Αρμονική Ανάλυση (2023–24)
Υποδείξεις για τις Ασκήσεις του Φυλλαδίου 2

1. Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$ με $|f'(x) - f'(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (για κάποιο $M > 0$ και $0 < \alpha \leqslant 1$). Αποδείξτε ότι $s_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα.

Υπόδειξη: Θέτουμε $g = f'$. Για κάθε $k \neq 0$, κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} g(x-\pi/k)e^{-i(kx-\pi)}\,dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} g(x-\pi/k)e^{-ikx}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-\pi/k)e^{-ikx}\,dx,\end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της g. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - g(x-\pi/k)]e^{-ikx}\,dx,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|\widehat{g}(k)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g(x-\pi/k)|\,dx \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^\alpha dx = \frac{C}{|k|^\alpha},$$

όπου $C = M\pi^\alpha/2$. Έπεται ότι

$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{1}{ik}\widehat{f'}(k)\right| = \frac{1}{|k|}|\widehat{g}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^{1+\alpha}}.$$

Η σειρά $\sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|^{1+\alpha}}$ συγκλίνει διότι $1 + \alpha > 1$, άρα $\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. Έπεται ότι $s_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα.

2. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$. Η g είναι άρτια, άρα $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 1$. Από την υπόθεση παίρνουμε επίσης ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(-ky)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy = 0,$$

άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = 0$$

για κάθε $k \geqslant 0$. Έπεται ότι $\widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και αφού η g είναι συνεχής συμπεραίνουμε ότι $g \equiv 0$. Αυτό δείχνει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x, δηλαδή η f είναι περιττή.

3. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $f * g = f$. Αποδείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Υπόδειξη: Από την $f * g = f$ έχουμε $\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε $\widehat{g}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\widehat{g}(k)| < 1$ αν $|k| \geqslant k_0$. Έπεται ότι $\widehat{f}(k) = 0$ για $|k| \geqslant k_0$, συνεπώς η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από k_0.

4. Έστω (f_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη: Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(\widehat{g - g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - (\widehat{g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k)\widehat{f_n}(k) = \widehat{g}(k)(1 - \widehat{f_n}(k)).$$

Άρα,

$$|\widehat{g}(k)|\,|1 - \widehat{f_n}(k)| = |(\widehat{g - g * f_n})(k)| \leqslant \|g - g * f_n\|_1 \to 0.$$

Θεωρώντας την $g(x) = e^{ikx}$ (για την οποία $\widehat{g}(k) = 1$) παίρνουμε $|1 - \widehat{f_n}(k)| \to 0$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{για} \ \ |x| \leqslant \pi.$$

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της f. Με (απλές) πράξεις βλέπουμε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}),$$

ενώ αν $k \neq 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} e^{ikx},$$

η οποία συγκλίνει απολύτως. Έπεται ότι $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$f(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}(-1)^k = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1},$$

απ' όπου υπολογίζουμε το

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = 2\pi \frac{f(\pi)}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = \pi \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}.$$

6. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $-\pi \leqslant x < \pi$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$.

Υπόδειξη: Η f είναι περιττή, άρα $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx\, dx = -\frac{x\cos kx}{k\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = -\frac{2\cos k\pi}{k} = 2(-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

Άρα,

$$S(f,x) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi,\pi)$, άρα $f(x)=S(f,x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}$ για κάθε $x\in(-\pi,\pi)$, από το θεώρημα Dini.

7. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-1$ αν $-\pi<x<0$, $f(x)=1$ αν $0<x<\pi$, και $f(-\pi)=f(0)=f(\pi)=0$. Αποδείξτε ότι

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιλέγοντας κατάλληλα το x αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}.$$

Υπόδειξη: Η f είναι περιττή, άρα $a_k(f)=0$ για κάθε $k\geqslant 0$. Για κάθε $k\geqslant 1$ έχουμε

$$b_k(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx=-\frac{2\cos kx}{k\pi}\Big|_0^{\pi}=-2\frac{\cos(k\pi)-1}{k\pi}$$

Επομένως, έχουμε $b_k(f)=0$ αν ο k είναι άρτιος και $b_k(f)=\frac{4}{k\pi}$ αν ο k είναι περιττός. Άρα,

$$S(f,x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$, άρα $f(x)=S(f,x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]\setminus\{-\pi,0,\pi\}$, από το θεώρημα Dini. Στα σημεία $0,\pm\pi$, η ισότητα ισχύει και πάλι, διότι $f(0)=f(\pm\pi)=0$ και η σειρά μηδενίζεται κι αυτή: αν $x=0,\pm\pi$ τότε $\sin(2k+1)x=0$ για κάθε $k\geqslant 0$. Επομένως, $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ παίρνουμε

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right),$$

άρα

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}.$$

8. Έστω $f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos^2(k_nx+t_n)\,dx.$$

Υπόδειξη: Έχουμε

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos^2(k_nx+t_n)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2(k_nx+t_n)\,dx.$$

Αφού $k_n \to \infty$, από την $\cos 2(k_nx+t_n) = \cos(2k_nx)\cos(2t_n) - \sin(2k_nx)\sin(2t_n)$ και το λήμμα Riemann-Lebesgue παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2(k_nx+t_n)\,dx = \cos(2t_n)\int_0^{2\pi} f(x)\cos(2k_nx)dx - \sin(2t_n)\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2k_nx)dx \longrightarrow 0.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos^2(k_nx+t_n)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

9. Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε αρχικά τις $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Για $n = 0$ έχουμε $f_0 \equiv 1$ και η ζητούμενη ισότητα ισχύει (μάλιστα, για κάθε N). Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $n \neq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_n(x+k\alpha) = \frac{1}{N}e^{inx+ink\alpha} = e^{inx}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(e^{in\alpha})^k = e^{inx}\frac{1}{N}\frac{e^{in\alpha}(e^{iNn\alpha}-1)}{e^{in\alpha}-1},$$

συνεπώς

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_n(x+k\alpha)\right| \leqslant \frac{|e^{iNn\alpha}-1|}{N|e^{in\alpha}-1|} \leqslant \frac{2}{N|e^{in\alpha}-1|} \longrightarrow 0$$

όταν $N \to \infty$, αφού $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ και συνεπώς $|e^{in\alpha}-1| > 0$. Όμως,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,dt = 0,$$

άρα και πάλι ισχύει η ζητούμενη ισότητα. Επειδή τώρα η ισότητα είναι γραμμική ως προς f, συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\,dt$$

για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p και κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f-p\|_\infty \leqslant \epsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right| \\
&\quad\leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|f(x+k\alpha)-p(x+k\alpha)| + \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\,dt\right| + \|f-p\|_1 \\
&\quad\leqslant \|f-p\|_\infty + \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\,dt\right| + \|f-p\|_\infty \\
&\quad\leqslant \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\,dt\right| + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ έχουμε

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right| \leqslant 2\epsilon,$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν παίρνουμε το ζητούμενο.

10. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η f' να είναι ολοκληρώσιμη και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ και χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.]
(β) Έστω $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $h = f_1 - f_2$ στο $[-\pi,\pi]$, όπου $f_1, f_2 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι f_1', f_2' να είναι ολοκληρώσιμες. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $a_k(h) \leqslant \frac{M}{k}$ και $b_k(h) \leqslant \frac{M}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε την $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Τότε, ζητάμε $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)G'(x)\,dx = f(a)G(\xi) + f(b)(G(b) - G(\xi)) = f(b)G(b) - (f(b) - f(a))G(\xi).$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, το αριστερό μέλος γίνεται

$$\int_a^b f(x)G'(x)\,dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx,$$

διότι $G(a) = 0$. Συνεπώς, ζητάμε $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = (f(b) - f(a))G(\xi) = G(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx.$$

Το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού (έχουμε ότι $f' \geqslant 0$ διότι η f είναι αύξουσα, και η f' είναι ολοκληρώσιμη από την υπόθεση).
(β) Έστω $k \geqslant 1$. Από το (α), για $j = 1, 2$ υπάρχει $\xi_j \in [-\pi,\pi]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_j(x)\cos kx\,dx = f_j(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi_j}\cos kx\,dx + f_j(\pi)\int_{\xi_j}^{\pi}\cos kx\,dx.$$

Έχουμε

$$\left|\int_{-\pi}^{\xi_j}\cos kx\,dx\right| = \left|\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\xi_j}\right| \leqslant \frac{2}{k}$$

και όμοια

$$\left|\int_{\xi_j}^{\pi}\cos kx\,dx\right| = \left|\frac{\sin kx}{k}\Big|_{\xi_j}^{\pi}\right| \leqslant \frac{2}{k}.$$

Συνεπώς,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_j(x)\cos kx\,dx\right| \leqslant 2\frac{|f_j(-\pi)| + |f_j(\pi)|}{k}.$$

Τότε, για κάθε $k \geqslant 1$ παίρνουμε

$$|a_k(h)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_j(x)\cos kx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f_j(x)\cos kx\,dx\right| \leqslant 2\frac{|f_1(-\pi)| + |f_1(\pi)| + |f_2(-\pi)| + |f_2(\pi)|}{k} = \frac{M}{k},$$

όπου $M := |f_1(-\pi)| + |f_1(\pi)| + |f_2(-\pi)| + |f_2(\pi)|$ (σταθερά ανεξάρτητη από το k). Με τον ίδιο τρόπο φράσσουμε τους συντελεστές $b_k(h)$.