

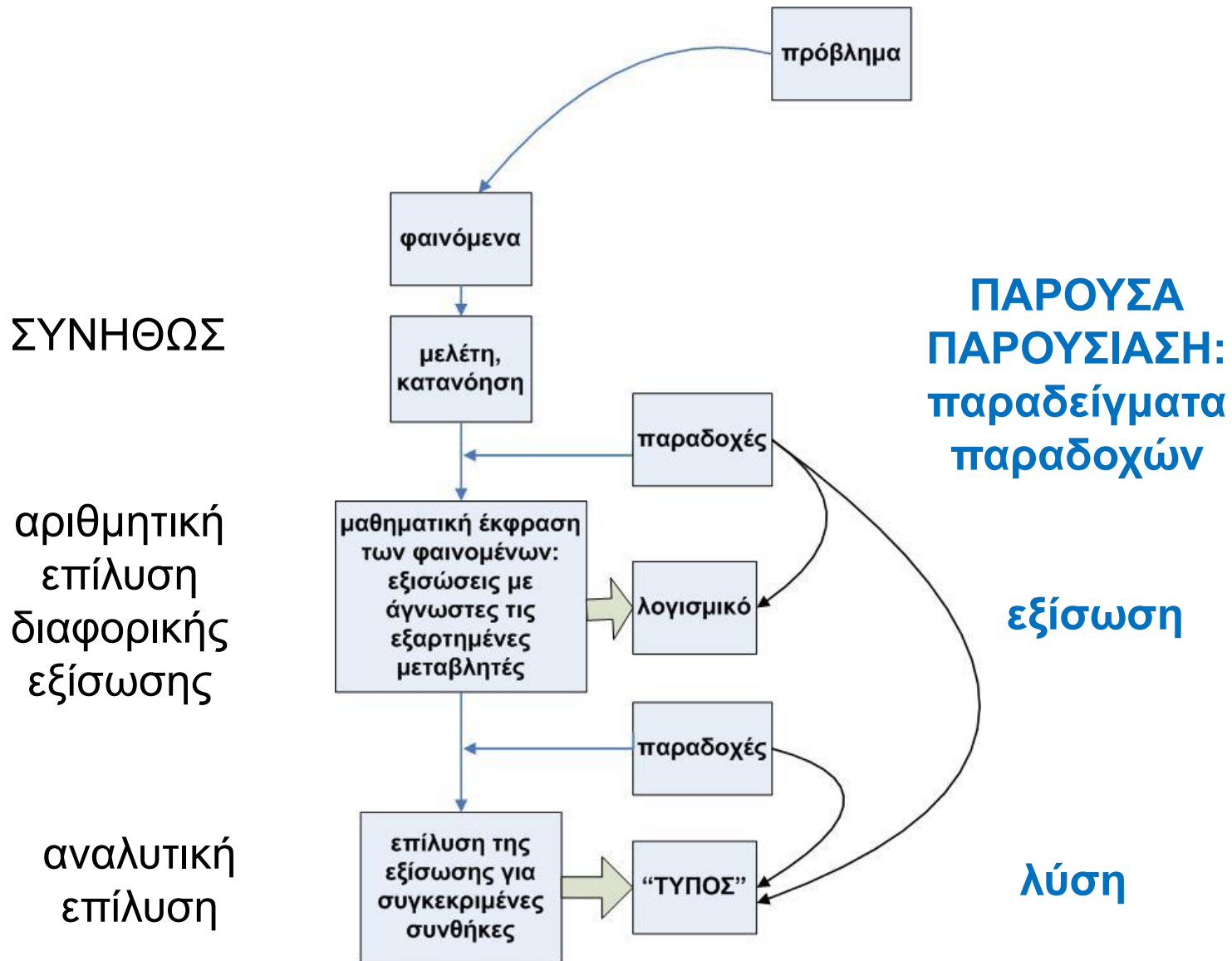
Μεταφορά διαλυμένου ρύπου σε κορεσμένο έδαφος: Μαθηματική περιγραφή

Βασικό ερώτημα:
Πού θα πάει ο ρύπος;

Παρουσίαση 4 από 4
Γενική εξίσωση μεταφοράς και
επιμέρους αναλυτικές λύσεις

Επίλυση προβλημάτων (μεταφοράς): Αποφάσεις

- Επιλογή αριθμητικού κώδικα
 - ποιες εξισώσεις λύνει ο κώδικας;
 - υπό ποιες συνθήκες / για ποιες παραδοχές ισχύουν οι εξισώσεις;
- Επιλογή αναλυτικής λύσης της εξίσωσης μεταφοράς
 - Για ποιες **επιπλέον παραδοχές** ισχύει η λύση (συνήθως: απλοποίηση γεωμετρίας, αγνόηση φαινομένων)



Γενική περίπτωση/εξίσωση μεταφοράς (χωρίς υποβάθμιση)

☞ Μεταφορά σε 3 διαστάσεις

☞ Ροή σε 3 διαστάσεις

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} - \bar{v}_y \frac{\partial C}{\partial y} - \bar{v}_z \frac{\partial C}{\partial z} = R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (1)$$

Ειδικές περιπτώσεις

- ☞ Μονοδιάστατη ροή (x), μονοδιάστατη μεταφορά (x) (παράδειγμα εφαρμογής;)

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2)$$

- ☞ Πρόκειται για την λύση που ήδη μελετήσαμε.
Παράδειγμα: εδαφική στήλη, ακριβής όταν το μέτωπου ρύπου είναι μακριά από τη διατομή εξόδου

Ειδικές περιπτώσεις (συν.)

☞ Μονοδιάστατη ροή (x), διδιάστατη μεταφορά
(x, y) (παράδειγμα;)

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (3)$$

D_x, D_y = συντελεστές διάχυσης /διασποράς (υδροδυναμικής διασποράς)

$$D_x = \alpha_L \bar{v}_x + D_e, \quad D_y = \alpha_T \bar{v}_x + D_e$$

α_L = συντελεστής διαμήκους μηχανικής διασποράς ($\alpha_L = 0.1x$)

α_T = συντελεστής εγκάρσιας μηχανικής διασποράς

$$\alpha_T < \alpha_L, \quad \alpha_T = \left(\frac{1}{20} \varepsilon \omega \zeta \frac{1}{5} \right) \times \alpha_L$$

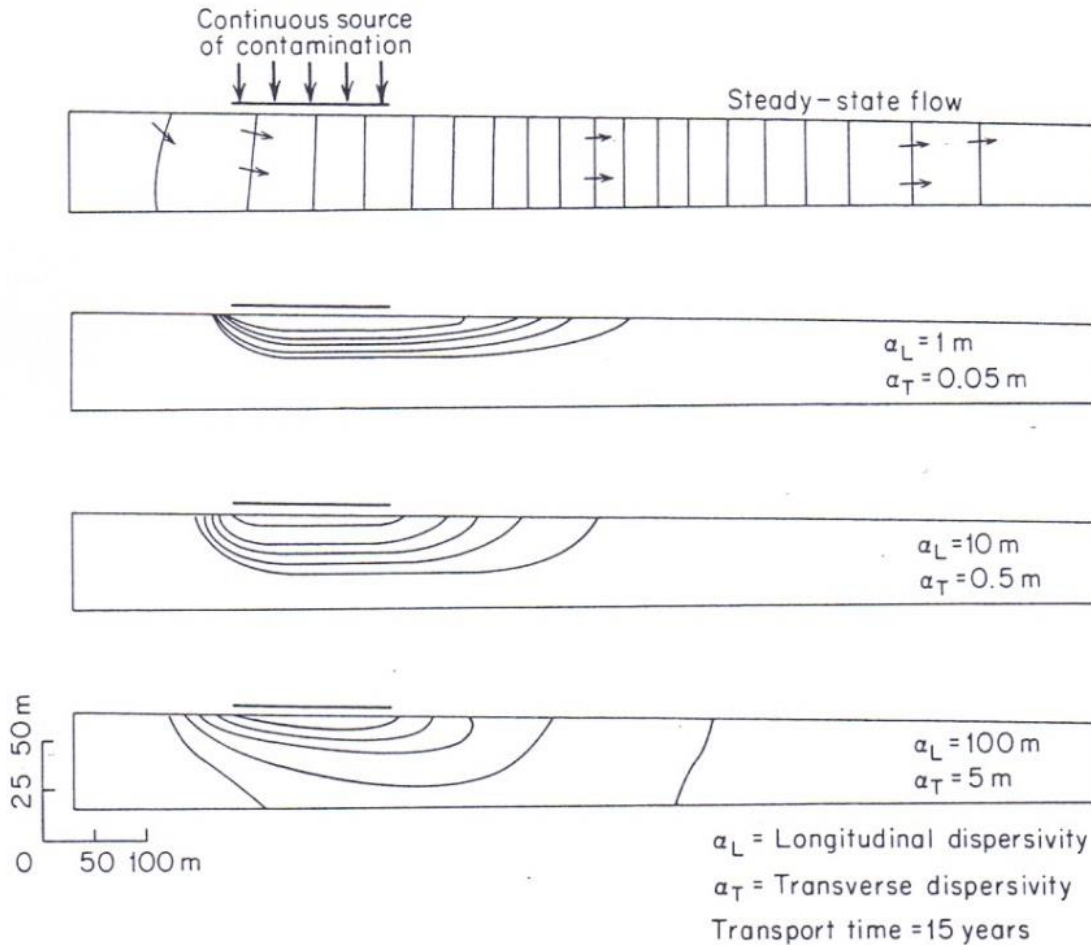


Figure 9.10 Dispersion of a contaminant during transport in a shallow groundwater flow system. Porosity 30%; hydraulic conductivity 0.5 m/day; $\alpha_l/\alpha_t = 20$; transport time 15 years; concentration contours at $C/C_0 = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3,$ and 0.1 (after Pickens and Lennox, 1976).

Απεικόνιση μιας πιθανής λύσης της εξίσωσης (3) (TOMH)

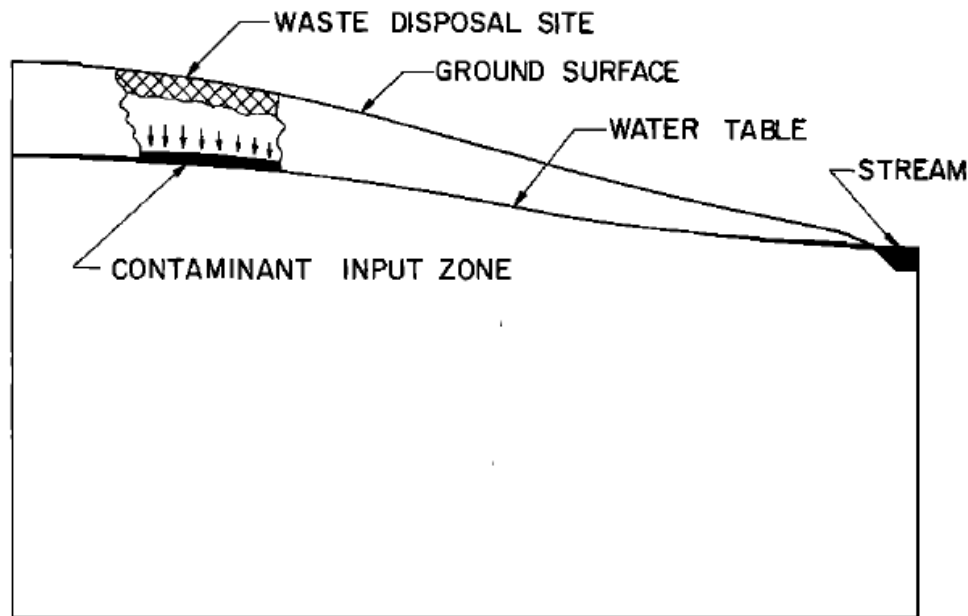
$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (3)$$

Pickens &
Lennox (1976)

ή

Freeze &
Cherry (1979)?

Ποιο πραγματικό πρόβλημα αντιστοιχεί στη λύση της προηγούμενης διαφάνειας;



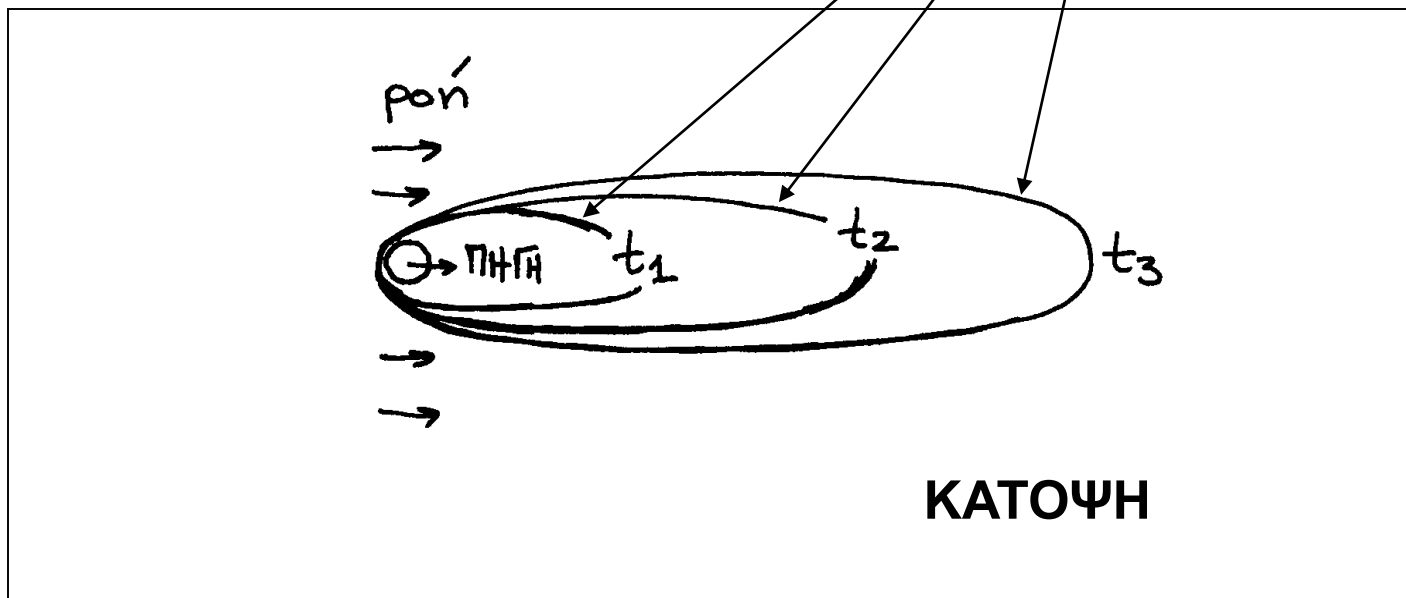
Pickens &
Lennox (1976)

Fig. 2. A schematic representation of groundwater contamination in a cross section of a groundwater flow system.

Απεικόνιση μιας άλλης πιθανής λύσης της (3)

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (3)$$

περιβάλλουσα
ρυττασμένης
περιοχής σε
χρόνους t_i



Η πηγή παραμένει ενεργή τουλάχιστον ως τον χρόνο t_3

Ειδικές περιπτώσεις (συν.)

☞ Μονοδιάστατη μεταφορά-ροή & υποβάθμιση πρώτης τάξης

$$D_x^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x^* \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (4), \quad D_x^* = \frac{D_x}{R}, \quad \bar{v}_x^* = \frac{\bar{v}_x}{R}$$

Υποθέτω υποβάθμιση (μείωση μάζας λόγω αντιδράσεων) πρώτης τάξης:

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C \rightarrow \int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = -\lambda \int_{t=0}^t dt \rightarrow \ln \frac{C}{C_0} = -\lambda t$$

$$\lambda = \ln 2 / T,$$

T = χρόνος ημιζωής
= χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί η συγκέντρωση από C σε $C/2$

**Ερώτηση κατανόησης: Σύγκριση λύσεων (4) – (2)
(δηλ. ποια η αναμενόμενη διαφορά στο προφίλ
συγκεντρώσεων με – χωρίς υποβάθμιση;)**

$$D_x^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x^* \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (4)$$



Ειδικές περιπτώσεις (συν.)

- ☞ Μονοδιάστατη ροή (x), μονοδιάστατη μεταφορά (x) - συνθήκες μόνιμης μεταφοράς.

Παράδειγμα: στο περιορισμένο πεδίο μεταφοράς πυθμένα στεγάνωσης ΧΥΤΑ, η ανάντη παρειά έχει σταθερή συγκέντρωση στραγγίσματος, το ίδιο υποθέτω και για την κατόντη παρειά: πχ μπορώ να υποθέσω απλοποιητικά $C=0$ αν οι συνθήκες στο φυσικό έδαφος δικαιολογούν γρήγορη απομάκρυνση του ρύπου

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

- ☞ Μονοδιάστατη ροή (x), διδιάστατη μεταφορά (y: λόγω υδροδυναμικής διασποράς, x: λόγω μεταγωγής) - συνθήκες μόνιμης μεταφοράς

$$D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Αναλυτικές λύσεις εξισώσεων μεταφοράς

Εξίσωση (1), για μονοδιάστατη ροή και τριδιάστατη μεταφορά

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (7)$$

Λύση της Εξίσωσης (7), για σημειακή πηγή ($x = y = z = 0$) που εκλύει τη χρονική στιγμή $t=0$ μάζα ρύπου $M (= V_o C_o)$

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{8n(\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{X^2}{4D_x t} - \frac{Y^2}{4D_y t} - \frac{Z^2}{4D_z t}\right)$$

$$\text{για } X = x - \bar{v}_x t, \quad Y = y, \quad Z = z$$

$$D_x = \alpha_L \bar{v}_x + D_e, \quad D_y = D_z = \alpha_T \bar{v}_x + D_e$$

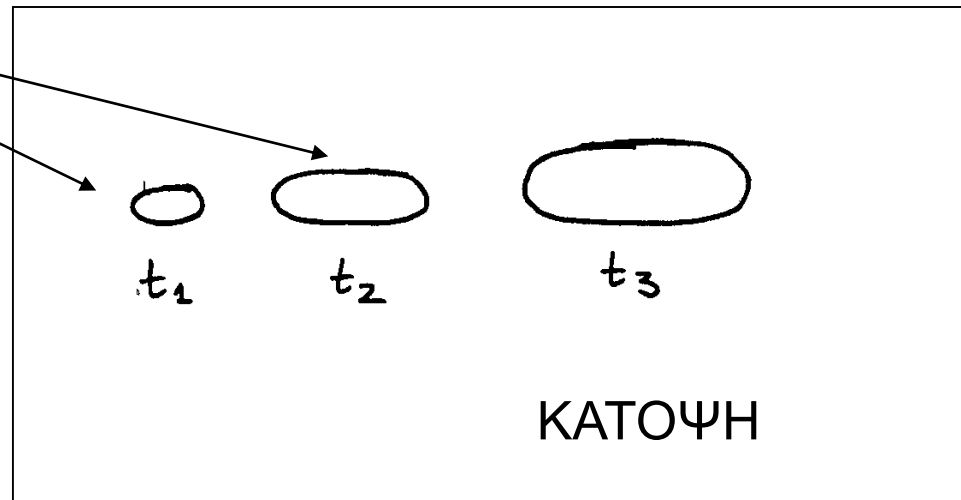
Γραφική απεικόνιση της ρυπασμένης περιοχής (πρακτικά όπου $C >$ όριο ανίχνευσης)

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{8n(\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{X^2}{4D_x t} - \frac{Y^2}{4D_y t} - \frac{Z^2}{4D_z t}\right)$$

με $X = x - \bar{v}_x t, \quad Y = y, \quad Z = z$

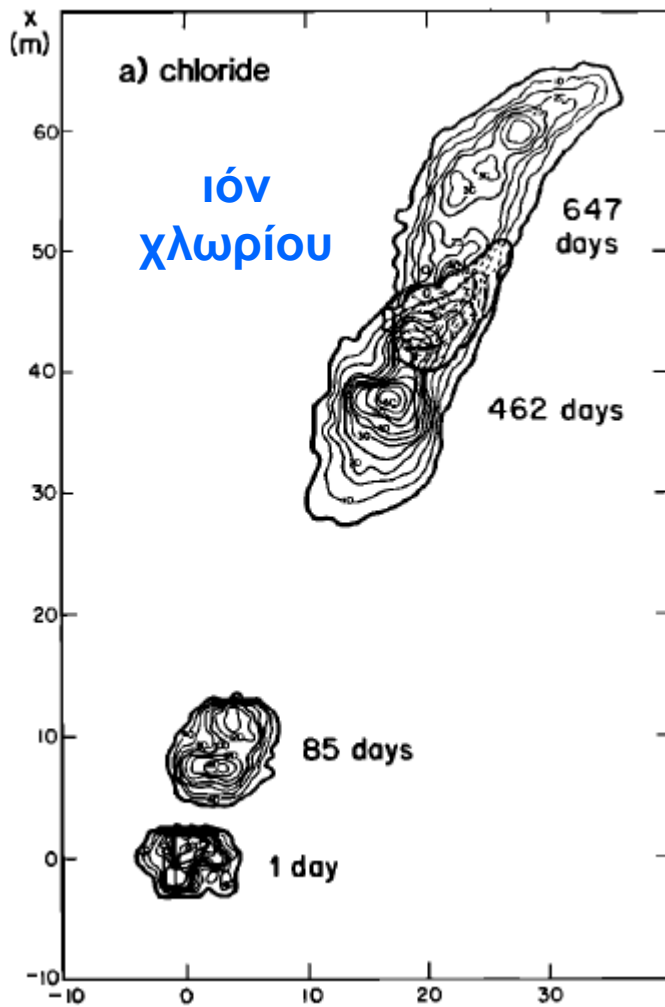
περιβάλλουσα
ρυπασμένης
περιοχής σε
χρόνους t_i

Συγκρίνατε με την
εικόνα της
ρυπασμένης περιοχής
στη διαφάνεια 9!



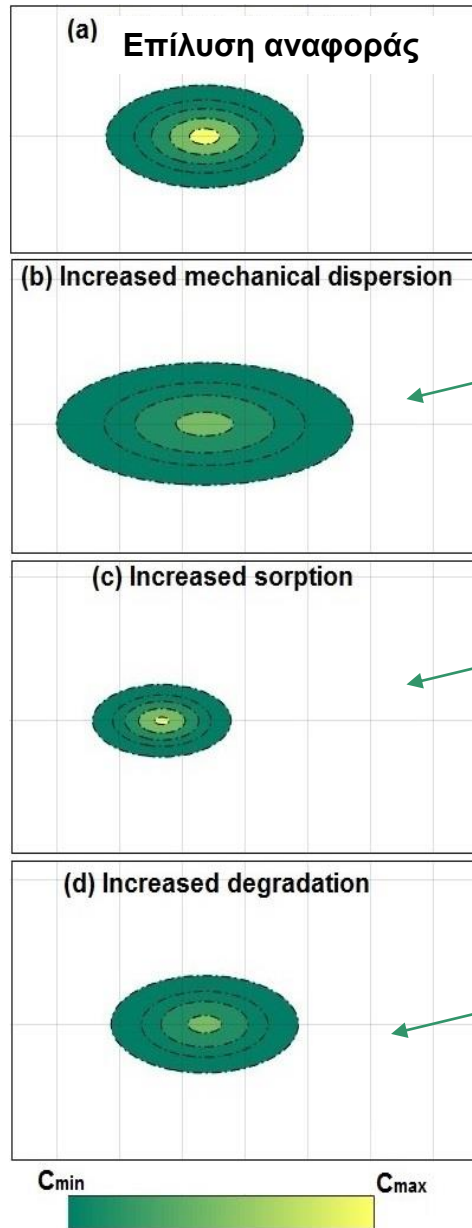
Σχόλιο: εδώ μια λύση με μεταγωγή μόνο δίνει καλή προσέγγιση του κέντρου βάρους της ρύπανσης

Εισπνεσθείσες ουσίες: εξάπλωση στον χώρο Borden



Mackay et al. 1986

Συμβολή μηχανισμών (λύση Εξ. 7)



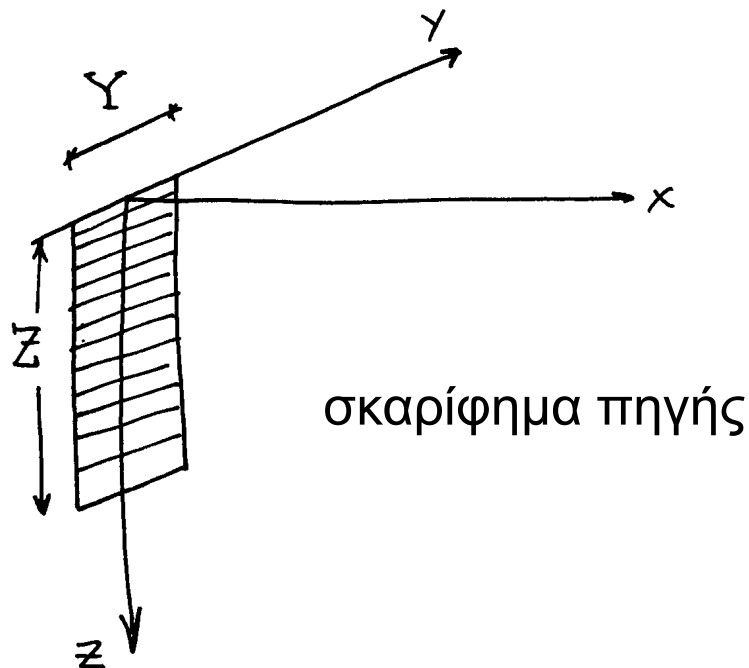
Αποτελέσματα **αυξημένης**:

- **διασποράς** (ίδιο κέντρο μάζας, μεγαλύτερη εξάπλωση, μικρότερη τιμή μέγιστης συγκέντρωσης)
- **ρόφησης** (καθυστερημένο κέντρο μάζας, μικρότερη εξάπλωση, μικρότερη τιμή μέγιστης συγκέντρωσης)
- **αποδόμησης** (ίδιο κέντρο μάζας, μικρότερη εξάπλωση, μικρότερη τιμή μέγιστης συγκέντρωσης)

Εξίσωση (1), για μονοδιάστατη ροή και τριδιάστατη μεταφορά

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (7)$$

Λύση της Εξίσωσης (7), για πηγή πεπερασμένων διαστάσεων, Z_π και Y_π , στο $x = 0$, και με σταθερή συγκέντρωση C_o



Εξίσωση (1), για μονοδιάστατη ροή και τριδιάστατη μεταφορά

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (7)$$

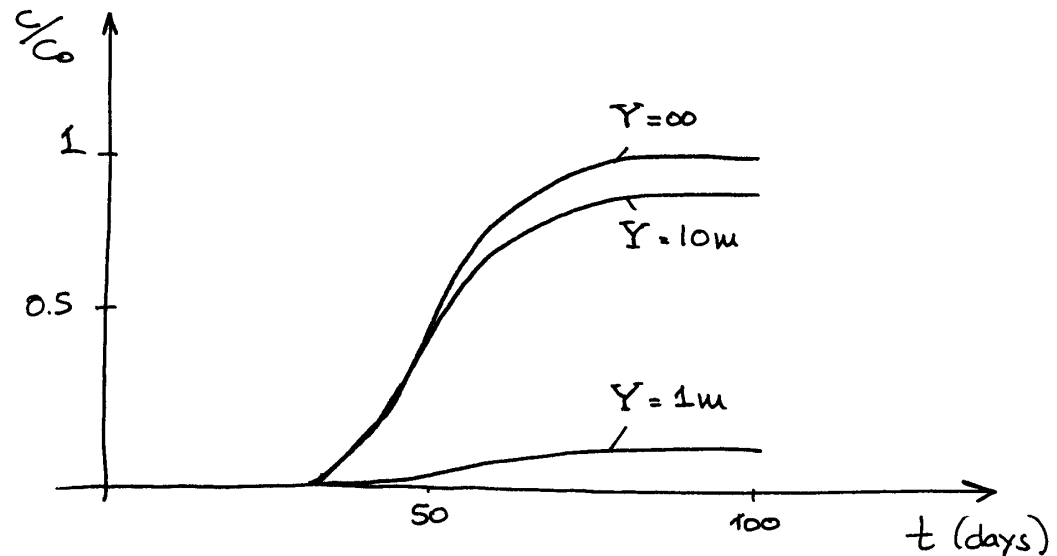
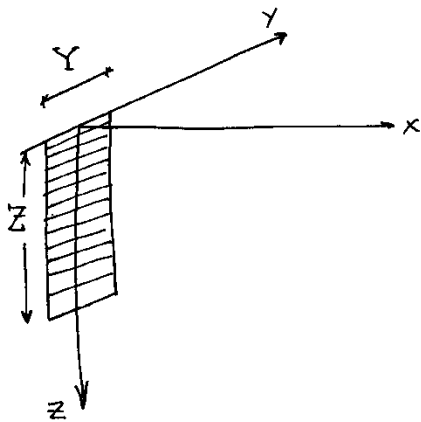
Λύση της Εξίσωσης (7), για πηγή πεπερασμένων διαστάσεων, Z_π και Y_π , στο $x = 0$, και με σταθερή συγκέντρωση C_o

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_o}{8} \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{x - \bar{v}t}{2\sqrt{D_x t}} \right] \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{y + Y_\pi/2}{2\sqrt{D_y t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y - Y_\pi/2}{2\sqrt{D_y t}} \right) \right\} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{z + Z_\pi}{2\sqrt{D_z t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{z - Z_\pi}{2\sqrt{D_z t}} \right) \right\}$$

όπου $D_x = \alpha_L \bar{v}_x$, $D_y = D_z = \alpha_T \bar{v}_x$

Σύγκριση λύσεων για διαφορετικά Y_{π}

σκαρίφημα πηγής



Συγκεντρώσεις στη θέση $x=50\text{m}$,
 $y=z=0\text{m}$ για διαφορετικά πλάτη πηγών
 Y_{π} , για $Z_{\pi} = 10\text{m}$

Εξίσωση (4), μονοδιάστατη μεταφορά-ροή & υποβάθμιση
 πρώτης τάξης διαλυμένου ρύπου + ροφημένου ρύπου

$$D_x^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x^* \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (4), \quad D_x^* = \frac{D_x}{R}, \quad \bar{v}_x^* = \frac{\bar{v}_x}{R}$$

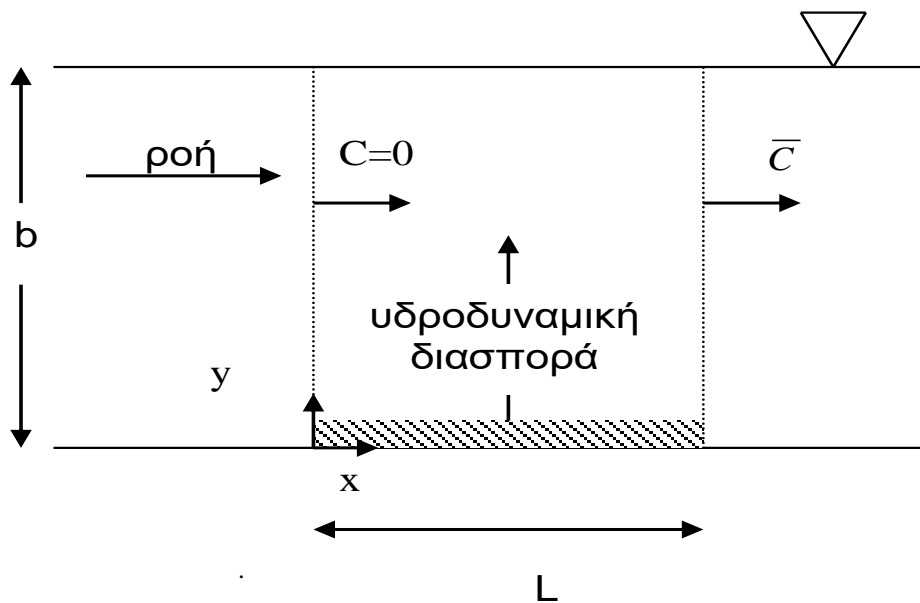
Λύση της Εξίσωσης (4), για αρχικά καθαρό έδαφος, για
 σταθερής έντασης πηγή, για καθαρό έδαφος σε άπειρη
 απόσταση

$$C = \frac{C_o}{2} \exp\left(\frac{\bar{v}_x x}{2D_x^*}\right) \left[e^{-x\beta} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_x^* t}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{v}_x^{*2}}{4D_x^*} + \lambda\right)t}\right) + e^{x\beta} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_x^* t}} + \sqrt{\left(\frac{\bar{v}_x^{*2}}{4D_x^*} + \lambda\right)t}\right) \right]$$

όπου
$$\beta = \frac{1}{2D_x^*} \sqrt{\bar{v}_x^{*2} + 4\lambda D_x^*}$$

Εξίσωση (6), Μονοδιάστατη ροή (x), διδιάστατη μεταφορά (y: λόγω υδροδυναμικής διασποράς, x: λόγω μεταγωγής) - συνθήκες μόνιμης μεταφοράς

$$D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (6)$$



Βρίσκεται λύση στο σημείο $x = L$, που όταν ολοκληρώνεται σε όλο το βάθος του υδροφορέα b δίνει

$$\frac{\bar{C}(L, b)}{S} = \frac{1 - e^{-w^2}}{w\sqrt{\pi}} + \operatorname{erfc}(w), \quad w = \frac{b}{2\sqrt{D_y L / \bar{v}_x}}, \quad D_y = D_e + \alpha_T \bar{v}_x$$

Κάποιες διαθέσιμες λύσεις στο διαδίκτυο

- Ελευθέρως διαθέσιμες εκπαιδευτικές εφαρμογές
 - http://hydrolab.illinois.edu/gw_applets/
- Για τις εξής περιπτώσεις
 - Μονοδιάστατη ροή και μεταφορά, στιγμιαία ισορροπία (εκ)ρόφησης, πηγή συνεχούς ή πεπερασμένης διάρκειας, συνοριακή συνθήκη: σταθερή συγκέντρωση στην πηγή, χωρίς υποβάθμιση
 - Μονοδιάστατη ροή και μεταφορά, πηγή πεπερασμένης διάρκειας, στιγμιαία ισορροπία (εκ)ρόφησης, συνοριακή συνθήκη: σταθερή ροή μάζας στην πηγή, με (ή χωρίς) υποβάθμιση
 - Μονοδιάστατη ροή και μεταφορά, μοντελοποίηση (εκ)ρόφησης ως δυναμικού φαινομένου, πηγή συνεχούς ή πεπερασμένης διάρκειας, συνοριακή συνθήκη: σταθερή συγκέντρωση στην πηγή, με υποβάθμιση (ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ)
 - Μονοδιάστατη ροή, διδιάστατη μεταφορά, στιγμιαία ισορροπία (εκ)ρόφησης, πηγή-λωρίδα συνεχούς διάρκειας, συνοριακή συνθήκη: σταθερή συγκέντρωση στην πηγή, με υποβάθμιση
 - Μονοδιάστατη ροή, τριδιάστατη μεταφορά, στιγμιαία ισορροπία (εκ)ρόφησης, πηγή-παραλληλόγραμμο συνεχούς διάρκειας, συνοριακή συνθήκη: σταθερή συγκέντρωση στην πηγή, με υποβάθμιση

Συμπερασματικά σχόλια

- **ΤΑ ΚΑΛΑ ΝΕΑ:** Ποικιλία διαθέσιμων αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης μεταφοράς
- **ΤΑ ΟΧΙ ΤΟΣΟ ΚΑΛΑ ΝΕΑ:** Για να ισχύουν οι λύσεις, απαιτούνται σημαντικές παραδοχές, πχ
 - Πηγή σταθερής έντασης, άπειρης διάρκειας
 - ρεαλιστική παραδοχή μόνο για ύπαρξη NAPL, αντιμετωπίζεται μαθηματικά με επαλληλία
 - Στιγμιαία επίτευξη ισορροπίας κατά τη ρόφηση-εκρόφηση
 - περίπλοκη η μαθηματική αντιμετώπιση της μη στιγμιαίας ισορροπίας
 - Σταθερές τιμές των παραμέτρων στον χρόνο
 - συχνά δεν ισχύει για χρόνους ημιζωής, πχ αν σωθεί το οξυγόνο από τον υδροφορέα, θα επιβραδυνθεί η αποδόμηση ρύπων που αποδομούνται εύκολα υπό αερόβιες συνθήκες (πχ βενζόλιο)

Με όσα έμαθα, τι μπορώ να κάνω;

(ποιοι οι μαθησιακοί στόχοι της ενότητας μεταφοράς;)

- Μπορώ να εκτιμήσω τη σχετική συμβολή των φαινομένων μεταφοράς για συγκεκριμένους συνδυασμούς ρύπων, εδαφών και χαρακτηριστικών πεδίων ροής & μεταφοράς
- Έχω εξοικείωση με αναζητήσεις στη βιβλιογραφία για τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος μεταφοράς
- Μπορώ να προτείνω τεκμηριωμένα τις τιμές των παραμέτρων που απαιτεί η επίλυση του προβλήματος μεταφοράς
- Γνωρίζω μια ποικιλία αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης μεταφοράς και αναγνωρίζω τα όρια ισχύος της κάθε μιας
- Μπορώ να επιλέξω από μια ποικιλία αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης μεταφοράς αυτήν που θα ταιριάζει καλύτερα στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός προβλήματος και στην αναμενόμενη συμβολή των φαινομένων μεταφοράς στο συγκεκριμένο πρόβλημα

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Mackay, D.M., D.L. Freyberg and P.V. Roberts, 1986, A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer 1. Approach and overview of plume movement, Water Resources Research, 22:13:2017-2029
- Pickens, J.F. and W.C. Lennox, 1976, Numerical Simulation of Waste Movement in Steady Groundwater Flow Systems, Water Resources Research, Vol. 12, No. 2, 171-180.
- **ή (αν δεν έχω διαβάσει/δεν μπόρεσα να βρω το άρθρο των Pickens & Lennox)**
- Pickens, J.F. and W.C. Lennox, 1976, Numerical Simulation of Waste Movement in Steady Groundwater Flow Systems, Water Resources Research, Vol. 12, No. 2, 171-180, αναφέρεται στους Freeze, R.A. and J.A. Cherry, 1979, Groundwater, Prentice Hall.