

Μικρό υδροηλεκτρικό έργο εκτροπής περιλαμβάνει δεξαμενή φόρτισης, με πρακτικά σταθερή στάθμη +400 m, αγωγό πτώσης μήκους 1500 m και ενιαίας διαμέτρου 2.5 m, σύστημα στροβίλων Francis, και διώρυγα φυγής με υψόμετρο εξόδου +340 m. Αν η μέγιστη παροχή λειτουργίας των στροβίλων είναι 20.0 m³/s, και κάνοντας εύλογες παραδοχές για τους συντελεστές υδραυλικών απωλειών, απεικονίστε τη σχέση μεταβολής του καθαρού ύψους πτώσης συναρτήσει της παροχής.

Θεωρητικό υπόβαθρο

Υπενθυμίζεται η υπολογιστική διαδικασία για την εκτίμηση των υδραυλικών απωλειών σε κυκλικούς αγωγούς υπό πίεση, που είναι το άθροισμα των γραμμικών και τοπικών απωλειών.

Έστω αγωγός μήκους L , διαμέτρου D , και ισοδύναμης τραχύτητας k_s , από τον οποίο διέρχεται παροχή Q . Οι γραμμικές απώλειες κατά μήκος του αγωγού (απώλειες λόγω τριβών) υπολογίζονται από τη σχέση Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = f \frac{8 L Q^2}{g \pi^2 D^5}$$

όπου ο συντελεστής τριβών f , για τυρβώδη ροή, δίνεται από την πεπλεγμένη σχέση Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{k_s/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

όπου Re ο αριθμός Reynolds, που αποτελεί χαρακτηριστικό δυναμικό μέγεθος της ροής (αδιάστατο), και για κυκλικούς αγωγούς ορίζεται ως:

$$Re = \frac{V D}{\nu}$$

όπου V η μέση ταχύτητα στη διατομή, και ν είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού, που για νερό σε συνθήκες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης λαμβάνεται ίσο με $\nu = 1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος (παροχή Q , διάμετρος D , απώλειες τριβών h_f), προκύπτουν τρεις εναλλακτικές διατυπώσεις του ως προς ένα άγνωστο μέγεθος, που αναφέρονται και ως πρώτο (γνωστά Q και D), δεύτερο (γνωστά h_f και D) και τρίτο (γνωστά Q και h_f) τυπικό πρόβλημα της υδραυλικής αγωγών υπό πίεση. Στην προκειμένη περίπτωση, για δεδομένη παροχή και διάμετρο, ζητείται ο υπολογισμός των γραμμικών απωλειών.

Ειδικότερα, για δεδομένα L, k_s, ν, Q, D η υπολογιστική διαδικασία έχει ως εξής:

- (1) Υπολογίζουμε την ταχύτητα: $V = 4Q/\pi D^2$
- (2) Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds: $Re = VD/\nu$
- (3) Υπολογίζουμε τη σχετική τραχύτητα: k_s/D
- (4) Εκτιμούμε τον συντελεστή τριβών, από τη σχέση Colebrook-White: $f(k_s/D, Re)$
- (5) Υπολογίζουμε τις γραμμικές απώλειες, από τη σχέση Darcy-Weisbach.

Το βήμα (4) απαιτεί μια επαναληπτική διαδικασία, κατά την οποία η πεπλεγμένη εξίσωση Colebrook-White διατυπώνεται στην αναδρομική μορφή:

$$\frac{1}{\sqrt{f^{[i+1]}}} = -2.0 \log \left(\frac{k_s/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f^{[i]}}} \right)$$

Εκκινώντας από μια εύλογη αρχική τιμή του συντελεστή τριβών, που γενικά συστήνεται να λαμβάνεται ίση με $f^{[0]} = 0.020$, υπολογίζεται η επόμενη τιμή $f^{[1]}$, που στη συνέχεια εισάγεται στο δεξί μέλος της σχέσης για την εκτίμηση της νέας τιμής $f^{[2]}$, κοκ. Σε κάθε δοκιμή, ελέγχεται η σύγκλιση της διαδικασίας, η οποία τερματίζεται όταν $f^{[i+1]} \approx f^{[i]}$. Γενικά, η μέθοδος αυτή συγκλίνει πολύ γρήγορα, και συνήθως απαιτεί έως τρεις δοκιμές.

Όσον αφορά στις τοπικές απώλειες, αυτές προκύπτουν ως άθροισμα επιμέρους απωλειών σε κάθε γεωμετρική μεταβολή της ροής (είσοδος/έξοδος από/σε δεξαμενή, αλλαγή διαμέτρου, αλλαγή κατεύθυνσης, διακλάδωση αγωγών, παρεμβολή συσκευής, κτλ.). Επειδή οι απώλειες αυτές πραγματοποιούνται σε σχετικά μικρά μήκη, για απλούστευση θεωρείται ότι προκαλούν σημειακή πτώση της γραμμής ενέργειας κατά:

$$h_L = K V^2 / 2g$$

όπου K συντελεστής τοπικών απωλειών (αδιάστατος) και V η μεγαλύτερη ταχύτητα από τις εκατέρωθεν ροές. Η τιμή του K , με μόνη εξαίρεση την απότομη διαστολή της ροής, για την οποία διατίθεται αναλυτική σχέση υπολογισμού, εκτιμάται μέσω εμπειρικών σχέσεων.

Επίλυση άσκησης

Για την κατάρτιση της ζητούμενης σχέσης, υπολογίζουμε τις γραμμικές και τοπικές υδραυλικές απώλειες για διάφορες τιμές της παροχής, με μέγιστη τα $20.0 \text{ m}^3/\text{s}$, οπότε προκύπτει μια σχέση της μορφής $\Delta H = h_f(Q) + h_L(Q)$. Το ακαθάριστο ύψος πτώσης, H , είναι ίσο με την υψομετρική διαφορά από τη θέση υδροληψίας μέχρι την έξοδο του αγωγού φυγής, ήτοι $400 - 320 = 80 \text{ m}$, ενώ το καθαρό ύψος ισούται με $H_n = H - \Delta H(Q)$.

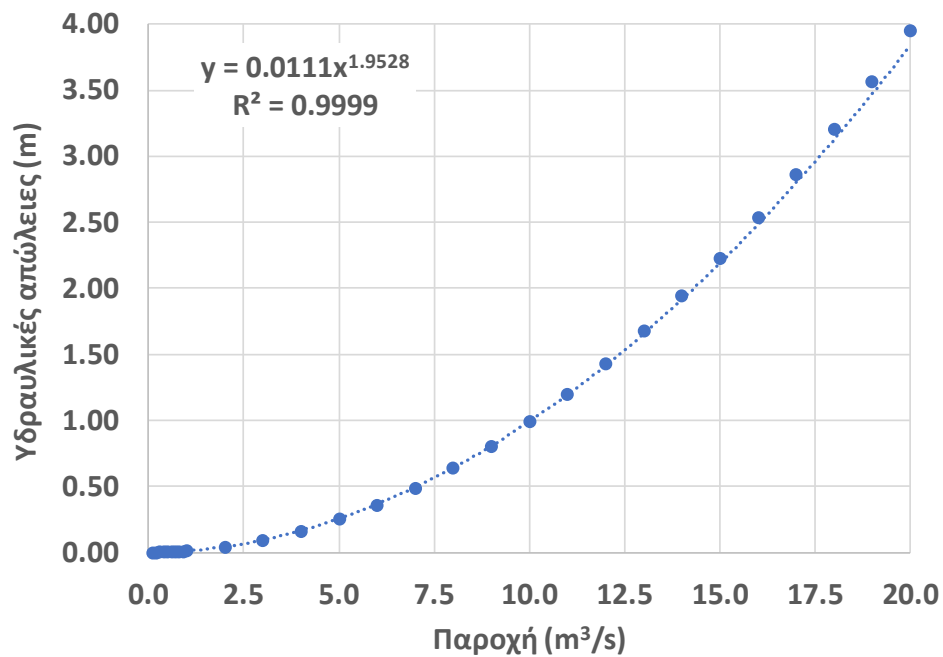
Στους υπολογισμούς των γραμμικών απωλειών, θεωρούμε ισοδύναμη τραχύτητα $k_s = 1.0 \text{ mm}$ (τυπική τιμή για σχεδιασμό αγωγών υπό πίεση), ενώ για τις τοπικές απώλειες λαμβάνεται ένας καθολικός συντελεστής $K = 2.0$ (προφανώς, αν είναι γνωστός ο σχεδιασμός του συστήματος, μπορούν να υπολογιστούν οι επιμέρους τοπικές απώλειες αναλυτικά, σε κάθε θέση). Επισημαίνεται ότι ο υπόψη συντελεστής ενσωματώνει όλες τις απώλειες που οφείλονται σε γεωμετρικές μεταβολές της ροής, μεταξύ των οποίων της έξοδο του νερού στη διώρυγα φυγής, όπου ο εν λόγω συντελεστής λαμβάνει εξ ορισμού της τιμή 1.0.

Για τη μέγιστη παροχή των στροβίλων, $Q = 20.0 \text{ m}^3/\text{s}$, προκύπτει ταχύτητα ροής ίση με $V = 2.83 \text{ m/s}$, αριθμός Reynolds $Re = 7\,716\,603$ και σχετική τραχύτητα $k_s/D = 0.000333$. Για την τυπική αρχική τιμή του συντελεστή τριβών, ήτοι $f^{[0]} = 0.0020$, προκύπτει $f^{[1]} = 0.01536$ και $f^{[2]} = 0.01537$, συνεπώς η διαδικασία συγκλίνει μετά από μόλις δύο δοκιμές. Από τη σχέση Darcy-Weisbach, οι γραμμικές απώλειες εκτιμώνται σε 3.14 m , ενώ οι τοπικές απώλειες, για $K = 2.0$, προκύπτουν ίσες με 0.82 m . Συνεπώς, για $Q = 20.0 \text{ m}^3/\text{s}$, οι συνολικές υδραυλικές απώλειες είναι ίσες με $\Delta H = 3.95 \text{ m}$, οπότε το καθαρό ύψος πτώσης είναι $H_n = 76.05 \text{ m}$.

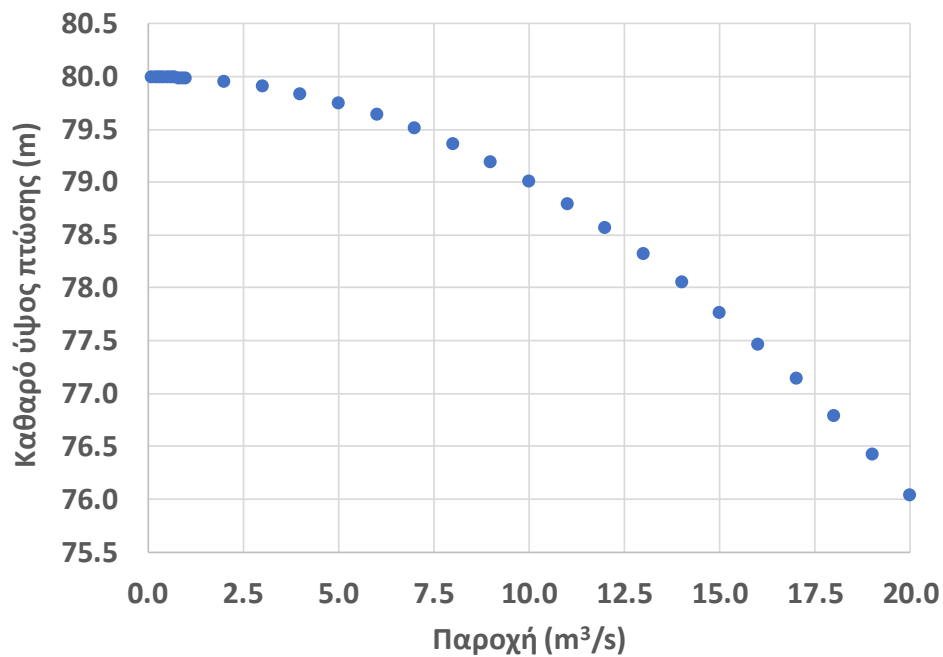
Οι υπολογισμοί για διάφορες τιμές της παροχής συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα. Στα διαγράμματα διασποράς που ακολουθούν, απεικονίζεται η σχέση μεταβολής των συνολικών υδραυλικών απωλειών συναρτήσει την παροχής, η οποία προσεγγίζεται από μια εξίσωση παλινδρόμησης μορφής δύναμης, ήτοι $\Delta H = 0.0111Q^{1.953}$, οπότε, αντίστοιχα, το καθαρό ύψος πτώσης είναι $H_n = 80.0 - 0.0111Q^{1.953}$. Σημειώνεται ότι προσεγγιστικές αναλυτικές σχέσεις είναι πιο εύχρηστες για γρήγορους υπολογισμούς σε μοντέλα προσομοίωσης.

Πίνακας 1: Αναλυτικά αποτελέσματα υδραυλικών υπολογισμών.

Παροχή (m ³ /s)	Ταχύτητα (m/s)	Αριθμός Reynolds	Συντελ. τριβών	Γραμμικές απώλειες (m)	Τοπικές απώλειες (m)	Σύνολο (m)	Καθαρό ύψος πτώσης (m)
20.0	2.83	7 716 603	0.01537	3.14	0.82	3.95	76.05
19.0	2.69	7 330 773	0.01538	2.83	0.74	3.57	76.43
18.0	2.55	6 944 943	0.01538	2.54	0.66	3.20	76.80
17.0	2.41	6 559 113	0.01539	2.27	0.59	2.86	77.14
16.0	2.26	6 173 283	0.01539	2.01	0.52	2.53	77.47
15.0	2.12	5 787 452	0.01540	1.77	0.46	2.23	77.77
14.0	1.98	5 401 622	0.01541	1.54	0.40	1.94	78.06
13.0	1.84	5 015 792	0.01542	1.33	0.34	1.67	78.33
12.0	1.70	4 629 962	0.01543	1.13	0.29	1.43	78.57
11.0	1.56	4 244 132	0.01545	0.95	0.25	1.20	78.80
10.0	1.41	3 858 302	0.01546	0.79	0.20	0.99	79.01
9.0	1.27	3 472 471	0.01548	0.64	0.17	0.80	79.20
8.0	1.13	3 086 641	0.01551	0.51	0.13	0.64	79.36
7.0	0.99	2 700 811	0.01554	0.39	0.10	0.49	79.51
6.0	0.85	2 314 981	0.01558	0.29	0.07	0.36	79.64
5.0	0.71	1 929 151	0.01564	0.20	0.05	0.25	79.75
4.0	0.57	1 543 321	0.01573	0.13	0.03	0.16	79.84
3.0	0.42	1 157 490	0.01587	0.07	0.02	0.09	79.91
2.0	0.28	771 660	0.01613	0.03	0.01	0.04	79.96
1.0	0.14	385 830	0.01684	0.01	0.00	0.01	79.99
0.9	0.13	347 247	0.01699	0.01	0.00	0.01	79.99
0.8	0.11	308 664	0.01716	0.01	0.00	0.01	79.99
0.7	0.10	270 081	0.01737	0.00	0.00	0.01	79.99
0.6	0.08	231 498	0.01764	0.00	0.00	0.00	80.00
0.5	0.07	192 915	0.01800	0.00	0.00	0.00	80.00
0.4	0.06	154 332	0.01848	0.00	0.00	0.00	80.00
0.3	0.04	115 749	0.01921	0.00	0.00	0.00	80.00
0.2	0.03	77 166	0.02043	0.00	0.00	0.00	80.00
0.1	0.01	38 583	0.02311	0.00	0.00	0.00	80.00



Εικόνα 1: Διάγραμμα παροχής – συνολικών υδραυλικών απωλειών, και προσαρμογή σχέσης παλινδρόμησης μορφής δύναμης.



Εικόνα 2: Διάγραμμα παροχής – καθαρού ύψους πτώσης.