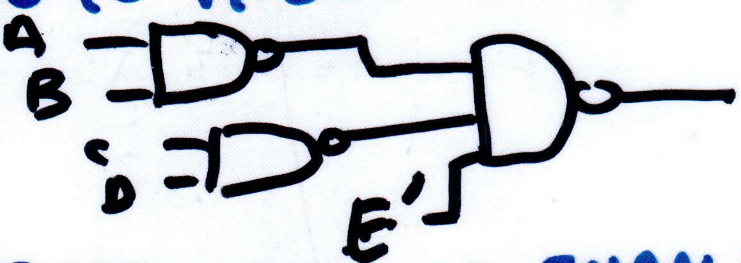
1. ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΚΦΡΑΖΟΥΜΕ ΣΑΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ

$$F = AB + CD + E$$

2. ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΙΑ ΠΥΛΗ NAND ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΟΡΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΔΥΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ. ΟΙ ΕΙΣΟΔΟΙ ΚΑΘΕ ΠΥΛΗΣ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ. ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.



3. ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΙΑ ΠΥΛΗ NAND ΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΕ ΕΙΣΟΔΟΥΣ ΠΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΤΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

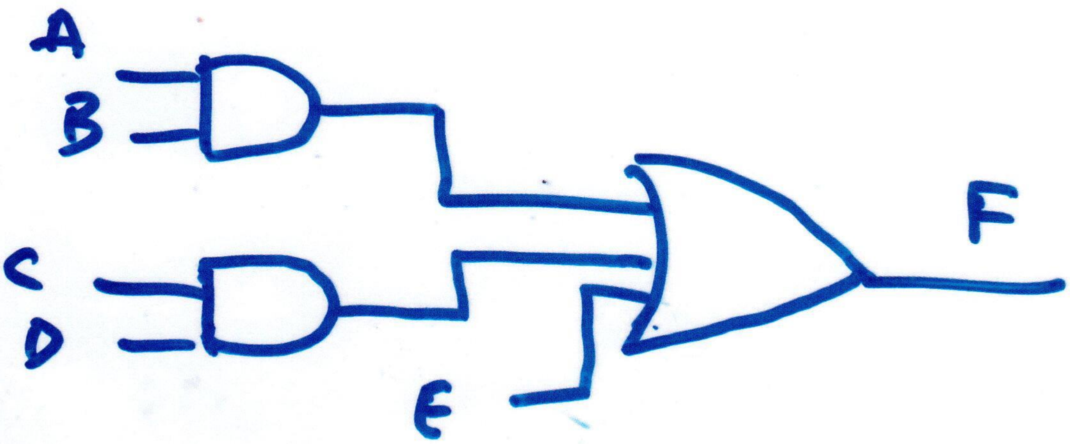


4. ΕΝΑΣ ΟΡΟΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΜΟΝΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ ΤΡΟΦΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΣΤΗΝ NAND ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΦΟΥ "ΠΕΡΑΣΕΙ" ΑΠΟ ΕΝΑΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΑ. ΕΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ ΣΤΗΝ F ΤΟΤΕ ΤΡΟΦΟΔΟΤΟΥΜΕ ΤΗΝ ΟΡΘΗ ΤΟΥ ΤΙΜΗ ΣΤΗΝ NAND ΤΟΥ...

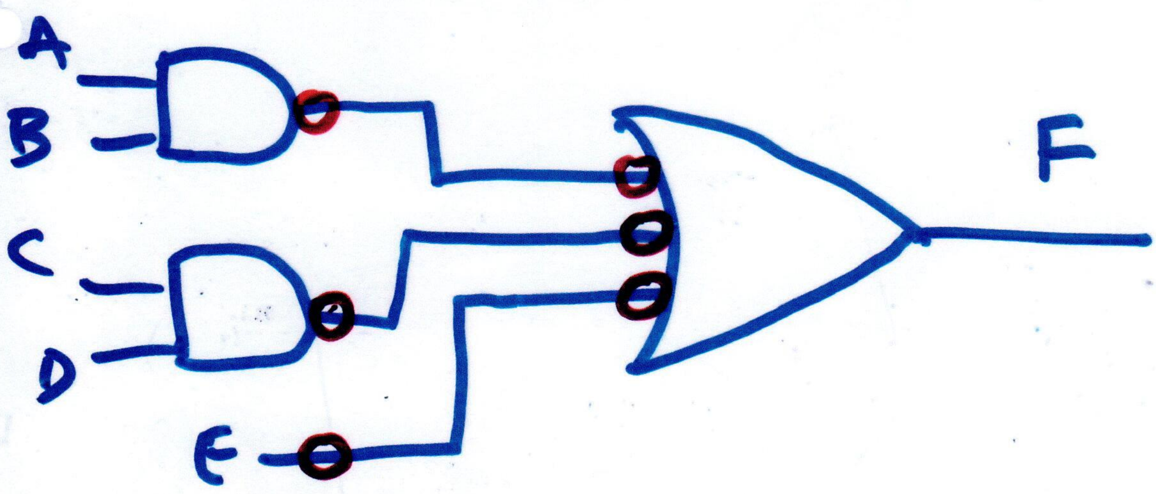
ΕΝΑΣ ΑΛΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ.

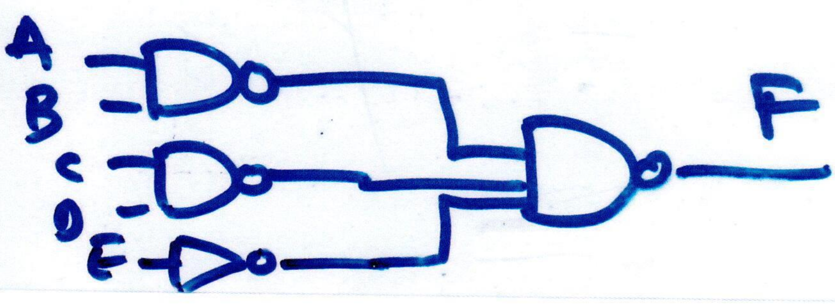
1. ΠΑΡΕ ΤΗΝ AND-OR ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ:

$$F = AB + CD + E$$



2. ΠΡΟΣΘΕΣΕ ΔΙΠΛΕΣ ΑΡΝΗΣΕΙΣ:





ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΥΛΕΣ NOR.

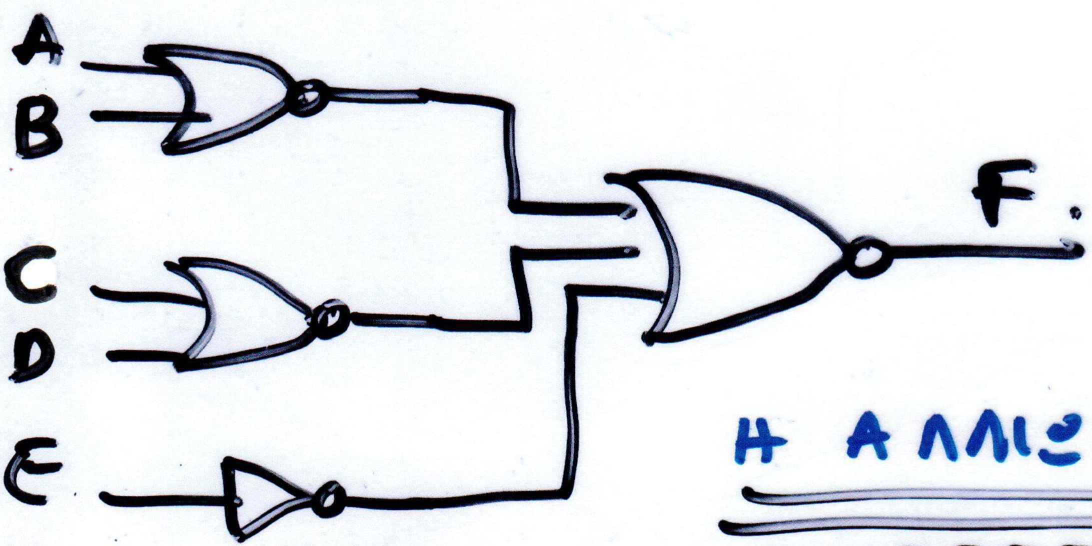
$$F = (A+B)(C+D)E \Rightarrow$$

$$F' = \left[(A+B)(C+D)\cdot E\right]' =$$

$$= (A+B)' + (C+D)' + E'$$

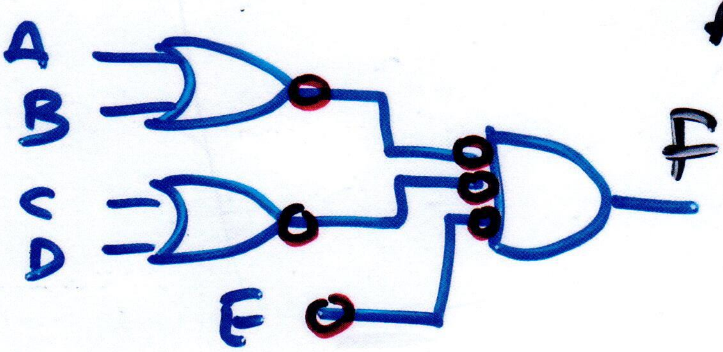
$$\Rightarrow F = \left[(A+B)' + (C+D)' + E'\right]$$

$\Rightarrow$



Η ΑΛΛΙΩΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΕ ΔΙΠΛΕΣ ΑΡΝΗΣΕΙΣ.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΟΛΑ ΜΑΖΙ.

ΦΤΙΑΞΤΕ NOR ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $F(x,y,z)=\Sigma(0,6]$

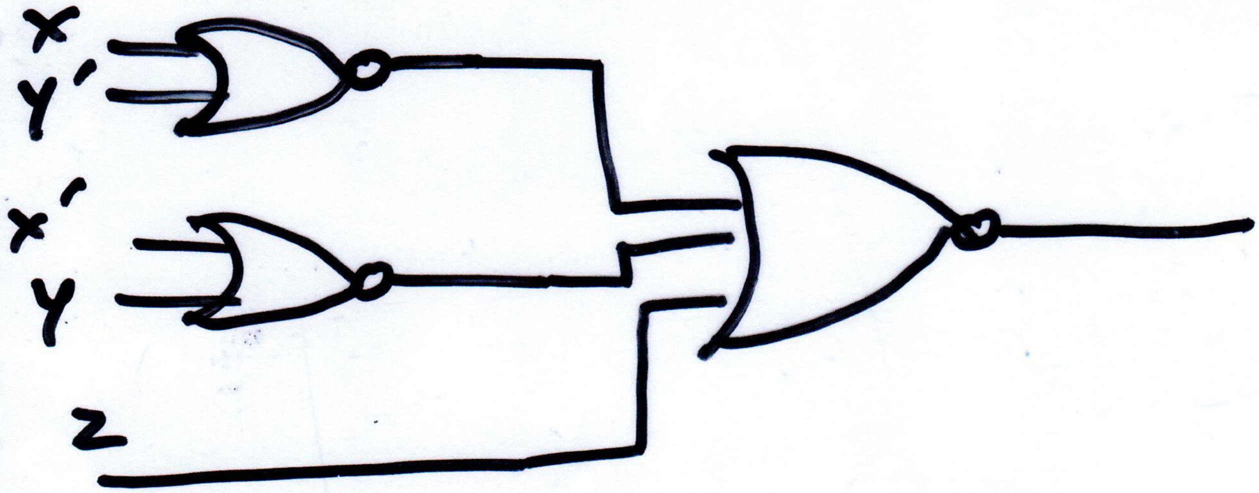
x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1

$F' = x'y + xy' + z$

$\Rightarrow F = (x'y)' \cdot (xy')' z' =$

$= (x+y')(x'+y)z'$

1. ΠΡΩΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ 2. ΔΕΥΤΕΡΟ ΕΠΙΠΕΔ



x	y	B	D
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

B: BORROW

D: DIFFERENCE

$$D = x'y + xy'$$

$$B = x'y$$