

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 28/8/2024

Άσκηση 1. (0,5× 6=3 μον) Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές λάθος δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) (0,5 μον) Αν (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 - a_{3n}a_{3n+1}a_{3n+2}) = 0$.

(β) (0,5 μον) Αν (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε $1 \leq a_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$.

(γ) (0,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f(0) = 1$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(δ) (0,5 μον) Η ακολουθία $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ συγκλίνει στο 1.

(ε) (0,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) < f(1)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

(ζ) (0,5 μον) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Αν η f δεν είναι επιπλέον και συνεχής τότε δεν είναι απαραίτητα ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 2. (1,5 + 2=3,5 μον) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{6-x}$, $x \in (-\infty, 6)$.

(α) (i) (0,5 μον) Δείξτε ότι η f έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία τα οποία και να υπολογίσετε. (Υπενθυμίζουμε ότι ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται σταθερό σημείο της f αν $f(x_0) = x_0$)

(ii) (0,5 μον) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 6)$.

(iii) (0,5 μον) Αν $a < b$ τα σταθερά σημεία της f δείξτε ότι $f([a, b]) = [a, b]$. (Με $f([a, b])$ συμβολίζουμε την εικόνα του $[a, b]$ μέσω της f , δηλαδή $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$)

(β) Έστω (a_n) η ακολουθία με $a_1 = 4$ και $a_{n+1} = f(a_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) (1 μον) Δείξτε ότι η (a_n) είναι φραγμένη και γνησίως φθίνουσα.

(ii) (1 μον) Εξηγήστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 3. (1,5+1,5=3 μον)

(α) (1,5 μον) Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\int_a^b h(x) dx = h(\xi)(b-a)$.

(β) (1,5 μον) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

Άσκηση 4. (1+1,5=2,5 μον)

(α) (1 μον) Έστω $G : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt$ για κάθε $x > 1$. Εξηγήστε γιατί η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της $G'(x)$ για $x > 1$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(i) (0,5 μον) Γράψτε τον γενικό τύπο του πολωνύμου Taylor $T_2(x)$ της f , τάξης $n = 2$ με κέντρο το $x_0 = 0$. Τι γνωρίζετε για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2}$;

(ii) (1 μον) Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow 0$ και $f(x_n) = x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε την $f''(0)$.

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ 12 (ΓΙΑ ΤΟ ΑΡΙΣΤΑ ΑΡΚΟΥΝ 10 ΜΟΝΑΔΕΣ)