ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
(Συναρτήσεις μίας μεταβλητής)
Δευτέρα 16 Σεπτεμβρίου 2024

1. (1+1 μον.) (α) Έστω A μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $x = \inf A$ αν και μόνο αν ο x είναι κάτω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του A που συγκλίνει στο x.
(β) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

Εξηγήστε γιατί από αυτήν την ανισότητα έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) Υποθέτουμε αρχικά ότι $x = \inf A$. Από τον ορισμό του infimum, ο x είναι κάτω φράγμα του A. Επίσης, από τον βασικό χαρακτηρισμό του infimum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $x \leqslant y < x + \varepsilon$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το παραπάνω για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n \in A$ τέτοιο ώστε $x \leqslant x_n < x + \frac{1}{n}$. Έτσι ορίζεται μια ακολουθία (x_n) στοιχείων του A για την οποία, από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έχουμε ότι $x_n \to x$.

Αντίστροφα, έστω ότι ο x είναι κάτω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του A που συγκλίνει στο x. Για να δείξουμε ότι $x = \inf A$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $x \leqslant y < x + \varepsilon$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x - x_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Ειδικότερα, $x_{n_0} \in A$ και από την $|x - x_{n_0}| < \varepsilon$ συμπεραίνουμε ότι $x \leqslant x_{n_0} < x + \varepsilon$. Δηλαδή, μπορούμε να πάρουμε ως y τον x_{n_0}.

(β) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $1 \leqslant 2 - \frac{1}{1}$, που ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geqslant 1$ έχουμε $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{k}$ και θα δείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{k+1}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{k+1}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Όμως,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \geqslant \frac{1}{(k+1)^2}$$

διότι $k(k+1) \leqslant (k+1)^2$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε ότι για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ έχουμε

$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Η (s_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει. Μάλιστα, έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n \to \infty} s_n \leqslant 2.$$

2. (2 μον.) Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_1 > 0$ και αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n + a_n^2}.$$

Βρείτε τα όρια των ακολουθιών (a_n), $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ και μελετήστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a_n + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right).$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι $a_1 > 0$ και αν για κάποιο n ισχύει $a_n > 0$ τότε $a_{n+1} = \frac{a_n}{3+a_n+a_n^2} > 0$. Από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βλέπουμε ότι

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n + a_n^2} < \frac{a_n}{3} < a_n.$$

Η (a_n) είναι λοιπόν φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a. Από τον αναδρομικό τύπο παίρνουμε ότι $a(3 + a + a^2) = a$ και συνεπώς $a = 0$. Χρησιμοποιώντας πάλι τον αναδρομικό τύπο βρίσκουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 + a_n + a_n^2} = \frac{1}{3}$$

και αυτό με τη σειρά του μας δίνει από το κριτήριο του λόγου ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Εφόσον $0 < \frac{a_n}{n^2} \leqslant a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ συγκλίνει. Τέλος, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + \frac{1}{\sqrt{n}+1})$ συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz, το οποίο εφαρμόζεται διότι η ακολουθία $\gamma_n = a_n + \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο 0.

3. (1+1 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $xf(x) \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι $f(0) = 0$.

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $x > 0$ από την $xf(x) \geqslant 0$ βλέπουμε ότι $f(x) \geqslant 0$. Λόγω της συνέχειας της f στο 0 (από δεξιά) συμπεραίνουμε ότι

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \geqslant 0.$$

Όμοια, για κάθε $x < 0$ από την $xf(x) \geqslant 0$ βλέπουμε ότι $f(x) \leqslant 0$. Λόγω της συνέχειας της f στο 0 (από αριστερά) συμπεραίνουμε ότι

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \leqslant 0.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες έχουμε ότι $f(0) = 0$.

(β) Αφού η f είναι κάτω φραγμένη, το σύνολο τιμών της θα είναι κάτω φραγμένο (και μη κενό) υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και άρα από την αρχή της πληρότητας θα έχει infimum το οποίο συμβολίζουμε με ℓ. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < \ell + \varepsilon$. Τότε όμως, λόγω μονοτονίας έχουμε ότι

$$f(x) \leqslant f(x_0) < \ell + \varepsilon\,, \text{ για κάθε } x \geqslant x_0\,.$$

Επιπλέον αφού το ℓ είναι το infimum (άρα, κάτω φράγμα) του συνόλου τιμών της f, έχουμε ότι $\ell - \varepsilon < \ell \leqslant f(x)$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Επομένως,

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon\,, \text{ για κάθε } x \geqslant x_0$$

δηλαδή $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, για κάθε $x \geqslant x_0$, το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα.

4. (2+1 μον.) (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Αν a_k είναι η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k, $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_k)$ και υπολογίστε το.

(β) Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση με $f(0)=0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x>0$,

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = xf(x).$$

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : I_k \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \tan x - x$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to(k\pi-\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = +\infty.$$

Συνεπώς, η f παίρνει αρνητικές και θετικές τιμές στο I_k. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $a_k \in I_k$ ώστε $f_k(a_k) = \tan a_k - a_k = 0$. Η λύση είναι μοναδική διότι η $f_k(x) = \tan x - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο I_k: παρατηρήστε ότι $f_k'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ αν $x \neq k\pi$ και $=0$ στο σημείο $k\pi$.

Για το όριο, έστω $\varepsilon > 0$. Από την $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ έπεται ότι υπάρχει $M>0$ ώστε αν $x>M$ τότε $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon$.

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant k_0$ να ισχύει $k\pi - \frac{\pi}{2} > M$. Τότε, αν θεωρήσουμε τη λύση a_k της εξίσωσης $\tan x = x$ στο I_k, έχουμε $a_k > M$ και $\arctan a_k = a_k - k\pi$. Άρα,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_k - k\pi) < \varepsilon.$$

Όμοια,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_{k+1} - (k+1)\pi) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$|a_{k+1} - a_k - \pi| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_k) = \pi$.

(β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $L, R : [0,+\infty) \to [0,\infty)$ με

$$L(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt \quad \text{και} \quad R(x) = xf(x).$$

Οι L, R είναι παραγωγίσιμες και

$$L'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x))\cdot f'(x) = f(x) + xf'(x) = R'(x)$$

για κάθε $x \geqslant 0$. Έπεται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $L(x) = R(x) + c$ για κάθε $x \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι $L(0) = R(0) = 0$, άρα $c = 0$ και έπεται το ζητούμενο.

5. (1.5+1.5 μον.) (α) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}-1}{t}\,dt\,.$$

(β) Έστω $b > a > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{\cos(nx)}{x}\,dx = 0\,.$$

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

και επομένως θέτοντας όπου x το t^2 παίρνουμε

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \cdots$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Οπότε

$$\frac{e^{t^2} - 1}{t} = t + \frac{t^3}{2!} + \frac{t^5}{3!} + \frac{t^7}{4!} + \cdots$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ολοκληρώνοντας όρο προς όρο βρίσκουμε ότι

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t}\, dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4(2!)} + \frac{x^6}{6(3!)} + \frac{x^8}{8(4!)} + \cdots$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\cos(nx)}{x} dx &= \int_a^b \left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)' \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{n} \frac{\sin(nx)}{x}\Big|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b \sin(nx) \frac{1}{x^2} dx.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{1}{n} \frac{\sin(nx)}{x}\Big|_a^b \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin(nb)}{b} - \frac{\sin(na)}{a} \right| \leqslant \frac{1}{n} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \to 0$$

και

$$\frac{1}{n} \left| \int_a^b \sin(nx) \frac{1}{x^2} dx \right| \leqslant \frac{1}{n} \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \to 0,$$

άρα

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \frac{\cos(nx)}{x} dx = 0.$$