

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 1/7/2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Άσκηση 1. (3 μον) Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές λάθος δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- (α) (0,5 μον) Η ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών λέει ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει ρητός.
- (β) (0,5 μον) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a \in A$ με $a > n$. Τότε το A δεν είναι άνω φραγμένο.
- (γ) (0,5 μον) Έστω (a_n) ακολουθία και $a \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ τότε η (a_n) συγκλίνει στο a .
- (δ) (0,5 μον) Η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ συγκλίνει στον e .
- (ε) (0,5 μον) Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η $f'(-1) \cdot f'(1) < 0$ τότε υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ με $f'(\xi) = 0$.
- (ζ) (0,5 μον) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $F''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Λύση. (α) Λάθος, η ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών λέει ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς υπάρχει ρητός (το ότι μεταξύ δύο ρητών $q_1 < q_2$ υπάρχει ρητός είναι συνέπεια αλλά προκύπτει και άμεσα παίρνοντας τον μέσο όρο $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$).

(β) Σωστό. Πράγματι, έστω ότι το A ήταν άνω φραγμένο και έστω $M \in \mathbb{R}$ ένα άνω φράγμα του A . Επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > M$. Θεωρώντας τώρα το $a \in A$ με $a > n$ έχουμε $a > n > M \Rightarrow a > M$, άτοπο αφού το M είναι άνω φράγμα του A .

(γ) Λάθος, η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν έχει όριο αλλά για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα $n \in \mathbb{N}$ (όλοι οι άρτιοι) τέτοια ώστε $1 - \epsilon < a_n = 1 < 1 + \epsilon$. Το σωστό είναι ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $n \geq n_0$ (δηλαδή τελικά για όλα τα n) $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$.

(δ) Σωστό, η (a_n) είναι υπακολουθία της $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ (συγκεκριμένα $a_n = x_{k_n}$ με $k_n = n^2$).

(ε) Σωστό, (ανεξαρτήτως αν η f' είναι συνεχής ή όχι), από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για παραγώγους (Θεώρημα Darboux).

(ζ) Σωστό. Πράγματι, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η συνάρτηση $F_1(t) = \int_0^t f(u) du$ είναι παραγωγίσιμη και $F_1' = f$. Εφαρμόζοντας πάλι το ίδιο θεώρημα η συνάρτηση $F_2(x) = \int_0^x F_1(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F_2'(x) = F_1(x)$, για όλα τα $x \in [0, 1]$. 'ρα $F_2'' = (F_2')' = F_1' = f$.

Άσκηση 2. (2 μον) Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (i) (1 μον) Δείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. (ii) (1 μον) Εξηγήστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Λύση. (i) Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$0 < a_{n+1} < a_n < \dots < a_1 \quad (1)$$

Για $n = 1$ είναι άμεσο: $a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3-2} = 1$ και άρα $0 < a_2 < a_1$. Έστω ότι η (1) ισχύει για κάποιο $n = n_0 \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$0 < a_{n_0+1} < a_{n_0} < \dots < a_1 \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $n = n_0 + 1$.

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3-x}$, με $x < 3$ είναι γνησίως αύξουσα ($f'(x) = \frac{1}{(3-x)^2} > 0$) και θετική. Άρα, επειδή $a_1 = 2 < 3$ από την (2) έχουμε

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} < \dots < a_1 < 3 \Rightarrow a_{n_0+1} < a_{n_0} < 3 \Rightarrow 0 < f(a_{n_0+1}) < f(a_{n_0}) \Rightarrow 0 < a_{n_0+2} < a_{n_0+1}$$

Συνδυάζοντας με την (2) παίρνουμε

$$0 < a_{n_0+2} < a_{n_0+1} < a_{n_0} < \dots < a_1 \quad (3)$$

και η απόδειξη του επαγωγικού βήματος ολοκληρώθηκε. Από Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η (1) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Από το (i) η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0. Άρα είναι συγκλίνουσα ως μονότονη και φραγμένη. Έστω $a = \lim a_n$. Τότε και $a_{n+1} \rightarrow a$ (η (a_{n+1}) είναι υποκολουθία της (a_n)). Άρα

$$a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n} \Rightarrow a_{n+1}(3-a_n) - 1 = 0 \Rightarrow 3a_{n+1} - a_n a_{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα έχουμε $a_n \leq a_1 = 2 \Rightarrow \lim a_n \leq 2 \Rightarrow a \leq 2$. Άρα η περίπτωση $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ απορρίπτεται διότι $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 2$. Άρα $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 3. (2 μόν) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \int_a^x f(t) dt \cdot \int_x^b g(t) dt$. (i) (1 μόν) Δείξτε ότι η h είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της. (ii) (1 μόν) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) \int_\xi^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t) dt$.

Λύση. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Για την G παρατηρούμε ότι

$$G(x) = \int_x^b g(t) dt = \int_a^b g(t) dt - \int_a^x g(t) dt$$

Άρα, πάλι από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, παίρνουμε

$$G'(x) = \left(\int_a^b g(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right)' = - \left(\int_a^x g(t) dt \right)' = -g(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Η συνάρτηση $H = FG$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγός της δίνεται από τον κανόνα παραγωγίσης γινομένου,

$$\begin{aligned} H'(x) &= (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \\ &= f(x) \int_x^b g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

Επίπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι $H(a) = H(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \int_{\xi}^b g(t) dt - g(\xi) \int_a^{\xi} f(t) dt = 0$$

και το συμπέρασμα έπεται.

Άσκηση 4. (2 μον) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) (1 μον) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) (1 μον) Αν $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1}$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = 0$$

Θέτουμε $h = f - g$ και $H(x) = \int_0^x h(t) dt$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και άρα από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η H είναι παραγωγίσιμη με $H'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Επειδή $H(1) = H(0) = 0$ από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $H'(\xi) = h(\xi) = f(\xi) - g(\xi) = 0$.

(β) Έχουμε $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} = \arctan 1 - \arctan 0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ και το συμπέρασμα έπεται από το (α).

Άσκηση 5. (3 μον) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) (0,5 μον) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ δείξτε ότι $f(0) = 0$.

(ii) (0,5 μον) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ δείξτε ότι $f'(0) = 1$.

(iii) (1 μον) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f'' συνεχή στο $x_0 = 0$ βρείτε την $f''(0)$.

(β) (1 μον) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}}$.

Λύση. (α) (i) Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, από Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι $f(x_n) \rightarrow 0$ για κάθε ακολουθία $x_n \rightarrow 0$. Άρα $f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow f(0)$. Επειδή $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ έπεται ότι $f(0) = 0$.

(ii) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Άρα πάλι από Αρχή Μεταφοράς για όρια έχουμε $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}$ για κάθε ακολουθία $x_n \rightarrow 0$. Συνεπώς

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

(iii) α' τρόπος (Με χρήση του Τύπου Taylor): Έστω $T_1(x) = f(0) + f'(0)x$ το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 1$ της f με κέντρο το $x_0 = 0$. Από τον τύπο του Taylor για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ξ μεταξύ του x και του 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \Rightarrow f(x) = x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ με

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2} \frac{1}{n^2} \Rightarrow f''(\xi_n) = 0$$

Επειδή $0 < \xi_n < \frac{1}{n}$, από Θεώρημα Ισοσυγκλιουσών ακολουθιών έπεται ότι $\xi_n \rightarrow 0$. Επιπλέον αφού η f'' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, από Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι $f''(\xi_n) \rightarrow f''(0)$ και επειδή $f''(\xi_n) = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι $f''(0) = 0$.

β' τρόπος (Με χρήση του θεωρήματος Taylor): Έστω $T_2(x)$ το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 2$ της f με κέντρο το $x_0 = 0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = 0$$

Οπότε, αφού $T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x - \frac{f''(0)}{2}x^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}$$

Τώρα από Αρχή Μεταφοράς για όρια παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

Άρα $\frac{f''(0)}{2} = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$.

Παρατήρηση 6. Με τον δεύτερο τρόπο δεν χρειάζεται να υποθέσουμε την συνέχεια της f'' στο $x_0 = 0$.

(β) Θέτουμε $F(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin(t^2) dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = 0$ και $F'(x) = e^{x^2} \sin(x^2)$. Άρα το

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x^5)}{x^{15}}$$

είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de l' Hospital και τον Κανόνα Αλυσίδας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x^5)}{x^{15}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(F(x^5))'}{(x^{15})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x^5) \cdot (x^5)'}{15x^{14}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^{10}} \sin(x^{10}) \cdot 5x^4}{15x^{14}} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^{10}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^{10})}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ΣΤΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ 12 (ΓΙΑ ΤΟ ΑΡΙΣΤΑ ΑΡΚΟΥΝ 10 ΜΟΝΑΔΕΣ)