ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ, 3/6/2024

Άσκηση 1. *(2 μον)* Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) (0,7 μον) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) (0,7 μον) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου υπολογίστε την $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(γ) (0,6 μον) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0,0)$?

Λύση. (α) Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x^2 + y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2 + y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot x^2 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot |y| \leq x^2 + |y|$$

Επειδή $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2 + |y|) = 0$, από τον κανόνα παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Από τον ορισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4u_1^4 + t^3u_2^3}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4u_1^4 + t^3u_2^3}{t^3u_1^2 + t^3u_2^2} = \lim_{t\to 0}(tu_1^4 + u_2^3) = u_2^3$$

(γ) Από το (β) η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη: για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ παίρνουμε $f_x(0,0) = 0$ ενώ για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ παίρνουμε $f_y(0,0) = 1$. Μπορούμε να συνεχίσουμε για να δούμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με δύο τρόπους.

α΄ τρόπος: Γνωρίζουμε ότι αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$, τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u} = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = u_2$$

Άρα από το (β) θα είχαμε

$$u_2^3 = u_2 \Leftrightarrow u_2(u_2^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow u_2 = 0 \text{ ή } u_2 = \pm 1$$

που είναι αδύνατον να συμβαίνει για όλα τα $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ (πχ $u_1 = u_2 = 1/\sqrt{2}$).

β΄ τρόπος: Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Θέτοντας $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 1$ έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - x^2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Όμως παίρνοντας το παραπάνω όριο πάνω στην ημιευθεία $x = y = t > 0$ έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^4 - t^3}{2^{3/2}t^3} = \frac{1}{\sqrt{8}} \lim_{t\to 0}(t-1) = -\frac{1}{\sqrt{8}}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 2. *(1,5 + 1,5= 3 μον)* (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση και έστω $T_2(x, y)$ το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$.

(i) (0,5 μον) Γράψτε τον τύπο του $T_2(x, y)$.

(ii) (1 μον) Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + g(x, y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{T_2(x, y) + g(x, y)}{x^2 + y^2}$$

(με την έννοια ότι αν υπάρχει το ένα όριο τότε υπάρχει και το άλλο και είναι ίσα)

(β) Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης μίας C^2 συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ είναι

$$T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2\,.$$

(i) (0,5 μον) Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + xy}{x^2 + y^2}$.

(ii) (1 μον) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης στο $(0, 0)$ και εξετάστε αν το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

Λύση. (α) (i) Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\right]$$

(ii) Έστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(\frac{f(x, y) + g(x, y)}{x^2 + y^2} - \frac{T_2(x, y) + g(x, y)}{x^2 + y^2}\Big) = 0$. Από το θεώρημα Taylor γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Άρα όντως,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(\frac{f(x, y) + g(x, y)}{x^2 + y^2} - \frac{T_2(x, y) + g(x, y)}{x^2 + y^2}\Big) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

(β) (i) Από το (α) (ii) έχουμε $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{T_2(x, y) + xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$

(ii) Από το (α) (i) έχουμε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ γενικά δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\right]$$

Από την άλλη μεριά η υπόθεσή μας λέει ότι

$$T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + 2y^2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2$ και $f_{xy}(0, 0) = -1$. Άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο με $\Delta = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 4 - 1 = 3 > 0$ και $f_{xx}(0, 0) > 0$. Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου συμπεραίνουμε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 3. *(2 μον)* Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^4 - 4x^2y + 4y^2 - y^4$.

Λύση. Έχουμε

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 8xy,\ \ f_y(x,y) = -4x^2 + 8y - 4y^3$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 4x^3 - 8xy = 0 \\ -4x^2 + 8y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$4x^3 - 8xy = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = \frac{x^2}{2}$$

1) Αν $x = 0$ τότε από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = 8y - 4y^3 = 0 \Leftrightarrow 4y(2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = \pm\sqrt{2}$$

οπότε παίρνουμε τα σημεία $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ και $(0,\sqrt{2})$.

2) Αντίστοιχα αν $y = \dfrac{x^2}{2}$ η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = -4y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

οπότε έχουμε πάλι το σημείο $(0,0)$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής:

$$(0,0), \quad (0,-\sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (0,\sqrt{2})$$

Προχωρούμε στην εύρεση των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Έχουμε

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 8y,\ \ f_{yy}(x,y) = 8 - 12y^2,\ \ f_{xy}(x,y) = -8x$$

και συνεπώς

$$\Delta(x,y) = (12x^2 - 8y)(8 - 12y^2) - 64x^2$$

οπότε

$$\Delta(0,y) = -8y(8 - 12y^2)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

• Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε $\Delta(0,0) = 0$ και άρα το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν αποφαίνεται. Παρατηρούμε όμως ότι

$$f(x,y) = (x^4 - 4x^2y + 4y^2) - y^4 = (x^2 - 2y)^2 - y^4 = -y^4 < 0$$

όταν $y = x^2/2$ ενώ

$$f(x,0) = x^4 > 0$$

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

• Για το σημείο $(0,\sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0,\sqrt{2}) = -8\sqrt{2}(8 - 24) > 0$$

Επιπλέον $f_{xx}(0,\sqrt{2}) = -8\sqrt{2} < 0$. Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι στο $(0,\sqrt{2})$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

• Για το σημείο $(0,-\sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0,-\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}(8 - 24) < 0$$

Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι το $(0,-\sqrt{2})$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Άρα η f έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο το $(0,\sqrt{2})$, που ειδικότερα είναι τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 4. *(2 μον)* Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$. Τι σημαίνει γεωμετρικά το πρόβλημα αυτό?

Λύση. Για την γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος παρατηρούμε καταρχάς ότι η συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ εκφράζει μια έλλειψη του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το $(0,0)$. Παρατηρούμε επίσης ότι η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$ είναι το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου (x,y) από την αρχή των αξόνων. 'ρα τα ακρότατα της f υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ είναι στην ουσία τα σημεία της έλλειψης που απέχουν την μεγαλύτερη και την μικρότερη απόσταση από το $(0,0)$. Με ένα σχήμα βλέπουμε ότι τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία τομής της έλλειψης με τους άξονες. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι όντως είναι αυτά τα σημεία με τους παρακάτω δύο τρόπους.

α΄ τρόπος: (*Με Πολ/στές Lagrange*) Θέτουμε $g(x,y) = 4x^2 + y^2$. Έχουμε $\nabla g(x,y) = (8x, 2y)$. Επειδή $\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ έχουμε $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $4x^2 + y^2 = 16$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Lagrange τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ θα ικανοποιούν το συστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 16 \end{cases}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε συνεπώς,

$$\begin{cases} 2x = 8\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda x \\ y = \lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x(1 - 4\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\lambda = 1/4$. Αν $x = 0$ τότε $4x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$ και έχουμε τα σημεία $(0,4)$, $(0,-4)$. Αν $x \neq 0$ τότε $\lambda = 1/4$ και από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $y = 0$, οπότε από την τρίτη, $x = \pm 2$. Άρα παίρνουμε τα σημεία $(2,0)$, $(-2,0)$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι έχουμε εξής τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα $(0,4), (0,-4), (2,0), (-2,0)$ Επειδή η έλλειψη είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, από γνωστό θεώρημα η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στην καμπύλη $4x^2 + y^2 = 16$. Τα σημεία (x,y) όπου η μέγιστη και ελάχιστη τιμή λαμβάνεται θα περιέχονται στα τέσσερα πιθανά ακρότατα που βρήκαμε. Επειδή $f(2,0) = f(-2,0) = 4 < 16 = f(0,-4) = f(0,4)$ η f παρουσιάζει μέγιστο στα $(0,\pm 4)$ ενώ στα $(\pm 2, 0)$ ελάχιστο.

β΄ τρόπος: (*Με απαλοιφή της μιας μεταβλητής*) Λύνοντας την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ ως προς y^2 παίρνουμε ότι $y^2 = 16 - 4x^2$ με $x \in [-2,2]$. Αντικαθιστώντας στον τύπο της f έχουμε την συνάρτηση $F : [-2,2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = x^2 + (16 - 4x^2) = 16 - 3x^2$ που είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής. Είναι εύκολο να δούμε (ελέγξτε το) ότι η $F(x) = 16 - 3x^2$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή (αντίστοιχα μέγιστη τιμή) στο $x \in [-2,2]$ αν και μόνο αν η $f(x,y) = x^2 + y^2$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή (αντίστοιχα μέγιστη τιμή) υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ στα σημεία $(x, \pm\sqrt{16 - x^2})$. Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των ακροτάτων της F.

Τα πιθανά ακρότατα της F βρίσκονται στα άκρα του διαστήματος $[-2,2]$ και στα εσωτερικά σημεία του $(-2,2)$ όπου η παράγωγος F' μηδενίζεται και άρα είναι τα σημεία $x = \pm 2$ και $x = 0$. Επειδή $F(x) \geq 0 = F(\pm 2)$ έχουμε ότι στα $x = \pm 2$ η F εμφανίζει ελάχιστο. Επίσης, στο $x = 0$ η F λαμβάνει μέγιστη τιμή (αύξουσα αριστερά και φθίνουσα δεξιά του 0). Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στα $(0, \pm 4)$ ενώ στα $(\pm 2, 0)$ ελάχιστο.

Άσκηση 5. *(2 + 1 μον = 3 μον)* (α) Έστω $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1,1)$.

(i) (1 μον) Αποδείξτε ότι $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ για όλα τα $x \in (-1,1)$.

(ii) (0,5 μον) Βρείτε την $f^{(2024)}(0)$.

(iii) (0,5 μον) Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{4}{2^3} + \dots$

(β) (1 μον) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

Λύση. (α) (i)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

(ii) Γενικά γνωρίζουμε ότι αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ τότε

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το (α) έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Άρα $a_n = n+1$ οπότε $f^{(n)}(0) = (n+1) \cdot n! = (n+1)! \Rightarrow f^{(2024)}(0) = 2025!$.

(iii) Από το (i) έχουμε $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{4}{2^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1/2} = 4$

(β) Από Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy αρκεί να εξετάσουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \dfrac{\ln 2^n}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \ln 2}{2^n}$, η οποία συγκλίνει από το Κριτήριο ρίζας του Cauchy αφού

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n \ln 2}{2^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln 2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$