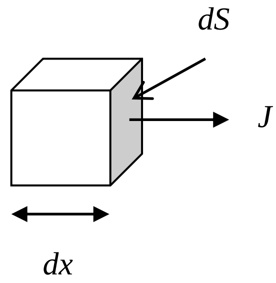
ΚΟΡΕΣΜΕΝΟ ΕΔΑΦΟΣ – ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΟΥ ΛΟΓΩ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ

Ροή μάζας ρύπου $\boldsymbol{J}$ = Μάζα / (χρόνος × επιφάνεια)
= (όγκος × συγκέντρωση) / (χρόνος × επιφάνεια)
= (παροχή × συγκέντρωση) / (επιφάνεια)

Για μονοδιάστατη ροή, η φαινόμενη ταχύτητα είναι $v = Ki$



$\boxed{J = Q\,C / A = v\,C}$, C = συγκέντρωση

Όγκος αναφοράς μήκους dx επιφάνειας dS

<u>Σχόλιο</u>: ίδια έκφραση για ροή ρευστού σε αγωγό ή πορώδες μέσο

Στο έδαφος, συχνά βολεύει να ανάγω τη μάζα διαλυμένης ουσίας σε μοναδιαίο όγκο εδαφικού δείγματος (όχι δηλαδή στον όγκο νερού/κενών στον οποίο ανάγεται η συγκέντρωση):

$$J = \frac{v}{n} \times nC_{Aw} = \bar{v} \times nC_{Aw}, \qquad nC_{Aw} = \frac{V_w}{V} \times \frac{M_A}{V_w}, \qquad V = dx \cdot dS$$

Δηλαδή το γινόμενο (συγκέντρωση × πορώδες) δίνει τη μάζα διαλυμένης ουσίας στο μοναδιαίο όγκο δείγματος.

Ροή μάζας σε εδαφικό δείγμα

$J = \bar{v} \cdot \dfrac{M_A}{dx \cdot dS}$, βλέπουμε δηλαδή και πάλι ότι η ταχύτητα λόγω μεταγωγής ρύπου Α είναι η μέση γραμμική ταχύτητα, άρα καλά υπολογίζουμε το χρόνο άφιξης ρύπου t λόγω μεταγωγής με τη σχέση $t = \dfrac{L}{\bar{v}}$. Από δω και πέρα θα χρησιμοποιώ για τη μέση γραμμική ταχύτητα, $\bar{v}$, τον όρο “ταχύτητα μεταγωγής”.

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΟΥ ΛΟΓΩ ΔΙΑΧΥΣΗΣ (“~~ΛΟΓΩ” ΚΛΙΣΗΣ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ~~)*

1ος Νόμος του Fick (εμπειρικός) σε διάλυμα

(όχι έδαφος ακόμα), 1-D

Μάζα που διαχέεται ανά επιφάνεια, χρόνο $\boxed{J = -D_\delta \dfrac{\partial C}{\partial x}}$

J = ροή μάζας [M/L^2 T]

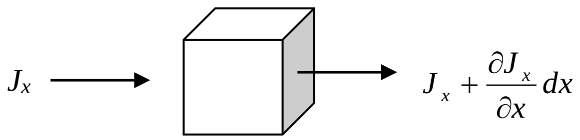
C = συγκέντρωση διαλυμένης ουσίας (ρύπου) [M/L^3]

D_δ = συντελεστής διάχυσης (σε υδατικό διάλυμα) [L^2/T],
δεν έχει μεγάλες διακυμάνσεις: 10^{-9} m^2/s ασφαλής υπόθεση

* Το «αίτιο» της διάχυσης του ρύπου είναι η ακανόνιστη κίνηση των μορίων του. Γι’ αυτό δεν είναι απόλυτα σωστό να πούμε ότι η διάχυση «προκαλείται» από τη διαφορά συγκέντρωσης, αλλά ότι «εκδηλώνεται» όταν υπάρχει διαφορά συγκέντρωσης.

2ος Νόμος του Fick

Εκφράζω **<u>ισοζύγιο μάζας</u> ρύπου** στον όγκο αναφοράς



Διαφορά μάζας στον όγκο αναφοράς $dxdS$ σε χρόνο dt = Εισερχόμενη ροή μάζας μέσω επιφάνειας dS - Εξερχόμενη ροή μάζας μέσω επιφάνειας dS

$$\frac{\partial C}{\partial t}\left[dx \cdot dS\right] = J_x dS - \left(J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx\right) dS = -\frac{\partial J_x}{\partial x} dxdS$$

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D_\delta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

1ος Νόμος του Fick $\boxed{J = -D_e n \frac{\partial C}{\partial x}}$ όπου $D_e = D_\delta \cdot \omega$

στο υπόγειο νερό (ανάγω μάζα ουσίας στον όγκο του εδαφικού δείγματος)

ω = 0.01 έως 0.5
άμμοι: ω = 0.7

Ισοζύγιο μάζας (όγκος διαλύματος στον όγκο αναφοράς = $ndxdS$):

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$ **2ος Νόμος του Fick χωρίς ρόφηση**

Ισοζύγιο μάζας με ρόφηση

Διαφορά <u>διαλυμένης</u> μάζας στον όγκο διαλύματος (του όγκου αναφοράς) = $n\ dx\ dS$ σε χρόνο dt + Διαφορά μάζας <u>ροφημένης</u> στη μάζα έδαφους (του όγκου αναφοράς) = $\rho_d\ dx\ dS$ σε χρόνο dt = Εισερχόμενη ροή μάζας μέσω dS - Εξερχόμενη ροή μάζας μέσω dS

$$\frac{\partial C_{Aw}}{\partial t} ndxdS + \frac{\partial C_{As}}{\partial t} \rho_d dxdS = -\frac{\partial J_x}{\partial x} dxdS$$

Διαφορά ροφημένης μάζας $\frac{\partial C_{As}}{\partial t} \rho_d \cdot dx \cdot dS = \frac{\partial C_{Aw}}{\partial t} K_p \cdot \rho_d \cdot dx \cdot dS$

$\frac{\partial C}{\partial t} ndx \cdot dS + \frac{\partial C}{\partial t} K_p \cdot \rho_d \cdot dx \cdot dS = nD_e \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx \cdot dS$, διαιρώ με πορώδες ($n$)

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t}\left(1 + \frac{K_p \cdot \rho_d}{n}\right) = D_e \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$ **2ος Νόμος του Fick με ρόφηση**

$R = 1 + \frac{K_p \cdot \rho_d}{n}$ = Συντελεστής υστέρησης

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D_e^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \qquad D_e^* = \frac{D_e}{R}}$$

2ος Νόμος του Fick για το υπόγειο νερό (γενική περίπτωση)

Λύση της εξίσωσης μονοδιάστατης διάχυσης για αρχικά καθαρό πεδίο ($C = 0 \quad x > 0$, $t = 0$) και πηγή σταθερής συγκέντρωσης C_o που επιβάλλεται στον χρόνο $t = 0$

$$\boxed{C(x,t) = C_o \cdot erfc \frac{x}{2\sqrt{Dt}}}$$

, D = D_e, D_e^*, ανάλογα με την περίπτωση

erfc = συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος (από πίνακα)

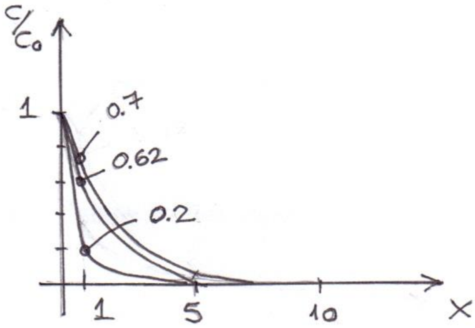
Παράδειγμα: Διάχυση από πηγή συγκέντρωσης C_o σε διάλυμα, σε κορεσμένο έδαφος χωρίς ρόφηση, και σε κορεσμένο έδαφος με ρόφηση

$n = 0.3$

$G_s = 2.65$, $\rho_w = 1$ g/cm^3

$K_p = 1$ L/kg = 1 cm^3/g

$\rho_d = (1-n)\, G_s\, \rho_w = 1.86$ g/cm^3



$$R = 1 + \frac{\rho_d K_p}{n} = 1 + \frac{1.86 \times 1}{0.3} = 7.2$$

$$D_e = \omega D_\delta = 0.7 \times 10^{-9}\, m^2/s = 0.0221\, m^2/y$$

$$D_e^* = \frac{D_e}{R} = 0.0031\, m^2/y$$

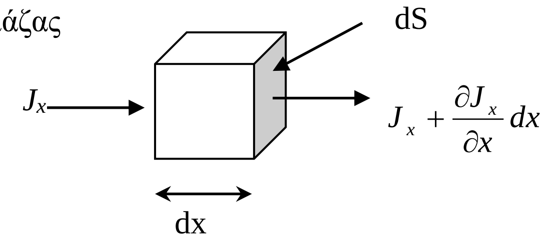
		ΔΙΑΛΥΜΑ		ΕΔΑΦΟΣ, R=1		ΕΔΑΦΟΣ, R=7.2	
x(m)	t(y)	$\frac{x}{2\sqrt{D_\delta t}}$	C/C_o	$\frac{x}{2\sqrt{D_e t}}$	C/C_o	$\frac{x}{2\sqrt{D_e^* t}}$	C/C_o
1	100	0.28	~0.7	0.34	~0.62	0.9	0.2
5	100	1.4	0.05	1.7	0.02	4.5	~0
10	100	2.8	~0	3.4	~0	9	~0

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΟΥ ΛΟΓΩ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΧΥΣΗΣ/ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Τι αλλάζει; Η έκφραση της ροής μάζας ανά επιφάνεια, χρόνο

$\boxed{J_x = v_x \cdot C - nD\frac{\partial C}{\partial x}}$ (όπου με D στο εξής θα συμβολίζουμε τον συνδυασμένο συντελεστή διάχυσης+διασποράς=υδροδυναμικής διασποράς)

Ισοζύγιο μάζας



$$\frac{\partial(CndxdS)}{\partial t} + \frac{\partial(C_s\rho_d dxdS)}{\partial t} = J_x dS - \left(J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x}dx\right)dS$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}\left(\frac{n}{n} + \frac{K_p\rho_d}{n}\right) = -\frac{v}{n}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{n}{n}D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial t}\frac{R}{R} = -\frac{\bar{v}}{R}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{D}{R}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Εξίσωση μεταφοράς ρύπου λόγω μεταγωγής – υδροδυναμικής διασποράς (= διάχυσης+διασποράς)

$$\boxed{D^*\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}^*\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}}$$

<u>Λύση της εξίσωσης μεταφοράς</u> ρύπου λόγω μεταγωγής – διάχυσης/διασποράς για (1) $C = Co$, $x = 0$, $t \geq 0$, (2) $C = 0$, $t = 0$, $x > 0$, (3) $C = 0$, $t \geq 0$, $x = \infty$

$$\boxed{\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\left[erfc\left(\frac{x - \bar{v}^* t}{2\sqrt{D^* t}}\right) + e^{\frac{\bar{v}^* x}{D^*}} \cdot erfc\left(\frac{x + \bar{v}^* t}{2\sqrt{D^* t}}\right)\right]}$$

για $\frac{\bar{v}x}{D} > 10 - 100$: ο δεύτερος όρος μπορεί να αγνοηθεί

: η συγκέντρωση $0.5C_o$ εμφανίζεται στον χρόνο άφιξης ρύπου λόγω μεταγωγής

Ο λόγος $\frac{\bar{v} \cdot x}{D}$ εκφράζει το σχετικό μέγεθος της συμβολής των φαινομένων μεταφοράς

$D = D_{διάχυσης} + D_{μηχ.\ διασποράς} = D_e + \alpha_L\bar{v}$,
όπου α_L = συντελεστής διαμήκους μηχανικής διασποράς (εξαρτάται από κλίμακα, συχνά λαμβάνεται α_L = 0.1x)

ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Τιμές της συνάρτησης σφάλματος *erf(α)*
και της συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος *erfc(α)*, για θετικές τιμές *α*

α	*erf(α)*	*erfc(α)*	*α*	*erf(α)*	*erfc(α)*
0	0	1.0	1.1	0.880205	0.119795
0.05	0.056372	0.943628	1.2	0.910314	0.089686
0.1	0.112463	0.887537	1.3	0.934008	0.065992
0.15	0.167996	0.832004	1.4	0.952285	0.047715
0.2	0.222703	0.777297	1.5	0.966105	0.033895
0.25	0.276326	0.723674	1.6	0.976348	0.023652
0.3	0.328627	0.671373	1.7	0.983790	0.016210
0.35	0.379382	0.620618	1.8	0.989091	0.010909
0.4	0.428392	0.571608	1.9	0.992790	0.007210
0.45	0.475482	0.524518	2.0	0.995322	0.004678
0.5	0.520500	0.479500	2.1	0.997021	0.002979
0.55	0.563323	0.436677	2.2	0.998137	0.001863
0.6	0.603856	0.396144	2.3	0.998857	0.001143
0.65	0.642029	0.357971	2.4	0.999311	0.000689
0.7	0.677801	0.322199	2.5	0.999593	0.000407
0.75	0.711156	0.288844	2.6	0.999764	0.000236
0.8	0.742101	0.257899	2.7	0.999866	0.000134
0.85	0.770668	0.229332	2.8	0.999925	0.000075
0.9	0.796908	0.203092	2.9	0.999959	0.000041
0.95	0.820891	0.179109	3.0	0.999978	0.000022
1.0	0.842701	0.157299			

$$erf(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon$$

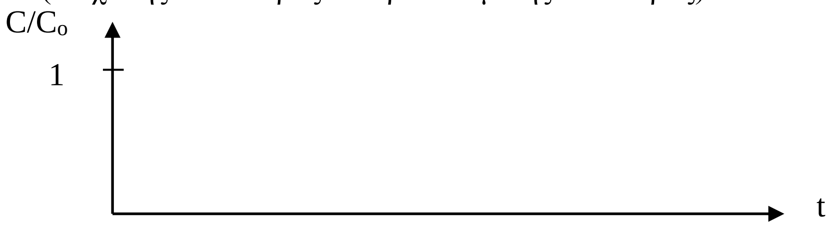
$$erfc(a) = 1 - erf(a)$$

$$erf(-a) = -erf(a)$$

$$erfc(-a) = 1 - erf(-a) = 1 + erf(a) = 1 + 1 - erfc(a) = 2 - erfc(a)$$

Διαγράμματα συγκεντρώσεων (συμπληρώστε)

Συγκέντρωση συναρτήσει του χρόνου για κάποια απόσταση από την πηγή $x \neq 0$, χωρίς ρόφηση (= χωρίς υστέρηση), λόγω (α) μεταγωγής, (β) μεταγωγής + (διάχυσης+διασποράς = υδροδυναμικής διασποράς)



Συγκέντρωση συναρτήσει του χρόνου για κάποια απόσταση από την πηγή $x \neq 0$, με ρόφηση (= με υστέρηση), λόγω (α) μεταγωγής, (β) μεταγωγής + υδροδυναμικής διασποράς

Συγκέντρωση συναρτήσει της απόστασης για $t \neq 0$, χωρίς ρόφηση (= χωρίς υστέρηση), λόγω (α) μεταγωγής, (β) μεταγωγής + υδροδυναμικής διασποράς

Συγκέντρωση συναρτήσει της απόστασης για $t \neq 0$, με ρόφηση (= με υστέρηση), λόγω (α) μεταγωγής, (β) μεταγωγής + υδροδυναμικής διασποράς