Αρμονική Ανάλυση (2023–24)

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις του Φυλλαδίου 3

1. Έστω $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ ισχύει $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ισχύει $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{imx_k} \longrightarrow 0$.

Υπόδειξη: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Εφαρμόζοντας το (i) για τη συνεχή συνάρτηση $f_m(x) = e^{imx}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{imx_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_m(x_k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\,dx = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Θεωρούμε αρχικά ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{m=-N}^{N} c_m e^{imx}$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = \sum_{m=-N}^{N} c_m \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{imx_k} = c_0 + \sum_{|m|\leqslant N,\, m\neq 0} c_m \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{imx_k} \longrightarrow c_0$$

και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,dx = \sum_{m=-N}^{N} c_m \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\,dx = c_0,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,dx. \tag{1}$$

Έστω τώρα τυχούσα $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f-p\|_\infty \leqslant \epsilon$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| &\leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,dx\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - p(x_k)| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,dx\right| \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p(x) - f(x)|\,dx \\
&\leqslant \epsilon + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,dx\right| + \epsilon,
\end{aligned}$$

διότι $|f(x_k)-p(x_k)| \leqslant \|f-p\|_\infty \leqslant \epsilon$ για κάθε k και, ομοίως, $|p(x)-f(x)| \leqslant \|f-p\|_\infty \leqslant \epsilon$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$. Αφήνοντας το $n \to \infty$, από την (1) παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| \leqslant 2\epsilon,$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| = 0.$$

2. Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(f(x) - s_n(f,x))\,dx = 0.$$

Υπόδειξη: Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(f(x) - s_n(f,x))\,dx\right| \leqslant \|g\|_2\|f - s_n(f)\|_2 \longrightarrow 0,$$

διότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$ (γνωστό από τη θεωρία).

3. Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Εξηγήστε γιατί $\|f - s_n(f)\|_2 \leqslant \|f - \sigma_n(f)\|_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και με βάση αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0$.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, η οποία είναι συνεχής στο x_0. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f, x_0)$ τότε είναι ίσο με $f(x_0)$.

Υπόδειξη: (α) Γνωρίζουμε ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \leqslant \|f - p\|_2$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n. Το $\sigma_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ n, άρα

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leqslant \|f - \sigma_n(f)\|_2.$$

Αφού $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, γνωρίζουμε ότι $\sigma_n(f) \to f$ ομοιόμορφα, δηλαδή $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \to 0$. Όμως, $\|f - \sigma_n(f)\|_2 \leqslant \|f - \sigma_n(f)\|_\infty$, άρα $\|f - \sigma_n(f)\|_2 \to 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$.

(β) Έστω ότι $s_n(f, x_0) \to \ell$. Τότε,

$$\sigma_n(f, x_0) = \frac{s_0(f,x_0) + s_1(f,x_0) + \cdots + s_{n-1}(f,x_0)}{n} \to \ell$$

(η ακολουθία των μέσων όρων μιας συγκλίνουσας ακολουθίας έχει το ίδιο όριο με αυτήν). Όμως, η f είναι συνεχής στο x_0, άρα $\sigma_n(f, x_0) \to f(x_0)$ από το θεώρημα Féjer. Συνεπώς, $\ell = f(x_0)$.

4. (α) Έστω $g, f, f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ με $\|f_n - f\|_2 \to 0$. Ορίζουμε

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt \quad \text{και} \quad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Αποδείξτε ότι $h_n \to h$ ομοιόμορφα.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,dt,$$

δηλαδή μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά Fourier της f όρο προς όρο, ακόμα κι αν αυτή αποκλίνει.

Υπόδειξη: (α) Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $\|f_n - f\|_2 \to 0$, υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να έχουμε $\|g\|_2\|f_n - f\|_2 \leqslant \epsilon$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|h_n(x) - h(x)| &= \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))g(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^x |f_n(t) - f(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_a^x |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \|f_n - f\|_2\|g\|_2 \leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα, $h_n \to h$ ομοιόμορφα.

(β) Αν θεωρήσουμε τις f και $f_n = s_n(f)$ στο $[0,2\pi]$, έχουμε $\|f_n - f\|_2 = \|s_n(f) - f\|_2 \to 0$. Από το (α) με $g \equiv 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$h_n(x) := \int_0^x s_n(f,t)\,dt \to \int_0^{2\pi} f(t)\,dt =: h(x)$$

και μάλιστα ομοιόμορφα. Όμως,

$$h_n(x) = \int_0^x s_n(f,t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k\cos ky + b_k\sin kt)\right)dt = \frac{a_0x}{2} + \sum_{k=1}^n \int_0^x (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\,dt.$$

Αυτό δείχνει ότι η σειρά $\frac{a_0x}{2} + \sum_{k=1}^\infty \int_0^x (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\,dt$ συγκλίνει στο $h(x)$, δηλαδή

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0x}{2} + \sum_{k=1}^\infty \int_0^x (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\,dt.$$

5. Χρησιμοποιώντας την $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi,\pi]$ υπολογίστε το $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4}$.

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της f. Έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3},$$

ενώ για $k \neq 0$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx}dx = -x^2\frac{e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx} = -\frac{1}{\pi ik}\frac{xe^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi ik}\frac{xe^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi k^2}(\pi e^{-ik\pi} + \pi e^{ik\pi}) = \frac{2\pi\cos k\pi}{\pi k^2} = \frac{2(-1)^k}{k^2}.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε επίσης την

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^4 dx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5}.$$

Από την ταυτότητα Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

έπεται ότι

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^4},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{4\pi^4}{8 \cdot 45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6. (α) Αποδείξτε ότι αν $a \neq 0$ τότε

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\cos kx - k\sin kx}{a^2 + k^2}\right), \qquad 0 < x < 2\pi.$$

(β) Για $0 < x < 2\pi$ και $a \neq 0$ υπολογίστε τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\cos kx}{a^2 + k^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin kx}{a^2 + k^2}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval υπολογίστε τα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + k^2)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(a^2 + k^2)^2}.$$

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε την $f(x) = e^{ax}$ στο $(0, 2\pi)$, έτουμε $f(0) = f(2\pi) = 1$ και επεκτείνουμε την f σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Για $k \geqslant 1$, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες υπολογίζουμε τους

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}\cos kx\, dx = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + k^2}$$

και

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin kx\, dx = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{-k}{a^2 + k^2}.$$

Επίσης,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax} dx = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi a}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$, άρα το θεώρημα Dini μας δίνει ότι, για κάθε $0 < x < 2\pi$,

$$e^{ax} = f(x) = S(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\cos kx - k\sin kx}{a^2 + k^2}\right). \qquad (2)$$

(β) Έστω $x \in (0, 2\pi)$. Τότε, $2\pi - x \in (0, 2\pi)$, άρα το (α) μας δίνει

$$\begin{aligned} e^{a(2\pi - x)} &= \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\cos k(2\pi - x) - k\sin k(2\pi - x)}{a^2 + k^2}\right) \qquad (3)\\ &= \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\cos kx + k\sin kx}{a^2 + k^2}\right). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3), παίρνουμε

$$e^x + e^{2\pi a - x} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a\cos kx}{a^2 + k^2}\right),$$

απ' όπου υπολογίζουμε το $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\cos kx}{a^2+k^2}$. Αφαιρώντας την (2) από την (3), υπολογίζουμε το $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin kx}{a^2+k^2}$. Ελέγξτε ότι

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh(\pi-x)}{\sinh\pi a}=\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\cos kx}{a^2+k^2} \tag{4}$$

και

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sinh(\pi-x)}{\sinh\pi a}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin kx}{a^2+k^2} \tag{5}$$

για κάθε $0<x<2\pi$.

(γ) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Parseval για τις συναρτήσεις στις (4) και (5).

7. (α) Έστω $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\|fg-s_n(f)s_n(g)\|_1=0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k)=\widehat{g}(k)=0$ για κάθε $k<0$ τότε $\widehat{fg}(k)=0$ για κάθε $k<0$.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\|fg-s_n(f)s_n(g)\|_1&=\|f(g-s_n(g))+(f-s_n(f))s_n(g)\|_1\leqslant\|f(g-s_n(g))\|_1+\|(f-s_n(f))s_n(g)\|_1\\&\leqslant\|f\|_2\|g-s_n(g)\|_2+\|f-s_n(f)\|_2\|s_n(g)\|_2\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού $f,g\in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε $\|f-s_n(f)\|_2\to 0$ και $\|g-s_n(g)\|_2\to 0$. Επίσης, $\|s_n(g)\|_2\leqslant\|g\|_2$ από την ανισότητα Bessel. Έπεται ότι

$$\|f\|_2\|g-s_n(g)\|_2+\|f-s_n(f)\|_2\|s_n(g)\|_2\leqslant\|f\|_2\|g-s_n(g)\|_2+\|f-s_n(f)\|_2\|g\|_2\to 0$$

και έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $k\in\mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\widehat{fg}(k)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx\right|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)e^{-ikx}dx-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx\right|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)g(x)-s_n(f,x)s_n(g,x)|\,dx\\&=\|fg-s_n(f)s_n(g)\|_1\longrightarrow 0\end{aligned}$$

όταν $n\to\infty$, άρα

$$\widehat{fg}(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx.$$

(γ) Έστω $k<0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\widehat{f}(m)=0$ αν $m<0$ και $\widehat{g}(\ell)=0$ αν $\ell<0$, για $n>|k|$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx&=\sum_{m=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n}\widehat{f}(m)\widehat{g}(\ell)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m+\ell-k)x}dx\\&=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\widehat{f}(m)\widehat{g}(\ell)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m+\ell-k)x}dx=0,\end{aligned}$$

διότι αν $m, \ell \geqslant 0$ τότε $m+\ell-k>0$ και συνεπώς

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x}dx = 0.$$

Από το (β) έπεται ότι

$$\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx = 0.$$

8. Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ με

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{αν } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{αν } k \leqslant 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
Υπόδειξη: Η ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ανήκει στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ διότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $|k\widehat{f}(k)| = 0$ αν $k \leqslant 0$ και $|k\widehat{f}(k)| = 1$ αν $k \geqslant 1$. Δηλαδή, η ακολουθία $\{k\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Από γνωστή πρόταση, τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_n(f)(x)| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Όμως,

$$s_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

9. (α) Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: (α) Γνωστό από τη θεωρία. Αφού $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$, η ακολουθία συναρτήσεων $s_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία έχουμε $\widehat{f}(k) = \lim\limits_{N\to\infty}\widehat{s_N}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(β) Αν υπήρχε τέτοια $f \in C(\mathbb{T})$ τότε θα είχαμε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και από την ταυτότητα Parseval θα παίρναμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 < \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.
(γ) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ αν $n = k^4$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ και $a_n = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty.$$

Από το (α) υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, για κάθε n της μορφής $n = k^4$ (δηλαδή για άπειρους $n \in \mathbb{N}$) έχουμε $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

10. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big[f(x+t) + f(x-t)\big]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

(β) Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\|s_n(f)\|_\infty = o(\ln n)$.

Υπόδειξη: (α) Εκφράζουμε το $s_n(f,x)$ μέσω του πυρήνα Dirichlet και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = -t$:

$$\begin{aligned} s_n(f,x) = (f * D_n)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(-u)}{\sin\frac{(-u)}{2}}\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt. \end{aligned}$$

Θεωρώντας το ημιάθροισμα της πρώτης και της τρίτης αναπαράστασης του $s_n(f,x)$ έχουμε ότι

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x+t) + f(x-t)\big]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

και το ζητούμενο έπεται αν παρατηρήσουμε ότι η

$$t \mapsto g(t) := \big[f(x+t) + f(x-t)\big]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

είναι άρτια, επομένως

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)\,dt.$$

(β) Θεωρούμε τη διαφορά $s_n(f,x) - f(x)$. Χρησιμοποιώντας το (α) και το γεγονός ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = 1,$$

μπορούμε να γράψουμε

$$s_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Ορίζουμε

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt.$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για δοθέν $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $|f(x+t) = f(x-t) - 2f(x)| \leqslant \epsilon$ για κάθε x και $|t| < \delta$. Θέτουμε

$$G(t) = \left|(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|.$$

Αν $n+\frac{1}{2}>\frac{1}{\delta}$ τότε

$$I_n=\int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}}G(t)\,dt+\int_{(n+\frac{1}{2})^{-1}}^{\delta}G(t)\,dt+\int_\delta^\pi G(t)\,dt.$$

Έχουμε

$$\left|\int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}}G(t)\,dt\right|\leqslant\int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt$$
$$\leqslant\int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}}\epsilon\frac{\pi}{2}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\,dt=\frac{\pi\epsilon}{2}.$$

Επίσης,

$$\left|\int_{(n+\frac{1}{2})^{-1}}^{\delta}G(t)\,dt\right|\leqslant\frac{\pi\epsilon}{2}\int_{(n+\frac{1}{2})^{-1}}^{\delta}\frac{1}{t}\,dt\leqslant\frac{\pi\epsilon}{2}\log\left(n+\tfrac{1}{2}\right).$$

Τέλος,

$$\left|\int_\delta^\pi G(t)\,dt\right|\leqslant\frac{\pi}{2\delta}\int_\delta^\pi|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dt\leqslant\frac{\pi}{2\delta}2\pi\cdot 4\|f\|_\infty.$$

Τελικά,

$$\frac{I_n}{\log(n+1/2)}\leqslant\frac{\pi\epsilon}{2\log(n+1/2)}+\frac{\pi\epsilon}{2}+\frac{\pi}{2\delta}\frac{8\pi\|f\|_\infty}{\log(n+1/2)},$$

άρα

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{I_n}{\log(n+1/2)}\leqslant\frac{\pi\epsilon}{2}.$$

Το $\epsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα έχουμε το ζητούμενο.