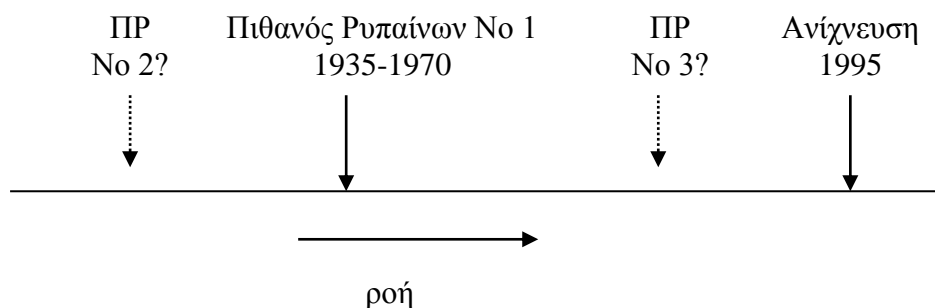


Το πρόβλημα

Στην προσπάθεια να αποδοθούν ευθύνες (για να μοιραστεί αντίστοιχα το κόστος αποκατάστασης) διερευνάται κατά πόσον ο «Πιθανός Ρυπαίνων Νο 1» μπορεί να ευθύνεται για ανίχνευση ρύπου στα κατάντη.



Η άσκηση

Σε υδατικό δείγμα από ένα δειγματοληπτικό φρέαρ βρίσκεται το 1995 ρύπος σε συγκέντρωση 3500 $\mu\text{g/l}$. Σε απόσταση 1830m ανάντη του φρέατος βρίσκεται εργοστάσιο το οποίο πιθανολογείται ότι ευθύνεται για τη ρύπανση. Με δεδομένα ότι (α) το εργοστάσιο λειτουργεί μεν συνέχεια από το 1935, αλλά από το 1970 και μετά ελήφθησαν μέτρα ασφαλείας που καθιστούν ελάχιστα πιθανή τη διαρροή του ρύπου στο υπέδαφος και ότι (β) κατά το χρονικό διάστημα 1935-1970 είναι δυνατό να υποθέσουμε μια σταθερή, μέση συγκέντρωση ρύπου στο υπόγειο νερό στη θέση της πηγής (του εργοστασίου δηλαδή) ίση με $C_0 = 5000 \mu\text{g/l}$, εξετάσατε αν η συγκέντρωση στο φρέαρ μπορεί πράγματι να είναι αποτέλεσμα διαρροής στο εργοστάσιο.

$$\text{Δίδονται: } \frac{\bar{v}}{R} = 0,21 \frac{\text{m}}{\eta\mu} = 78 \frac{\text{m}}{\text{ετος}} \quad \text{και} \quad \frac{D}{R} = 7 \frac{\text{m}^2}{\eta\mu} = 2543 \frac{\text{m}^2}{\text{ετος}}$$

Τι υπολογιστική δυσκολία έχει αυτή η άσκηση? Η πηγή της συνοριακής συνθήκης είναι ενεργή για πεπερασμένο χρόνο \Rightarrow επαλληλία!

Τι έχουμε να προσέξουμε σ' αυτήν την άσκηση:

Πως μιας και ο υπολογισμός της συγκέντρωσης αναφέρεται σε χρόνο μεταγενέστερο της παύσης λειτουργίας της πηγής, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατ'ευθείαν τη γνωστή λύση της εξίσωσης μεταφοράς του ρύπου, γιατί αυτή ισχύει μόνο για συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες, οι οποίες περιλαμβάνουν και τη συνθήκη της σταθερής συγκέντρωσης στην πηγή. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας για δύο πηγές, επειδή η εξίσωση μεταφοράς λόγω διάχυσης-διασποράς είναι γραμμική: (I) μία που είναι ενεργή το 1935-1995 με συγκέντρωση $C_0 = 5000 \mu\text{g/l}$ και (II) μία δεύτερη που είναι ενεργή το 1970-1995 με "αρνητική" συγκέντρωση $C_0 = -5000 \mu\text{g/l}$ (προφανώς πρόκειται για κάποια μαθηματική "μανούβρα", η οποία δεν έχει φυσικό ανάλογο, αλλά μας δίνει τη σωστή λύση).

Πρώτα θα ελέγξω αν μπορώ να αγνοήσω το δεύτερο όρο της εξίσωσης

$$\frac{\bar{v}x}{D} = \frac{0,21 \times 1830}{7} = 55 \quad \text{όλα καλά!}$$

Πηγή (I) ενεργή για 60 χρόνια (1935-1995)

$$\begin{aligned} \frac{C_I(x,t)}{C_0} &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - \frac{\bar{v}}{R}t}{2\sqrt{\frac{D}{R}t}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1830m - 78 \frac{m}{\text{ετος}} \times 60\text{ετη}}{2\sqrt{2543 \frac{m^2}{\text{ετος}} \times 60\text{ετη}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-3,64) = \frac{1}{2} [2 - \operatorname{erfc}(3,64)] \cong 1 \rightarrow C_I(1830,60) = 5000 \mu\text{g/l} \end{aligned}$$

Πηγή (II) ενεργή για 25 χρόνια (1970-1995)

$$\begin{aligned} \frac{C_{II}(1830m, 25\text{ετη})}{-5000 \mu\text{g/l}} &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1830 - 78 \times 25}{2\sqrt{2543 \times 25}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-0,234) \\ &= 0,625 \rightarrow C_{II}(1830,25) = -3125 \mu\text{g/l} \end{aligned}$$

Υποθέτοντας λοιπόν ότι ευθύνεται το εργοστάσιο, υπολογίζουμε ότι η ολική συγκέντρωση στο φρέαρ είναι ίση με:

$$C(\text{φρέαρ}, 1995) = C_I + C_{II} = 5000 - 3125 = \underline{1875 \mu\text{g/l}}$$

Αυτή η τιμή είναι αρκετά μικρότερη αυτής που μετρήθηκε. Επί πλέον, στο πραγματικό τριδιάστατο πεδίο μεταφοράς του ρύπου, η συγκέντρωση θα είναι ακόμα μικρότερη από την τιμή που βρήκαμε για μονοδιάστατη μεταφορά. Άρα ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι δεν ευθύνεται το εργοστάσιο, τουλάχιστον όχι αποκλειστικά. Βέβαια οι υπολογισμοί μας περιέχουν αρκετές αβεβαιότητες, οπότε σε μια πραγματική περίπτωση μάλλον θα χρειαστούν πρόσθετα στοιχεία, υπολογισμοί και επί τόπου μελέτες.