

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ, 25/9/2024

Άσκηση 1. (1,5 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x+y^2} - y$.

(α) (0,5 μον) Εξηγήστε γιατί η f είναι παραγωγίσιμη.

(β) (1 μον) Υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y^2} - 1 - x}{|x| + |y|}$.

Λύση. (α) Η f είναι C^1 (και άρα από γνωστό θεώρημα παραγωγίσιμη): $f_x = e^{x+y^2}$, $f_y = 2ye^{x+y^2} - 1$.

(β) $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = -1$ και

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y^2} - y - 1 - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y^2} - 1 - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y^2} - y - 1 - x + y}{|x| + |y|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y^2} - y - 1 - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} = 0 \end{aligned}$$

ως μηδενική επί φραγμένη, αφού

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1$$

Άσκηση 2. (2 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^3 + y^9}$ αν $x^3 + y^9 \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ διαφορετικά.

(α) (1 μον) Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$.

(β) (1 μον) Αποδείξτε ότι η f έχει παράγωγο ως προς κάθε μοναδιαία κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ στο σημείο $(0,0)$.

Λύση. (α) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ και άρα ούτε παραγωγίσιμη. Πράγματι αν θεωρήσουμε την καμπύλη $x = y^3$ τότε το όριο

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^3, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 y^3}{y^9 + y^9} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2y^3}$$

δεν υπάρχει.

(β) Για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{(tu_1) \cdot (t^3 u_2^3)}{t^3 u_1^3 + t^9 u_2^9}}{t} = \frac{u_1 u_2^3}{u_1^3 + t^6 u_2^6}$$

και άρα

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^3}{u_1^3 + t^6 u_2^6} = \begin{cases} \frac{u_2^3}{u_1^3}, & \text{αν } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{αν } u_1 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 3. (1+2=3 μον)

(α) (1 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - y^4$. Εξετάστε αν η f έχει τοπικά ακρότατα.

(β) (2 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{3}x^3 - xy^2$. Βρείτε τα τοπικά μέγιστα, τα τοπικά ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία της f .

Λύση.

(α) Το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$. Όμως $f(x, 0) = x^4 > 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι τοπ. ελάχιστο στον x -άξονα. Από την άλλη μεριά $f(0, y) = -y^4 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι τοπ. μέγιστο στον y -άξονα. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι σαγματικό.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 2x - x^2 - y^2 \\f_y(x, y) &= 2y - 2xy \\f_{xx}(x, y) &= 2 - 2x \\f_{yy}(x, y) &= 2 - 2x \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -2y\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 2x - x^2 - y^2 = 0 \\f_y(x, y) &= 2y - 2xy = 0\end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $2y(1 - x) = 0$ και άρα $y = 0$ ή $x = 1$. Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση έχουμε $2x - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς για $y = 0$ έχουμε τα σημεία $(0, 0)$ και $(2, 0)$. Ομοίως για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $2x - x^2 - y^2 = 1 - y^2 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία $(1, 1)$ και $(1, -1)$. Συνολικά λοιπόν έχουμε τέσσερα κρίσιμα σημεία:

$$(0, 0), (2, 0), (1, 1) \text{ και } (1, -1)$$

Για κάθε (x, y) είναι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (2 - 2x)^2 - 4y^2$$

Έχουμε

- (1) $\Delta(0, 0) = 4 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ και άρα στο $(0, 0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.
- (2) $\Delta(2, 0) = 4 > 0$, $f_{xx}(2, 0) = -2 < 0$ και άρα στο $(2, 0)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.
- (3) $\Delta(1, 1) = -4 < 0$ και άρα το $(1, 1)$ είναι σαγματικό.
- (4) $\Delta(1, -1) = -4 < 0$ και άρα το $(1, -1)$ είναι σαγματικό.

Άσκηση 4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο $T_2(x, y) = x^2 - y^2$.

- (α) Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης στο $(0, 0)$.
- (β) Εξετάστε αν το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$.

Λύση. (α) Ο γενικός τύπος του πολυωνύμου Taylor της f δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$ είναι

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = 2, \quad f_{yy}(0, 0) = -2, \quad f_{xy}(0, 0) = 0$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Καταρχήν $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Επιπλέον

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0$$

Συνεπώς από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου το $(0,0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

(γ) Από το Θεώρημα Taylor γνωρίζουμε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$. Άρα αν υποθέσουμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ υπάρχει, τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

και θα ήταν ίσα.

Όμως το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. Πράγματι, κινούμενοι στον x -άξονα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0, y=0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = +1$ ενώ κινούμενοι στον y -άξονα έχουμε $\lim_{y \rightarrow 0, x=0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$ Συνεπώς, το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 5. (3 μον) Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(α) (0,5 μον) Εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm 2$.

(β) (0,5 μον) Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$.

(γ) (1 μον) Αποδείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{2-x}$ για όλα τα $x \in (-2, 2)$.

(δ) (1 μον) Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ και υπολογίστε το άθροισμα $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}$.

Λύση. (α) Για $x = -2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (-1)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά, η οποία ως γνωστόν συγκλίνει (από το κριτήριο Leibniz).

Για $x = 2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά η οποία αποκλίνει.

(β) Έχουμε

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n n}} = \frac{1}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$$

και άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

(γ) Είναι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$$

(δ) Έχουμε $(-\ln(2-x))' = \frac{1}{2-x} = f'(x)$. Άρα από το (γ), οι συναρτήσεις $f(x)$ και $-\ln(2-x)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-2, 2)$. Συνεπώς υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = -\ln(2-x) + c$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} 0^n = 0$ και άρα $c = \ln 2$. Οπότε

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} = f(-1) = \ln \left(\frac{2}{2 - (-1)} \right) = \ln \frac{2}{3}$.