Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο A, $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. (Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση 1-1 από το A στο δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}(A)$, αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση 1-1 και επί).

Παρατηρήστε ότι σ' αυτήν την περίπτωση, μπορεί κανείς να ορίσει αναδρομικά μια ακολουθία $A_1, A_2, \ldots$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$A_1 = \mathbb{N}$$
$$A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n)$$

Προφανώς τότε (με επαγωγή) κάθε A_n είναι άπειρο σύνολο και $|A_{n+1}| > |A_n|$.

Λύση. Η συνάρτηση

$$A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$$

είναι προφανώς 1-1 και δείχνει ότι $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Αρκεί συνεπώς να δείξουμε ακόμα ότι δεν υπάρχει $f : A \to \mathcal{P}(A)$ 1-1 και επί:

Έστω μια τέτοια f. Τότε για κάθε $a \in A$, το $f(a)$ είναι ένα υποσύνολο του A. Αρκεί για να πάμε σε άτοπο να φτιάξουμε ένα υποσύνολο του A που δεν είναι τέτοιας μορφής (δηλ. $f(a)$ για κάποιο $a \in A$). Ορίζουμε λοιπόν

$$\Omega = \{a \in A : a \notin f(a)\} \subseteq A$$

και παρατηρούμε ότι αν για κάποιο $a_0 \in A$, $\Omega = f(a_0)$, τότε

$$a_0 \in \Omega \iff a_0 \notin f(a_0) \iff a_0 \notin \Omega,$$

το οποίο είναι προφανώς άτοπο. Άρα πράγματι η f δεν μπορεί να είναι επί. □

Άσκηση 2. Δειξτε ότι αν A_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία από σύνολα, τέτοια ώστε για κάθε n, $|A_{n+1}| > |A_n|$, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$|\cup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}| > |A_m|.$$

Λύση. Έστω $\Omega = \cup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Προφανώς, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $A_m \subseteq \Omega$, και συνεπώς $|A_m| \leq |\Omega|$. Υποθέτουμε πρός άτοπο ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, $|A_m| = |\Omega|$ και έστω $f : \Omega \to A_m$, 1-1 και επί. Παρατηρούμε ότι $A_{m+1} \subseteq \Omega$, άρα ο περιορισμός της f στο A_{m+1}, $f \upharpoonright A_{m+1}$ είναι 1-1 σαν περιορισμός της f, από το A_{m+1} στο A_m, κατι που είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση $|A_m| < |A_{m+1}|$. □

Άσκηση 3. Δείξτε ότι οι δυο μορφές του αξιώματος επιλογής για τις οποίες μιλήσαμε στο μάθημα είναι πράγματι ισοδύναμες.

Λύση. Θυμόμαστε κατ' αρχάς τις δυο μορφές:

1η μορφή: *Έστω A_i, $i \in I$ μια οικογένεια (δηλαδή ένα σύνολο) από μη κενά και ανά δύο ξένα σύνολα. Τότε υπάρχει σύνολο $A \subseteq \cup\{A_i : i \in I\}$, τέτοιο ώστε για κάθε $i \in I$, $|A \cap A_i| = 1$.*

2η μορφή: *Έστω* X *σύνολο. Υπάρχει συνάρτηση επιλογής* F : $\mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X$, *τέτοια ώστε για κάθε* $\emptyset \neq S \subseteq X$, $f(S) \in S$.

Από την 2η μορφή στην 1η: Υποθέτουμε τη δεύτερη μορφή, και έστω μια οικογένεια A_i, $i \in I$, όπως στην 1η. Θέτουμε $X = \cup\{A_i : i \in I\}$, και έστω $F : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X$ μια συνάρτηση επιλογής για το σύνολο X. Θέτουμε

$$A = \{F(A_i) : i \in I\}.$$

Επειδή κάθε A_i είναι μη κενό, το $F(A_i)$, άρα και το σύνολο A είναι καλά ορίσμένο. Λόγω του ότι η F είναι συνάρτηση επιλογής, $F(A_i) \in A_i$, και επομένως για κάθε i, $F(A_i) \in A \cap A_i$. Αν y είναι στοιχείο του $A \cap A_i$, τότε $y = F(A_j) \in A_j$ για κάποιο $j \in I$, άρα σ' αυτήν την περίπτωση, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ και συνεπώς $j = i$, (αφού τα A_i είναι ανά δύο ξένα), άρα $y = F(A_i)$. Έπεται ότι το μοναδικό στοιχείο του $A \cap A_i$ είναι το $F(A_i)$ για κάθε i και άρα το A είναι το ζητούμενο σύνολο.

Από την 1η μορφή στη 2η: Έστω X ένα σύνολο. Θα χρησιμοποιήσουμε σαν σύνολο δεικτών I για να ορίσουμε την κατάλληλη οικογένεια, το σύνολο $\mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$. Για $\emptyset \neq S \subseteq X$, θέτουμε

$$A_S = \{S\} \times S. \tag{1}$$

Προφανώς κάθε A_S είναι μη κενό, και άν $A_S \cap A_R \neq \emptyset$, τότε για κάποια στοιχεία τους (S, x) και (R, y) θα ισχύει $(S, x) = (R, y)$, συνεπώς και $S = R$.

Άρα τα παραπάνω σύνολα είναι μη κενά και ανά δύο ξένα. Σύμφωνα με τη διατύπωση της 1ης μορφής, θα υπάρχει κάποιο σύνολο επιλογής A, τέτοιο ώστε $A \cap A_S$ να είναι μονοσύνολο για κάθε $\emptyset \neq S \subseteq X$. Για κάθε τέτοιο S, ορίζουμε $F(S)$ να είναι η προβολή στη δεύτερη συντεταγμένη του μοναδικού στοιχείου του $A \cap A_S$.

Λόγω του ορισμού του A_S, (1), έπεται ότι η δεύτερη συντεταγμένη κάθε στοιχείου του A_S είναι στοιχείο του S, άρα $F(S) \in S$ και συνεπώς η $F : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X$ είναι πράγματι συνάρτηση επιλογής για το X. $\square$

Άσκηση 4. Δείξτε ότι αν σε μια ολική διάταξη $(X, \leq)$, μπορούμε να κάνουμε (τέλεια) επαγωγή, τότε αυτή είναι καλή διάταξη. (Το αντίστροφο το αποδείξαμε στο μάθημα. Αυτό είναι πιο δύσκολο).

Υπόδειξη: Έστω ότι το $A \subseteq X$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Δείξτε με (τέλεια) επαγωγή ότι είναι το κενό. Θα σας δυσκολέψει λίγο να βρείτε την ιδιότητα των στοιχείων του X στην οποία θα εφαρμόσετε την επαγωγή.

Λύση. Έστω ότι το $A \subseteq X$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θεωρούμε την ιδιότητα P που ορίζεται ως εξής:

$$P(x) \iff x \notin A.$$

Έστω ότι για κάθε $y < x$, $P(y)$. Άρα για κάθε $y < x$, $y \notin A$. Επομένως, αν $x \in A$, τότε το x εξ' ορισμού θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του A, άρα συμπεραίνουμε ότι $x \notin A$ και συνεπώς $P(x)$. Συνοψίζοντας αποδείξαμε ότι

$$(\forall y < xP(y)) \Rightarrow P(x), \tag{2}$$

και από το συμπέρασμα της τέλειας επαγωγής, προκύπτει

$$\forall x \in X, P(x) \iff \forall x \in X, x \notin A.$$

Επειδή το A είναι υποσύνολο του X, η τελευταία σχέση δίνει $A = \emptyset$ που είναι αυτό που θέλαμε ν' αποδείξουμε. $\square$

Παρατήρηση. Προσέξτε ότι η παραπάνω γενική απόδειξη που κάναμε για να δικαιολογήσουμε την (2) εφαρμόζεται και στην ειδικη περίπτωση που x είναι το ελάχιστο στοιχείο του X, δηλαδή για τη βάση της επαγωγής. Πραγματικά επειδή σ' αυτήν την περίπτωση το x δεν έχει μικρότερα απ' αυτό στοιχεία, προφανώς για κάθε μικρότερο στοιχείο του ισχύει ότι αυτό δεν ανήκει στο A. Επομένως αν το x ανήκει στο A, τότε αυτό θα είναι το ελάχιστο στοιχείο του, που είναι άτοπο.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων στον $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων αλλά δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

Δείξτε ότι το σύνολο των ρητών είναι αντίστοιχα αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων, αλλά δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

Σύνολα τα οποία είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών λέγονται G_δ (ή Π^2_0). Αντίστοιχα, σύνολα τα οποία είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών, λέγονται F_σ (ή Σ^2_0).

Λύση. Έστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών. (Οι ρητοί είναι αριθμήσιμοι). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $R_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε n το R_n είναι ανοιχτό. Προφανώς επισης

$$\cap\{R_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Επιπλέον κάθε ανοιχτό διάστημα περιέχει και ρητούς και άρρητους, άρα το σύνολο των αρρήτων ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

Για το δεύτερο μέρος, $\mathbb{Q} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$ και κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό. Άρα το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ. Ακριβώς όπως στην προηγούμενη περίπτωση δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό. $\square$

Άσκηση 6. Δείξτε ότι ένα φραγμένο ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι F_σ. Αντίστοιχα ένα κλειστό φραγμένο είναι G_δ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$(a,b) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Big[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\Big] \quad \text{και} \quad [a,b] = \cap_{n\in\mathbb{N}}\Big(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\Big).$$

$\square$