

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 28/8/2024
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Άσκηση 1. (0,5× 6=3 μον) Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές λάθος δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) (0,5 μον) Αν (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 - a_{3n}a_{3n+1}a_{3n+2}) = 0$.

(β) (0,5 μον) Αν (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε $1 \leq a_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$.

(γ) (0,5 μον) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f(0) = 1$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(δ) (0,5 μον) Η ακολουθία $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ συγκλίνει στο 1.

(ε) (0,5 μον) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) < f(1)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

(ζ) (0,5 μον) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Αν η f δεν είναι επιπλέον και συνεχής τότε δεν είναι απαραίτητα ολοκληρώσιμη.

Λύση. (α) ΣΩΣΤΟ: Έστω $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Από γνωστή πρόταση κάθε υπακολουθία της (a_n) συγκλίνει στο ίδιο όριο ℓ . Ειδικότερα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$$

Από τις ιδιότητες ορίων ακολουθιών έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 - a_{3n}a_{3n+1}a_{3n+2}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^3 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n+2} = \ell^3 - \ell^3 = 0$$

(β) ΣΩΣΤΟ: Έχουμε $1 \leq a_n \leq n \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{n}$ και επειδή $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ από το θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$.

(γ) ΣΩΣΤΟ: Αν η f ήταν συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε από Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(0) = 1$ για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \rightarrow 0$. Όμως, $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \neq f(0)$.

(δ) ΛΑΘΟΣ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

(ε) ΣΩΣΤΟ: Αφού $f'(x) \neq 0$ από θεώρημα Μέσης Τιμής η f είναι 1-1. Τώρα από γνωστό θεώρημα, η f ως συνεχής και 1-1 είναι γνησίως μονότονη. Επειδή $f(0) < f(1)$ δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα είναι γνησίως αύξουσα.

(ζ) ΛΑΘΟΣ: Είναι γνωστό θεώρημα ότι κάθε μονόνη συνάρτηση (ασχέτως αν είναι συνεχής ή όχι) είναι ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 2. (1,5 + 2 = 3,5 μόν) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{6-x}$, $x \in (-\infty, 6)$.

(α) (i) (0,5 μόν) Δείξτε ότι η f έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία τα οποία και να υπολογίσετε. (Υπενθυμίζουμε ότι ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται σταθερό σημείο της f αν $f(x_0) = x_0$)

(ii) (0,5 μόν) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 6)$.

(iii) (0,5 μόν) Αν $a < b$ τα σταθερά σημεία της f δείξτε ότι $f([a, b]) = [a, b]$. (Με $f([a, b])$ συμβολίζουμε την εικόνα του $[a, b]$ μέσω της f , δηλαδή $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$)

(β) Έστω (a_n) η ακολουθία με $a_1 = 4$ και $a_{n+1} = f(a_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) (1 μόν) Δείξτε ότι η (a_n) είναι φραγμένη και γνησίως φθίνουσα.

(ii) (1 μόν) Εξηγήστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Λύση. (α) (i) Τα σταθερά σημεία της f είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5}{6-x} = x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 5$$

(ii) Έχουμε

$$f'(x) = \frac{5}{(6-x)^2} > 0$$

για όλα τα $x \in (-\infty, 6)$. (iii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$a < x < b \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b) \Rightarrow a < f(x) < b$$

και άρα

$$f([a, b]) \subseteq [a, b]$$

Επιπλέον, επειδή η f είναι και συνεχής, από θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για κάθε y μεταξύ των $f(a) = a$ και $f(b) = b$ υπάρχει x μεταξύ των a και b με $f(x) = y$ δηλαδή,

$$[a, b] \subseteq f([a, b])$$

Άρα, $f([a, b]) = [a, b]$.

(β) (i) Δείχνουμε πρώτα ότι η (a_n) είναι φραγμένη. Ειδικότερα, θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$1 < a_n < 5 \quad (1)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 1$ αυτό ισχύει αφού $a_1 = 4$. Επίσης αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $1 < a_n < 5$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι $f(1) < f(a_n) < f(5)$ και άρα, αφού $f(1) = 1$ και $f(5) = 5$, έπεται ότι $1 < a_{n+1} < 5$. Άρα, με επαγωγή η (1) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ομοίως με επαγωγή θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία δηλαδή θα δείξουμε ότι η ανισότητα

$$a_{n+1} < a_n \quad (2)$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι για $n = 1$ είναι $a_2 = \frac{5}{6-4} = \frac{5}{2} < a_1$. Επίσης αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $a_{n+1} < a_n$ τότε, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(a_{n+1}) < f(a_n)$ και άρα $a_{n+2} < a_{n+1}$. Συνεπώς με επαγωγή η (2) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Η (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη. Από γνωστό θεώρημα η (a_n) συγκλίνει. Έστω $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Τότε $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ επειδή η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) . Έχουμε

$$a_{n+1} = \frac{5}{6-a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{5}{6-\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \Rightarrow \ell = \frac{5}{6-\ell}$$

Άρα το ℓ είναι ένα σταθερό σημείο της f , οπότε $\ell = 1$ ή $\ell = 5$. Η περίπτωση $\ell = 5$ αποκλείεται. Πράγματι, η (a_n) είναι φθίνουσα και άρα $a_n \leq a_1$ οπότε $\ell \leq a_1 = 4$. Συνεπώς $\ell = 1$.

Άσκηση 3. (1,5+1,5=3 μον)

(α) (1,5 μον) Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε
$$\int_a^b h(x) dx = h(\xi)(b - a).$$

(β) (1,5 μον) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι
$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx.$$

Λύση. (α) Θέτουμε $H(x) = \int_a^x h(t)dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι

$$H'(x) = h(x) \quad (3)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{H(b) - H(a)}{b - a} = H'(\xi) = h(\xi) \quad (4)$$

Επειδή $H(b) = \int_a^b h(x) dx$, $H(a) = 0$, έχουμε ότι $H(b) - H(a) = \int_a^b h(x) dx$ και άρα

$$\frac{\int_a^b h(x) dx}{b - a} = h(\xi) \Rightarrow \int_a^b h(x) dx = h(\xi)(b - a)$$

(β) Θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Επειδή $f(x) < g(x)$ έχουμε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το (α) ερώτημα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\int_a^b h(x) dx = h(\xi)(b - a)$ και συνεπώς αφού $h(x) < 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$,

$$\int_a^b h(x) dx < 0$$

Αλλά

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

και άρα

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx < 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

Άσκηση 4. (1+1,5=2,5 μον)

(α) (1 μον) Έστω $G : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt$ για κάθε $x > 1$. Εξηγήστε γιατί η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της $G'(x)$ για $x > 1$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(i) (0,5 μον) Γράψτε τον γενικό τύπο του πολυωνύμου Taylor $T_2(x)$ της f , τάξης $n = 2$ με κέντρο το $x_0 = 0$. Τι γνωρίζετε για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2}$;

(ii) (1 μον) Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow 0$ και $f(x_n) = x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε την $f''(0)$.

Λύση. (α) Αν $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, $x > 0$ και $\phi(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$, τότε $G(x) = F(\phi(x))$ (παρατηρείστε ότι η σύνθεση των F και ϕ ορίζεται διότι $\phi(x) = \sqrt{\ln x} > 0$ για κάθε $x > 1$). Συνεπώς η G είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού $F'(x) = e^{x^2}$ και $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$. Από τον Κανόνα Αλυσίδας έπεται ότι

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

(β) (i) Έχουμε

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Επίσης, από το θεώρημα Taylor γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = 0$$

(ii) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Από Αρχή Μεταφοράς θα πρέπει

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Επίσης,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Άρα αφού $x_n \rightarrow 0$ και $x_n \neq 0$, από Αρχή Μεταφοράς έπεται ότι

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_n} = 1$$

Συνεπώς, $T_2(x) = 0 + x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ και άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x - \frac{f''(0)}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - x}{x^2} \right) - \frac{f''(0)}{2} = 0$$

οπότε

$$f''(0) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$$

Πάλι από Αρχή Μεταφοράς,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_n}{x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

και άρα $f''(0) = 0$.

ΣΤΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ 12 (ΓΙΑ ΤΟ ΑΡΙΣΤΑ ΑΡΚΟΥΝ 10 ΜΟΝΑΔΕΣ)