

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 1/7/2024

Άσκηση 1. (3 μον) Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές λάθος δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- (α) (0,5 μον) Η ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών λέει ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει ρητός.
- (β) (0,5 μον) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a \in A$ με $a > n$. Τότε το A δεν είναι άνω φραγμένο.
- (γ) (0,5 μον) Έστω (a_n) ακολουθία και $a \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ τότε η (a_n) συγκλίνει στο a .
- (δ) (0,5 μον) Η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ συγκλίνει στον e .
- (ε) (0,5 μον) Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η $f'(-1) \cdot f'(1) < 0$ τότε υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ με $f'(\xi) = 0$.
- (ζ) (0,5 μον) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $F''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 2. (2 μον) Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (i) (1 μον) Δείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. (ii) (1 μον) Εξηγήστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 3. (2 μον) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \int_a^x f(t) dt \cdot \int_x^b g(t) dt$. (i) (1 μον) Δείξτε ότι η h είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της. (ii) (1 μον) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) \int_\xi^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t) dt$.

Άσκηση 4. (2 μον) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) (1 μον) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) (1 μον) Αν $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1}$.

Άσκηση 5. (3 μον) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (i) (0,5 μον) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ δείξτε ότι $f(0) = 0$.
- (ii) (0,5 μον) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ δείξτε ότι $f'(0) = 1$.
- (iii) (1 μον) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f'' συνεχή στο $x_0 = 0$ βρείτε την $f''(0)$.

(β) (1 μον) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}}$.