

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο A , $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. (Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση 1-1 από το A στο δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}(A)$, αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση 1-1 και επί).

Παρατηρήστε ότι σ' αυτήν την περίπτωση, μπορεί κανείς να ορίσει αναδρομικά μια ακολουθία $A_1, A_2, \dots$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$A_1 = \mathbb{N}$$

$$A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n)$$

Προφανώς τότε (με επαγωγή) κάθε A_n είναι άπειρο σύνολο και $|A_{n+1}| > |A_n|$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι αν A_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία από σύνολα, τέτοια ώστε για κάθε n , $|A_{n+1}| > |A_n|$, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$|\cup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}| > |A_m|.$$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι οι δυο μορφές του αξιώματος επιλογής για τις οποίες μιλήσαμε στο μάθημα είναι πράγματι ισοδύναμες.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι αν σε μια ολική διάταξη $(X, \leq)$, μπορούμε να κάνουμε (τέλεια) επαγωγή, τότε αυτή είναι καλή διάταξη. (Το αντίστροφο το αποδείξαμε στο μάθημα. Αυτό είναι πιο δύσκολο).

Υπόδειξη: Έστω ότι το $A \subseteq X$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Δείξτε με (τέλεια) επαγωγή ότι είναι το κενό.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων στον $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων αλλά δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

Δείξτε ότι το σύνολο των ρητών είναι αντίστοιχα αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων, αλλά δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

Σύνολα τα οποία είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών λέγονται G_δ (ή Σ_0^1). Αντίστοιχα, σύνολα τα οποία είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών, λέγονται F_σ (ή Π_0^1).

Άσκηση 6. Δείξτε ότι ένα φραγμένο ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι F_σ . Αντίστοιχα ένα κλειστό φραγμένο είναι G_δ .