

Πρόβλημα 1. (12 μονάδες) Θεωρούμε μια δημοπρασία VCG για δύο αγαθά, το a και το b . Να υπολογίσετε αρχικά την βέλτιστη ανάθεση και τις αντίστοιχες VCG πληρωμές για δύο παίκτες, τον πρώτο με συνάρτηση αποτίμησης $v_1(\{a, b\}) = 1$ και $v_1(\{a\}) = v_1(\{b\}) = v_1(\emptyset) = 0$, και τον δεύτερο με συνάρτηση αποτίμησης $v_2(\{a, b\}) = v_2(\{a\}) = 1$ και $v_2(\{b\}) = v_2(\emptyset) = 0$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την βέλτιστη ανάθεση και τις αντίστοιχες VCG πληρωμές, αν έχουμε και τρίτο παίκτη με συνάρτηση αποτίμησης $v_3(\{a, b\}) = v_3(\{b\}) = 1$ και $v_3(\{a\}) = v_3(\emptyset) = 0$. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις πληρωμές των παικτών;

Πρόβλημα 2. (10 μονάδες) Για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κοινωνικού οφέλους (social welfare maximization) στο πλαίσιο της διανομής m αγαθών σε n παίκτες με συναρτήσεις ωφέλειας $v_j : 2^{[m]} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, θεωρούμε τον άπληστο αλγόριθμο ανάθεσης:

1. Αρχικά $S_1 \leftarrow \emptyset, \dots, S_n \leftarrow \emptyset$
2. Εξετάζουμε τα αγαθά ένα-ένα, με τη σειρά. Το αγαθό i , $i = 1, \dots, m$, ανατίθεται στον παίκτη j με τη μέγιστη διαφορική ωφέλεια (σε σχέση με την τρέχουσα ανάθεση αγαθών). Έτσι θέτουμε $S_j \leftarrow S_j \cup \{i\}$, όπου $j = \arg \max_{\ell \in [n]} \{v_\ell(S_\ell \cup \{i\}) - v_\ell(S_\ell)\}$.

Μέσω αντιπαραδείγματος (αρκεί να θεωρήσετε 2 παίκτες και λίγα αγαθά), να δείξετε ότι για τον παραπάνω αλγόριθμο ανάθεσης, δεν υπάρχουν πληρωμές που εξασφαλίζουν φιλαλήθεια, ακόμη και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι submodular.

Πρόβλημα 3. (14 μονάδες) Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίσει C ευρώ. Κάθε δημότης i , $i = 1, \dots, n$, εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε $v_i \geq 0$ ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο. Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους v_1, \dots, v_n , και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν $\sum_{i=1}^n v_i \geq C$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά $p_i \geq 0$. Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

Πρόβλημα 4. (22 μονάδες) Θεωρούμε μια δημοπρασία για k ίδια αντικείμενα (π.χ., k ίδια laptops) στην οποία συμμετέχουν $n \geq k + 1$ παίκτες. Η αξία (value) του παίκτη i για ένα laptop είναι v_i (το v_i είναι ιδιωτική παράμετρος του παίκτη i και δεν είναι γνωστό στον δημοπράτη). Κάθε παίκτης διεκδικεί ένα μόνο laptop και η αξία του παραμένει v_i και για δύο ή περισσότερα laptops (δηλ. οι παίκτες είναι unit-demand). Η ωφέλεια (utility) του παίκτη i , αν κερδίσει ένα laptop στην τιμή p_i , είναι $v_i - p_i$, και 0 διαφορετικά (υποθέτουμε ότι πληρώνουν μόνο οι κερδισμένοι).

Θεωρούμε την ανάθεση που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια (social welfare): κάθε παίκτης i υποβάλει προσφορά b_i , οι παίκτες ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά με βάση τις προσφορές τους $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, και οι παίκτες στις πρώτες k θέσεις κερδίζουν από ένα laptop.

1. (7 μον.) Να προτείνετε τιμές που εξασφαλίζουν τη φιλαλήθεια της παραπάνω ανάθεσης (και να αιτιολογήσετε την ιδιότητα της φιλαλήθειας για τις τιμές που προτείνετε).
2. (7 μον.) Αν γνωρίζουμε ότι οι ιδιωτικές παράμετροι v_i των παικτών προκύπτουν ως ανεξάρτητα δείγματα από την ίδια κανονική (regular) κατανομή αξιών \mathcal{D} , πως μπορούμε να ενσωματώσουμε reserve prices στον μηχανισμό του προηγούμενου ερωτήματος ώστε να διατηρήσουμε τη φιλαλήθεια του μηχανισμού και να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο κέρδος του δημοπράτη; Να προτείνετε ακόμη τρόπο υπολογισμού των reserve prices που θα χρησιμοποιήσουμε.
3. (8 μον.) Υποθέτουμε τώρα ότι η ιδιωτική παράμετρος v_i κάθε παίκτη i προκύπτει ως ανεξάρτητο δείγμα από μια κανονική (regular) κατανομή αξιών \mathcal{D}_i , η οποία μπορεί να είναι διαφορετική για κάθε παίκτη. Να προτείνετε φιλαλήθη μηχανισμό (ανάθεση αγαθών και πληρωμές) που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του δημοπράτη. Πως υπολογίζονται τα reserve prices του μηχανισμού σας; Να αιτιολογήσετε τόσο τη φιλαλήθεια του μηχανισμού σας όσο και το γεγονός ότι μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του δημοπράτη. Τι αλλάζει σε σχέση με τον μηχανισμό του ερωτήματος (2) και γιατί;

Πρόβλημα 5. (24 μονάδες) Θεωρούμε πρόβλημα δρομολόγησης εργασιών, όπου $n = 5$ παίκτες έχουν από μία εργασία μοναδιαίας διάρκειας, και έχουμε στη διάθεσή μας έναν μόνο υπολογιστή. Το όφελος του παίκτη i αν η εργασία του δρομολογηθεί στη θέση j , $j \in \{1, \dots, 5\}$, είναι $v_i \cdot \alpha^{j-1}$ (το v_i είναι ιδιωτική παράμετρος του παίκτη i , ενώ το $\alpha \in (0, 1)$ είναι δημόσια παράμετρος κοινή για όλους τους παίκτες).

Θεωρούμε την δρομολόγηση που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια (social welfare): κάθε παίκτης i υποβάλλει προσφορά b_i , οι παίκτες ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά με βάση τις προσφορές τους $b_1 > b_2 > \dots > b_n$, και η εργασία του i -οστού παίκτη δρομολογείται στην i -οστή θέση.

1. (8 μον.) Έστω ότι η τιμή που πληρώνει ο i -οστός παίκτης είναι $b_{i+1} \cdot \alpha^{i-1}$. Ποια είναι η ωφέλειά του παίκτη i σε αυτή την περίπτωση; Να δείξετε, μέσω αντιπαραδείγματος, ότι αυτές οι τιμές δεν εξασφαλίζουν φιλαλήθεια (truthfulness).
2. (8 μον.) Να προτείνετε τιμές που εξασφαλίζουν τόσο φιλαλήθεια όσο και individual rationality. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την φιλαλήθεια του μηχανισμού για τις τιμές που προτείνετε.
3. (8 μον.) Αν γνωρίζουμε ότι οι ιδιωτικές παράμετροι v_i των παικτών προκύπτουν ως ανεξάρτητα δείγματα από την ίδια κανονική (regular) κατανομή οφέλους \mathcal{D} , πως μπορούμε να ενσωματώσουμε reserve prices στον μηχανισμό του προηγούμενου ερωτήματος ώστε να διατηρήσουμε τη φιλαλήθεια του μηχανισμού; Πως υπολογίζονται τα reserve prices που θα χρησιμοποιήσουμε.

Πρόβλημα 6. (18 μονάδες) Θεωρούμε δημοπρασία με 1 αγαθό και 2 παίκτες. Η αξία (valuation) των παικτών για το αγαθό προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

- (i) (6 μονάδες) Να δείξετε ότι η αναμενόμενη πληρωμή για τη δημοπρασία Vickrey (χωρίς reserve price) με 2 παίκτες είναι $1/3$.
- (ii) (6 μονάδες) Έστω ότι χρησιμοποιούμε δημοπρασία Vickrey με reserve price το $1/2$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη πληρωμή σε αυτή την περίπτωση και να την συγκρίνετε με την αναμενόμενη πληρωμή της προηγούμενης περίπτωσης.
- (iii) (6 μονάδες) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη πληρωμή για τη δημοπρασία Vickrey (χωρίς reserve price) με 3 παίκτες όπως οι παραπάνω.