Μαθηματική Ανάλυση II

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2024

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Σειρές Πραγματικών αριθμών

1.1 Βασικοί ορισμοί

Σειρά είναι μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

ονομάζεται ***μερικό άθροισμα της σειράς*** και η ακολουθία (s_n) που προκύπτει απο αυτά καλείται ***ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς***. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο "$\sum$" του αθροίσματος γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

και ομοίως

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Παρατήρηση 1.1.1. Μπορούμε να πάρουμε την ακολουθία (a_n) από την (s_n) αφού $a_1 = s_1$ και για κάθε $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Παρατήρηση 1.1.2. Πολλές φορές είναι χρήσιμο η άθροιση σε μια σειρά να ξεκινάει από το $n = 0$ αντί για το $n = 1$ (ή ακόμη και από άλλους φυσικούς αριθμούς πχ. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$). Στην περίπτωση αυτή για τη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

και για τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

δηλαδή $s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ \dots$

Ορισμός 1.1.3. *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

*(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε το όριο αυτό καλείται **όριο** (ή **άθροισμα**) της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

*Όταν το όριο s της σειράς είναι πραγματικός αριθμός θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** στο $s \in \mathbb{R}$ ή ότι η σειρά είναι **συγκλίνουσα**. Όταν το όριο της σειράς είναι το $+\infty$ (αντ. το $-\infty$) τότε θα λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει** στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$). Μια σειρά που δεν είναι συγκλίνουσα (δηλαδή το όριό της είτε δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$) θα καλείται **αποκλίνουσα** σειρά. Ειδικότερα, αν όριό της δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η σειρά **ταλαντώνεται**.*

Παράδειγμα 1.1.4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$ είναι ένα παράδειγμα αποκλίνουσας σειράς που ταλαντώνεται. Πράγματι, έχουμε $s_{2n} = 0 \to 0$ και $s_{2n-1} = -1 \to -1$ και συνεπώς το όριο της (s_n) δεν υπάρχει (διότι αν υπήρχε τότε οι υπακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) θα συνέκλιναν στο ίδιο όριο).

Πρόταση 1.1.5. *Έστω οι συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Απόδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντίστοιχα. Τότε για τα μερικά αθροίσματα w_n της $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ έχουμε

$$w_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda s_n + \mu \tau_n$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n + \mu \lim_{n\to+\infty} \tau_n$$

δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

□

1.1.1 Μερικά παραδείγματα σειρών

1) Η ***γεωμετρική σειρά***

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots$$

ή γενικότερα

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + a\lambda^3 + \dots$$

όπου $a \neq 0, \lambda$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Όπως θα δούμε η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $\lambda \in (-1,1)$ και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \frac{a}{1-\lambda}$$

Πχ.

$$0,3333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Η ***αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Γενικότερα, έχουμε τις p-***αρμονικές σειρές***,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

όπου $p \in \mathbb{R}$. Θα δούμε ότι η p-αρμονική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $p > 1$. 4) Οι ***εναλλάσσουσες σειρές*** δηλαδή σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

όπου $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η *εναλλάσσουσα αρμονική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Παρατήρηση 1.1.6. Αποδεικνύεται ότι

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$$

ενώ

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Επίσης για τον αριθμό e έχουμε ότι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

1.1.2 Κάποιες πολύ πρώτες προτάσεις σύγκλισης σειρών.

Η θεωρία των σειρών επικεντρώνεται στην εύρεση κριτηρίων που δείχνουν αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Υπενθυμίζουμε ότι όταν λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* εννοούμε ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, όπου $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

Το πρώτο πράγμα που βλέπουμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι οι όροι της, δηλαδή η ακολουθία (a_n). Επειδή

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

έπεται άμεσα ότι αν $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Έτσι καταλήγουμε στο εξής

Πρόταση 1.1.7. *(**Κριτήριο Όρων**) Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ισοδύναμα, αν η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.1.8. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ (αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$).

Πρόταση 1.1.9. *Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \dots$ συγκλίνει μόνο για $\lambda \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \frac{a}{1-\lambda}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n$ συγκλίνει τότε απο την Πρόταση 1.1.7 θα πρέπει $\lim_{n\to+\infty}(a\lambda^n) = a\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. Επειδή $a \neq 0$ αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $|\lambda| \geq 1$ αφού τότε $|\lambda^n| = |\lambda|^n \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $\lambda \in (-1, 1)$ επειδή

$$s_n = a + a\lambda + \dots + a\lambda^n = a\frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$$

θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(a\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\right) = a\frac{1 - \lim_{n\to+\infty} \lambda^{n+1}}{1-\lambda} = \frac{a}{1-\lambda}$$

□

Παρατήρηση 1.1.10. Τονίζουμε ότι η Πρόταση 1.1.7 ***δεν*** μας λέει ότι αν $a_n \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Πχ. $1/n \to 0$ αλλά όπως έχουμε αναφέρει η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (θα το αποδείξουμε αυτό στην επόμενη παράγραφο).

Το δεύτερο γενικό Κριτήριο σύγκλισης σειρών είναι το Κριτήριο Cauchy. Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) καλείται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x_m - x_n| < \varepsilon$ για όλα τα $m > n \geq n_0$. Ένα σημαντικό θεώρημα στην Ανάλψση είναι ότι μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy. Επειδή εξ ορισμού μια σειρά καλείται συγκλίνουσα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι συγκλίνουσα, όσον αφορά τις σειρές το Κριτήριο Cauchy αναδιατυπώνεται άμεσα ως εξής:

Πρόταση 1.1.11. *(**Κριτήριο Cauchy για σειρές**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι Cauchy, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$|s_m - s_n| = a_{n+1} + \dots + a_m < \varepsilon$$

για όλα τα $m > n \geq n_0$.

Το Κριτήριο Cauchy είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη άλλων κριτηρίων σύγκλισης σειρών που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια.

1.2 Κριτήρια σειρών με μη αρνητικούς όρους.

Οι πρώτες σειρές που μελετάμε είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μερικά βασικά κριτήρια σύγκλισης τέτοιων σειρών. Είναι εύκολο καταρχάς να δούμε ότι τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους αποτελούν μια **αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών** αφού

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \geq 0$$

Ως γνωστόν, μια αύξουσα ακολουθία είτε είναι άνω φραγμένη και τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε δεν είναι άνω φραγμένη και τότε αποκλίνει στο $+\infty$. Συνεπώς, αν $a_n \geq 0$ τότε είτε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in [0, +\infty)$ ή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Με άλλα λόγια πάντα υπάρχει το άθροισμα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους (μπορεί όμως να είναι και το $+\infty$). Έχουμε συνεπώς το εξής.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(1) Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει (σε ένα μη αρνητικό πραγματικό αριθμό).

(2) Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

1.2.1 Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο.

Ορισμός 1.2.2. *Αν $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq a$, το **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f ορίζεται να είναι το όριο*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$$

Το παραπάνω όριο πάντα υπάρχει (επειδή η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ είναι αύξουσα όταν η f είναι θετική) μπορεί να είναι όμως και $+\infty$. Στην περίπτωση όπου το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ είναι πραγματικός αριθμός λέμε ότι ***το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει***. Διαφορετικά λέμε ότι ***αποκλίνει***.

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω $p \geq 1$ και $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(t) = \frac{1}{t^p}.$$

(i) Αν $p = 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = +\infty$$

και άρα το το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ αποκλίνει.

(ii) Αν $p > 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,dt = \frac{1}{p-1}$$

και άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,dt$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$(\ln t)' = 1/t \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

ενώ για κάθε $a \neq -1$,

$$\left(\frac{t^{a+1}}{a+1}\right)' = t^a \Rightarrow \int_1^x t^a\,dt = \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

ενώ αν $p > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \frac{1}{p-1}$$

αφού λόγω του ότι $p > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-p+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0.$ □

Πρόταση 1.2.4. ***(Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο)*** *Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια θετική και φθίνουσα συνάρτηση. Έστω $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ συγκλίνει. Ειδικότερα, Ισχύει ότι*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1.2.1}$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φθίνουσα έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ για κάθε $x \in [k, k+1]$ και άρα

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq 2$,

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \geq \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx \geq f(2) + \cdots + f(n)$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{n} f(n) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)$$

οπότε

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a_n = f(n)$ και παίρνοντας όρια έπεται η (1.2.1). □

Παρατήρηση 1.2.5. (*Προσέγγιση του αθροίσματος* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$) Αν $f(x) = 1/x$ τότε η σχέση (1.2.1) δίνει

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

Πρόταση 1.2.6. *Η αρμονική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *αποκλίνει ενώ η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *με* $p > 1$, *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Πράγματι, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t$. Απο τη Πρόταση 1.2.3 έχουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ αποκλίνει και άρα απο το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Αντίστοιχα, για $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t^p$ και από την Πρόταση 1.2.3 το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt$ συγκλίνει. □

1.2.2 Το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy.

Περνάμε τώρα σε ένα δεύτερο Κριτήριο για σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών.

Πρόταση 1.2.7. ***(Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy)*** *Έστω* (a_n) *φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ *συγκλίνει. Ειδικότερα, ισχύει ότι*

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \tag{1.2.2}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την δεξιά ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) + \dots \\
&\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^k}) + \dots \\
&= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την αριστερή ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^k+1} + \dots + a_{2^{k+1}}) + \dots \\
&\geq a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \dots + (a_{2^{k+1}} + \dots + a_{2^{k+1}}) + \dots \\
&= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^k a_{2^{k+1}} + \dots \\
&\geq \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^n}.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.2.8. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο συμπύκνωσης μπορούμε να δώσουμε και μια γρήγορη απόδειξη της μη σύγκλισης της αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty$$

Παρατήρηση 1.2.9. Γενικότερα, μπορούμε ομοίως να δείξουμε ότι για κάθε $k \geq 0$ ισχύει ότι

$$\text{η σειρά } \sum_{n=2^k}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά } \sum_{n=k}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots \text{ συγκλίνει}$$

Παράδειγμα 1.2.10. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ αποκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

1.2.3 Κριτήρια Σύγκρισης

Πρόταση 1.2.11. *(**Κριτήριο άμεσης σύγκρισης**) Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών με την ιδιότητα $a_n \leq b_n$, για κάθε $n \geq N_0$. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή ισοδύναμα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αν $m > n \geq N_0$ τότε από την υπόθεσή μας έπεται ότι

$$|s_m - s_n| = s_m - s_n = a_m + \cdots + a_{n+1} \leq b_m + \cdots + b_{n+1} = \tau_m - \tau_n = |\tau_m - \tau_n|$$

Από την σχέση αυτή έπεται ότι αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Ισοδύναμα αν η (s_n) δεν είναι Cauchy τότε ούτε και η (τ_n) είναι Cauchy. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Cauchy η πρόταση έπεται. □

Παράδειγμα 1.2.12. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή όπως έχουμε πεί και θα εξηγήσουμε στα επόμενα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.13. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $0 < \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, ι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Πρόταση 1.2.14. ***(Κριτήριο οριακής σύγκρισης)*** *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$$

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$ για $\varepsilon = L/2$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \Rightarrow 0 < \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n \tag{1.2.3}$$

Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Από την (1.2.3) έπεται ότι

$$0 < \tau_n < \frac{2}{L} \cdot s_n \tag{1.2.4}$$

και

$$0 < s_n < \frac{3L}{2} \cdot \tau_n. \tag{1.2.5}$$

Έστω τώρα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η (s_n) είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη. Από την (1.2.4) έπεται ότι η (τ_n) είναι άνω φραγμένη και συνεπώς από την Πρόταση 1.2.1 η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Αντίστοιχα με τον ίδιο συλογισμό και χρησιμοποιώντας την (1.2.5) δείχνουμε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Παράδειγμα 1.2.15. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.16. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.17. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\frac{n+1}{n^2+5n+7}=\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}=1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

1.2.4 Το Κριτήριο Λόγου και το Κριτήριο Ρίζας.

Τα κριτήρια Λόγου (D'Alembert) και αντίστοιχα Ρίζας (Cauchy) ανάγουν την σύγκλιση μιας σειράς με θετικούς όρους στην μελέτη της ακολουθίας των λόγων $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και αντίστοιχα των n-οστών ριζών $\sqrt[n]{a_n}$. Πρόκειται στην ουσία για δύο κριτήρια σύγκρισης της σειράς με την γεωμετρική σειρά.

Πρόταση 1.2.18. ***(Κριτήριο Λόγου)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με $a_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$$

(1) Αν $\lambda<1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\lambda>1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (1) Έστω $\lambda<1$ και έστω $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda+\varepsilon<1$. Αφού $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$ υπάρχει $N_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\lambda+\varepsilon \tag{1.2.6}$$

για κάθε $n\geq N_0$. Θέτουμε $\tilde{\lambda}=\lambda+\varepsilon$. Από την (1.2.6) και με επαγωγή έπεται ότι

$$a_{n_0+k}<a_{n_0}\tilde{\lambda}^k$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Θέτοντας $c=\dfrac{a_{n_0}}{\tilde{\lambda}^{n_0}}$ παίρνουμε ότι

$$a_n\leq c\tilde{\lambda}^n$$

για κάθε $n\geq N_0$. Επειδή $0<\tilde{\lambda}<1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}c\tilde{\lambda}^n$ συγκλίνει (Πρόταση 1.1.9) και άρα απο το Κριτήριο σύγκρισης (Πρόταση 1.2.11) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

(2) Έστω $\lambda>1$ και έστω $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda-\varepsilon>1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$ υπάρχει

$N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda - \varepsilon > 1$ για κάθε $n \geq N_0$. Συνεπώς,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

για κάθε $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) είναι τελικά αύξουσα και ειδικότερα, $a_n \geq a_{N_0} > 0$ για κάθε $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν και άρα από το Κριτήριο Όρων (Πρόταση 1.1.7) η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 1.2.19. Το Κριτήριο Λόγου δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

και αντίστοιχα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

αλλά, όπως είδαμε απο το Ολοκληρωτικό Κριτήριο, η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.20. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Παράδειγμα 1.2.21. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Περνάμε τώρα στο Κριτήριο Ρίζας.

Πρόταση 1.2.22. *(**Κριτήριο Ρίζας**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

(1) Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (1) Έστω $\lambda < 1$ και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda + \varepsilon < 1$. Αφού $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda + \varepsilon \tag{1.2.7}$$

για κάθε $n \geq N_0$. Θέτουμε $\tilde{\lambda} + \lambda + \varepsilon$. Από την (1.2.7) έπεται ότι

$$a_n \leq \tilde{\lambda}^n$$

για κάθε $n \geq N_0$. Επειδή $0 < \tilde{\lambda} < 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}^n$ συγκλίνει (Πρόταση 1.1.9) και άρα απο το Κριτήριο Σύγκρισης (Πρόταση 1.2.11) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Έστω $\lambda > 1$ και έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\tilde{\lambda} = \lambda - \varepsilon > 1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sqrt[n]{a_n} \geq \lambda - \varepsilon > 1$ για κάθε $n \geq N_0$. Συνεπώς,

$$a_n > 1$$

για κάθε $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) δεν συγκλίνει στο μηδέν και άρα από το Κριτήριο Όρων η σειρά δεν συγκλίνει. □

Παράδειγμα 1.2.23. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{3n}{5n+4}\Big)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Big(\frac{3n}{5n+4}\Big)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{5n+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{5+4/n} = 3/5 < 1.$$

Παρατήρηση 1.2.24. Όπως και το Κριτήριο Λόγου, το Κριτήριο Ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

και ομοίως

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \big(\sqrt[n]{n}\big)^2} = \frac{1}{\big(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\big)^2} = 1$$

αλλά η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παρατήρηση 1.2.25. Είναι γνωστό ότι για μια ακολουθία (a_n) θετικών όρων

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

(η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει). Άρα το Κριτήριο Ρίζας αποφαίνεται όπου αποφαίνεται και το Κριτήριο Λόγου (με τον ίδιο βέβαια τρόπο). Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου το Κριτήριο Λόγου δεν αποφαίνεται αλλά το Ρίζας μπορεί να αποφανθεί. Πχ. η σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\dots$$

συγκλίνει (στο 2). Είναι $a_{2n-1}=a_{2n}=1/2^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=1 \;\text{ ενώ }\; \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=1/2$$

και άρα το Κριτήριο Λόγου δεν μπορεί να αποφανθεί. Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1/2<1$ και άρα από το Κριτήριο Ρίζας η σειρά συγκλίνει.

1.3 Εναλλάσσουσες σειρές

Πόρισμα 1.3.1. ***(Κριτήριο Leibniz)*** *Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών όρων. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-\dots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Δίνουμε σύντομα την απόδειξη. Έστω (s_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Παρατηρούμε ότι η (s_{2n}) είναι γνησίως αύξουσα, η (s_{2n-1}) γνησίως φθίνουσα και $s_{2n}<s_{2n-1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα οι ακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν ως μονότονες και φραγμένες. Επειδή $s_{2n-1}-s_{2n}=a_{2n}\to 0$ οι (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο $s\in\mathbb{R}$ και συνεπώς $s_n\to s$. □

Παράδειγμα 1.3.2. Η *εναλλάσσουσα αρμονική* δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots$$

συγκλίνει αφού η $(1/n)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

Παράδειγμα 1.3.3. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\dots$ συγκλίνει αφού η $(1/n!)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

1.4 Απόλυτη σύγκλιση σειρών

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ για να εξετάσουμε την σύγκλισή της την μετατρέπουμε σε σειρά με μη αρνητικούς όρους αντικαθιστώντας τους όρους της a_n με τα απόλυτά τους $|a_n|$. Αν η προκύπτουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει τότε θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ***συγκλίνει απολύτως***. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Cauchy αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

Πρόταση 1.4.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Απόδειξη. Έστω $\tau_n=|a_1|+\cdots+|a_n|$ και $s_n=a_1+\cdots+a_n$ τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m>n$ έχουμε

$$|s_m-s_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_m|\le|a_{n+1}|+\cdots+|a_n|=|\tau_m-\tau_n|$$

και άρα αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Άρα από το Κριτήριο Cauchy αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει. □

Παρατήρηση 1.4.2. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η εναλλάσσουσα αρμονική $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Με την χρήση της Πρότασης 1.4.1 τα Κριτήρια Λόγου και Ρίζας διατυπώνονται για σειρές με γενικούς όρους ως εξής.

Πρόταση 1.4.3. ***(Γενικό Κριτήριο Λόγου)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$$

(i) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(ii) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Πρόταση 1.4.4. ***(Γενικό Κριτήριο Ρίζας)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

(i) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(ii) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.4.5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε η σειρά είναι η $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ και άρα συγκλίνει στο 1. Αν $x \neq 0$ τότε θέτοντας $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα από το Κριτήριο λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει.

1.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1.5.1. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι.

(α) Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνε.

[*Υπόδειξη:* (α) Λάθος πχ. η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. (β) Σωστό, η (a_n) είναι αύξουσα και άρα $a_n \geq a_1 > 0$.]

Άσκηση 1.5.2. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι.

(α) Αν $\lim(na_n) = 1$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(β) Αν $\lim(n^2 a_n) = 1$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

[*Υπόδειξη:* Σωστά και τα δύο, από Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης]

Άσκηση 1.5.3. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι.

(α) Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_n = \pm 1$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ συγκλίνει.

(β) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$ συγκλίνει.

[*Υπόδειξη:* (α) Σωστό από Κριτήριο Απόλυτης Σύγκλισης. (β) Λάθοσ]

Άσκηση 1.5.4. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Με κριτήρια σύγκλισης σειρών δείξτε ότι*

(α) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow a_n \to 0.$

(β) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n \to 0.$

[*Υπόδειξη:* Κριτήρια Ρίζασ-Λόγου και Όρων.]

Άσκηση 1.5.5. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές :*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, 2^n}{n^n}.$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right).$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Άσκηση 1.5.6. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{n^n}$ *για τις διάφορες τιμές του* $x\in\mathbb{R}$.

[*Υπόδειξη:* Με (γενικό) Κριτήριο Λόγου η σειρά συγκλίνει για $|x|<e$ και αποκλίνει για $|x|>e$. Για $|x|=e$ χρησιμοποιείστε ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$.]

Άσκηση 1.5.7. *(α) Έστω* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *και* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *σειρές με θετικούς όρους. Αν* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *για κάθε* $n\geq N_0$ *δείξτε τα εξής:*

(i) *Αν η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *συγκλίνει τότε και η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *συγκλίνει.*

(ii) *Αν η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *αποκλίνει τότε και η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *αποκλίνει.*

(β) Δείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}$ *αποκλίνει.*

[*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι $\dfrac{a_n}{a_{n_0}}\leq\dfrac{b_n}{b_{n_0}}$ για κάθε $n\geq N_0$.]

Άσκηση 1.5.8. *(Γενίκευση του κριτηρίου Συμπύκνωσης του Cauchy) Έστω* (a_n) *φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και έστω* $(m_k)_{k=0}^{\infty}$ *γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών με* $m_0=1$. *Για κάθε* $n=0,1,\ldots$ *θέτουμε* $\delta_n^+=m_{n+1}-m_n$ *και* $\delta_n^-=m_n-m_{n-1}$ *(για* $n=0$ *θέτουμε* $\delta_n^-=m_0=1$*).*

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^-a_{m_n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^+a_{m_n}$$

(β) Αν υπάρχει $c>0$ *τέτοιο ώστε* $\dfrac{\delta_n^+}{\delta_n^-}\leq c$ *δείξτε ότι*

$$\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^+a_{m_n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^+a_{m_n}$$

και συμπεράνετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^+a_{m_n}$ *συγκλίνει.*

(γ) Έστω $k\in\mathbb{N}$ *και* (a_n) *φθίνουσα θετική. Δείξτε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty}k^na_{k^n}$ *συγκλίνει.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Δυναμοσειρές

2.1 Βασικοί ορισμοί, σύγκλιση δυναμοσειράς

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_0 \in \mathbb{R}$. Η παράσταση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ καλείται *δυναμοσειρά*. Το σημείο x_0 καλείται *κέντρο* της δυναμοσειράς και οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots$ καλούνται *συντελεστές* της δυναμοσειράς. Αν το κέντρο είναι το $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά παίρνει την πιο απλή μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που εμφανίζονται με τις δυναμοσειρές είναι για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά έχει νόημα δηλαδή για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει. Εύκολα βλέπουμε βέβαια ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0$ αφού στην περίπτωση αυτή γίνεται η σειρά $a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$. Το θέμα είναι αν συγκλίνει και για άλλα $x \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται [1]ότι σε κάθε δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ αντιστοιχεί ένας αριθμός $R \geq 0$, ο οποίος καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς, με την εξής ιδιότητα:

Η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| < R$ ενώ αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| > R$.

(Αν $R = 0$ εννοούμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$ και αντίστοιχα αν $R = +\infty$ εννοούμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$).

Παρατηρείστε ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αν η δυναμοσειρά συγκλίνει ή όχι στα σημεία $x = x_0 \pm R$. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται για κάθε δυναμοσειρά ξεχωριστά. Άρα στην περίπτωση αυτή το σύνολο *όλων* των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ και ίσως ένα ή και τα δύο άκρα του. Έχουμε συνεπώς ότι το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R συγκλίνει, αποτελεί ένα διάστημα I

[1] *Θεώρημα Cauchy–Hadamard*

του $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τους εξής εγκλεισμούς

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$$

Το διάστημα αυτό θα καλείται *ακριβές διάστημα σύγκλισης* ενώ το διάστημα (x_0-R, x_0+R) θα καλείται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Παρατηρείστε ότι αν $R = 0$ τότε $I = \{x_0\}$ ενώ αν $R = +\infty$ τότε $I = \mathbb{R}$.

Για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ μια δυναμοσειρά και έστω ότι το όριο*

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{2.1.1}$$

ή το όριο[2]

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varrho \tag{2.1.2}$$

υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο). Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι

$$R = \frac{1}{\varrho} \tag{2.1.3}$$

(με τις συμβάσεις $\frac{1}{+\infty} = 0$ και $\frac{1}{0} = +\infty$).

Απόδειξη. Όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο των Σειρών, αν το όριο $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ υπάρχει τότε υπάρχει και το $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσα μεταξύ τους. Υποθέτουμε συνεπώς ότι το όριο $\varrho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ υπάρχει.

Έστω ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = x_0$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = 0$) και άρα μπορούμε να υποθέσουμε για την συνέχεια ότι $x \neq x_0$. Εξετάζουμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ με το Κριτήριο Ρίζας. Θέτοντας $b_n = a_n(x - x_0)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x-x_0|\right)\\
&= |x-x_0|\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)\\
&= |x-x_0|\cdot\varrho = \frac{|x-x_0|}{R}
\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1) $R = 0$: Τότε $\lambda = +\infty > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ αποκλίνει. Επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του x_0 έχουμε ότι η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $x \neq x_0$.

2) $R = +\infty$: Τότε $\lambda = 0 < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ συγκλίνει. Πάλι, επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του x_0 έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \neq x_0$. Επειδή συγκλίνει και για $x = x_0$ έπεται ότι στην περίπτωση αυτή συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

[2]στην περίπτωση βέβαια όπου $a_n \neq 0$

3) $R \in (0, +\infty)$: Εδώ έχουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις :

(α) Αν $|x - x_0| < R$ έχουμε ότι $\lambda < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ συγκλίνει. Συνεπώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < R$.

(β) Αν $|x - x_0| > R$ έχουμε ότι $\lambda > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ αποκλίνει. Συνεπώς, η δυναμοσειρά αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| > R$. □

Παράδειγμα 2.1.2. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά αυτή είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο x και άρα (όπως είδαμε στο κεφάλαιο των σειρών) συγκλίνει μόνο για $x \in (-1, 1)$ και μάλιστα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Την σύγκλιση στο $(-1, 1)$ μπορούμε να την δούμε πολύ εύκολα και με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1.1 αφού $a_n = 1$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \text{ ή } \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Παρατηρείστε ότι στα σημεία $x = \pm 1$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει (για $x = 1$ παίρνει γίνεται η σειρά $1 + 1 + \dots = +\infty$ ενώ για $x = -1$ γίνεται η σειρά $1 - 1 + 1 - \dots$ που ταλαντώνεται). Άρα το ανοικτό διάστημα $(-1, 1)$ είναι και το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παράδειγμα 2.1.3. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1/n!$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε άμεσα $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ και άρα η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.1.4. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_0 = 0$ και $a_n = (-1)^n/n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ και άρα $R = 1$. Επίσης για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται η εναλλάσουσα αρμονική και άρα συγκλίνει ενώ για $x = -1$ είναι η σειρά $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$. Συνεπώς, το διάστημα $(-1, 1]$ είναι το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παράδειγμα 2.1.5. Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

Για τους συντελεστές της παρατηρούμε ότι $a_{2n-1} = 0$ και $a_{2n} = 1$ και εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ είναι η ίδια ακολουθία με την (a_n) η οποία δεν συγκλίνει. Την περίπτωση αυτή μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε και ως εξής: Θέτουμε $t = x^2$ και έχουμε

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots = 1 + t + t^2 + \ldots$$

Όπως είδαμε παραπάνω, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ είναι $R = 1$. Μπορούμε τώρα να δούμε ότι η αρχική μας δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Πράγματι, έστω $|x| < 1$. Τότε $|t| = |x^2| < 1$ οπότε η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ συγκλίνει. Ομοίως αν $|x| \geq 1$ τότε $|t| = x^2 \geq 1$ και άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ δεν συγκλίνει. Παρατηρείστε επίσης ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda = x^2$ και άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Ένας γενικός τρόπος για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ όταν δεν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ είναι να εφαρμόσουμε *κατευθείαν* το κριτήριο ρίζας ή λόγου όπως στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1.6. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ είναι $R = 1/\sqrt{2}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $a_{2n+1} = 0$ και $a_{2n} = \dfrac{2^n}{n}$ και άρα

$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{0} \to 0$$

ενώ

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{2^n}{n}} = \frac{\sqrt[2n]{2^n}}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \to \sqrt{2}$$

Συνεπώς η ακολουθία $(\sqrt[n]{a_n})$ δεν συγκλίνει και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1.1. Για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς εργαζόμαστε ως εξής. Σταθεροποιούμε καταρξήν ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε μηδενίζονται όλοι οι όροι της δυναμοσειράς και προφανώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = 0$. Αν $x \neq 0$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ έχει γενικό όρο $b_n = \dfrac{2^n}{n} x^{2n} \neq 0$ και άρα

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1} x^{2(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n x^{2n}}\right| = 2\frac{n+1}{n} x^2 \to 2x^2$$

Επειδή

$$2x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{2} \text{ και } 2x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1/\sqrt{2}$$

από το Κριτήριο Λόγου έχουμε ότι αν $|x| < 1/\sqrt{2}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ συγκλίνει ενώ αν $|x| > 1/\sqrt{2}$ η σειρά αποκλίνει. Άρα $R = 1/\sqrt{2}$.

Στα σημεία $x = \pm 1/\sqrt{2}$ η δυναμοσειρά γίνεται η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που αποκλίνει και άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης ταυτίζεται με το διάστημα σύγκλισης $(-R, R)$. □

Παράδειγμα 2.1.7. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

για κάθε $x \neq 0$ είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ με $b_n = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Έχουμε

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0$$

καταλήγουμε ότι $R = +\infty$, δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.1.8. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

για κάθε $x \neq 0$ είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, με $b_n = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε στο ότι $R = +\infty$ δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Συνέχεια, ολοκλήρωση και παραγώγιση δυναμοσειράς

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Θεώρημα 2.2.1. *Η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισής της και ισχύει ότι*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

και για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Με άλλα λόγια η δυναμοσειρά ολοκληρώνεται όρο προς όρο:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\,dt$$

Παράδειγμα 2.2.2. Για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει ότι

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \tag{2.2.1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in (-1,1)$, έχουμε

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

□

Θεώρημα 2.2.3. *Η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in (x_0-R, x_0+R)$ ισχύει ότι*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

Με άλλα λόγια η δυναμοσειρά παραγωγίζεται όρο προς όρο:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)'$$

Από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι η παράγωγος μιας δυναμοσειράς είναι πάλι μια δυναμοσειρά [3]. Εφαρμόζοντας επαναληπτικά το Θεώρημα 2.2.3 παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 2.2.4. *Η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο (x_0-R, x_0+R). Ειδικότερα,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} \tag{2.2.2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in (x_0-R, x_0+R)$.

Από την (2.2.2) έχουμε ότι $f^{(k)}(x_0) = k!a_k + 0 + 0 + \dots = k!a_k$, για κάθε $k = 0,1,\dots$. Λύνοντας ως προς a_k παίρνουμε $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Συνεπώς έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.2.5. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{2.2.3}$$

για κάθε $n = 0,1,\dots$.

Ορισμός 2.2.6. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

όπου $x_0 \in I$, καλείται σειρά Taylor της f με κέντρο το x_0.

Παρατήρηση 2.2.7. Δεν ισχύει πάντα ότι η σειρά Taylor της $f : I \to \mathbb{R}$ συγκλίνει για όλα τα x για τα οποία ορίζεται η f. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ορίζεται σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$, ενώ η

[3] που όπως αποδεικνύεται έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την αρχική.

σειρά Taylor της f με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι η $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (διότι $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$) που συγκλίνει μόνο για $|x| < 1$. Επίσης ακόμη και αν η σειρά Taylor της f συγκλίνει για κάποια $x \neq x_0$ δεν σημαίνει ότι το όριο της στο x είναι το $f(x)$. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = e^{-1/x^2}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ αποδεικνύεται ότι έχει $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και άρα η σειρά Taylor της f με κέντρο το 0 είναι η μηδενική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.2.8. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{2.2.4}$$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 2.2.5, αν η $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ γράφεται υπό την μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το $x_0 = 0$ τότε θα πρέπει

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.2.5}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η συνάρτηση e^x είναι η μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ με $f' = f$ και $f(0) = 1$ για να αποδειχθεί η (2.2.5) αρκε΄ να δειχθεί ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ικανοποιεί όντως αυτές τις ιδιότητες. Πράγματι, η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ (Παράδειγμα 2.1.3) δηλαδή ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επιπλέον, στο $x = 0$ παίρνει την τιμή 1 και από το Θεώρημα 2.2.3,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

□

Παράδειγμα 2.2.9. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{2.2.6}$$

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση $\sin x$ είναι η μοναδική λύση της διαφ. εξίσωσης $f'' = -f$ με αρχικές συνθήκες $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ μπορούμε να δείξουμε την (2.2.6) δείχνοντας ότι η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ικανοποιεί όντως αυτές τις ιδιότητες. Πράγματι, η, δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ (Παράδειγμα 2.1.7), $f(0) = 0$ και από το Θεώρημα 2.2.3,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Οπότε $f'(0) = 1$ και

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -f(x)$$

□

Παράδειγμα 2.2.10. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{2.2.7}$$

Απόδειξη. Είναι $\cos x = (\sin x)'$ και από το Παράδειγμα 2.2.10 και το Θεώρημα 2.2.3

$$(\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

□

Ένα σημαντικό θεώρημα που αφορά την συνέχεια της δυναμοσειράς στο ακριβές διάστημα σύγκλισης είναι το επόμενο.

Θεώρημα 2.2.11. *(Abel) Όταν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ συγκλίνει (δηλ. η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = x_0+R$) τότε*

$$\lim_{x\to x_0+R^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

και αντίστοιχα όταν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ συγκλίνει (δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = x_0 - R$) τότε

$$\lim_{x\to x_0-R^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Παράδειγμα 2.2.12. Ισχύει ότι

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα 2.2.2 έχουμε ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \tag{2.2.8}$$

Για $x = 1$ η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ δίνει την εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$ που συγκλίνει (Κριτήριο Leibniz). Επειδή, η $\ln(1+x)$ είναι συνεχής έχουμε

$$\ln 2 = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) \overset{(2.2.8)}{=} \lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο Θεώρημα 2.2.11. □

2.3 Ασκήσεις

Άσκηση 2.3.1. *Αποδείξτε ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία (b_n) υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f^{(n)}(0)=b_n$ για κάθε $n=0,1,2,\dots$.*

[*Υπόδειξη*: Θεωρείστε την συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ με $a_n=\frac{b_n}{n!}$. Στηριζόμενοι στο ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$ (γιατί;), δείξτε ότι $\varrho=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|b_n|}{n!}}=0$ και άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ έπεται ότι $f^{(n)}(0)=b_n$.]

Άσκηση 2.3.2. *Βρείτε το ακριβές διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+3^n)\,x^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nn}(x-1)^n\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}(x-2)^{2n}$$

Άσκηση 2.3.3. *(α) Βρείτε το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$. Στη συνέχεια βρείτε τον τύπο της f.*

[Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$]

(β) Ομοίως για την δυναμοσειρά $g(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n$.

(γ) Ομοίως για την δυναμοσειρά $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

[Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $h(x)=g(x)+f(x)$]

Άσκηση 2.3.4. *Βρείτε το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$. Στη συνέχεια βρείτε τον τύπο της f.*

[*Υπόδειξη*: Για τον τύπο της f βρείτε πρώτα τον τύπο της f'. Η απάντηση είναι $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\arctan x,\ x\in(-1,1)$.]

Άσκηση 2.3.5. *Έστω $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, $x\in(-1,1)$. (α) Αποδείξτε ότι $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ για όλα τα $x\in(-1,1)$.*

(β) Βρείτε την $f^{(2024)}(0)$.

Άσκηση 2.3.6. *(α) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $\frac{1}{1+t^2}$, $t\in(-1,1)$.*

[Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{1-(-t^2)}$.]

(β) Αποδείξτε ότι $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

[Υπόδειξη: Θυμηθείστε ότι $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$*]*

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

[Υπόδειξη: Εφαρμόστε το (β) και το Θεώρημα Abel.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$, Ακολουθίες, Όριο και συνέχεια συνάρτησης

3.1 Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$

3.1.1 Βασικοί ορισμοί

Ο *Ευκλείδειος χώρος* $\mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο όλων των *σημείων* (*ή διανυσμάτων*)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$$

(όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \le i \le d$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \dots, x_d) + (y_1, \dots, y_d) = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$$

για κάθε $(x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \dots, x_d) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_d = (0, \dots, 0, 1)$ αποτελούν τη λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^d$. Παρατηρήστε ότι τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_d$ είναι όντως μια βάση του $\mathbb{R}^d$ αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επίσης αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ είναι τυχόν διάνυσμα του $\mathbb{R}^d$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{e}_i.$$

3.1.2 Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ καλείται το *σύνηθες) εσωτερικό γινόμενο των* $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^d x_i^2 \geq 0$ και άρα $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

(3) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

(4) $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ τότε λέμε ότι τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι *ορθογώνια*. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$, δηλαδή οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^d$ είναι ορθογώνια.

3.1.3 Η Ευκλείδεια νόρμα και απόσταση στον $\mathbb{R}^d$

Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε το *μέτρο* (ή *νόρμα*) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}.$$

Κατ' αναλογία προς την ιδιότητα $|x| = \sqrt{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Πρόταση 3.1.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Αν* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *είναι δύο διανύσματα στον* $\mathbb{R}^d$ *τότε*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

ή ισοδύναμα

$$\left|\sum_{i=1}^d x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^d y_i^2}$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Η ανισότητα ισχύει (με ισότητα) αν $\mathbf{x} = 0$ ή $\mathbf{y} = 0$. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $\mathbf{x} \neq 0$ και $\mathbf{y} \neq 0$. Θέτουμε $\mathbf{w} = \|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ (παρατηρείστε ότι $\mathbf{w} = 0$ αν το $\mathbf{x}$ είναι θετικό πολλλαπλάσιο του $\mathbf{y}$). Έχουμε

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} &= (\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}) \cdot (\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}) \\
&= \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\
&= \|\mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= 2\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \left(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\right)
\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\mathbf{w} = \|\mathbf{y}\|\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ καταλήγουμε στο ότι

$$-\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Άρα,

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$$

□

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες (ανάλογες των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$):

1. $\|\mathbf{x}\| \ge 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Απόδειξη της Ιδιότητας 3 :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| &\Leftrightarrow (\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|)^2 \le (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|
\end{aligned}$$

που ισχύει από την ανισότητα Cauchy–Schwarz. □

Τέλος, όπως στο $\mathbb{R}$ η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2}$$

ορίζεται να είναι η *απόσταση* των $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$. Παρατηρήστε ότι

1. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$ και
3. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|$.

3.1.4 Βασικές περιοχές σημείων στον $\mathbb{R}^d$

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$$

καλείται *ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε.* Με άλλα λόγια, η ανοικτή μπάλα $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^d$ που απέχουν από το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* από ε. Οι ανοικτές μπάλες $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ λέγονται και *βασικές ανοικτές περιοχές* του $\mathbf{x}_0$. Το σύνολο

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \le \varepsilon\}$$

καλείται *κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε.* Τέλος, το σύνολο

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$$

καλείται *κλειστή σφαίρα του* $\mathbb{R}^d$ *με κέντρο* $\mathbf{x}_0$ *και ακτίνα* ε. Είναι φανερό ότι

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cup S_\varepsilon(\mathbf{x}_0).$$

3.1.5 Χαρακτηρισμοί σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$

Δίνουμε παρακάτω κάποιους χαρακτηρισμούς σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Το σημείο $\mathbf{x}$ καλείται

(1) ***απομονωμένο σημείο του*** X αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$. Ισοδύναμα, $\mathbf{x} \in X$ και η απόσταση κάθε άλλου σημείου του X από το $\mathbf{x}$ είναι τουλάχιστον δ.

(2) ***σημείο συσσώρευσης του*** X αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και $\mathbf{y} \in X \cap B_\delta(\mathbf{x})$. Ισοδύναμα, οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει σημείο του X διαφορετικό από το $\mathbf{x}$.

Πρόταση 3.1.3. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ ένα ακριβώς απο τα επόμενα ισχύει:*

(α) Το $\mathbf{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του X.

(β) Το $\mathbf{x}$ είναι απομονωμένο σημείο του X.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in X$. Το $\mathbf{x}$ είτε είναι σημείο συσσώρευσης του X είτε όχι. Αν δεν είναι τότε εξ ορισμού θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε δεν υπάρχει κανένα $y \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$. Άρα $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$ και το $\mathbf{x}$ είναι απομονωμένο σημείο του X. □

Ορισμός 3.1.4. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Το σημείο $\mathbf{x}$ καλείται

(1) ***εσωτερικό σημείο του*** X αν *υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$ Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του X καλείται ***εσωτερικό*** του X και συμβολίζεται με $Int(X)$.

(2) ***εξωτερικό σημείο του*** X αν *υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus X$, ισοδύναμα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του συμπληρώματος του X. Το σύνολο όλων των εξωτερικών σημείων του X καλείται ***εξωτερικό*** του X και συμβολίζεται με $Ext(X)$.

(3) ***συνοριακό σημείο του*** X αν *για κάθε* $\delta > 0$ έχουμε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus X\right) \neq \varnothing$ και $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \varnothing$, δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ έχει μη κενή τομή με το X καθώς και με το συμπλήρωμα του X. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του X καλείται ***σύνορο*** του X και συμβολίζεται με $Bd(X)$.

Παρατήρηση 3.1.5. Παρατηρούμε ότι $Ext(X) \subseteq X^c$ (με $X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του X) και ότι $Int(X) \subseteq X$.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. τα σύνολα $Int(X)$, $Bd(X)$ και $Ext(X)$ είναι ξένα ανα δύο και*

$$\mathbb{R}^d = Int(X) \cup Bd(X) \cup Ext(X)$$

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Έστω και ένα $\delta > 0$. Έχουμε ότι $\mathbb{R}^d = X \cup (\mathbb{R}^d \setminus X)$ και άρα

$$\begin{aligned} B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}^d &= B_\delta(\mathbf{x}) \cap \left(X \cup (\mathbb{R}^d \setminus X)\right) \\ &= (B_\delta(\mathbf{x}) \cap X) \cup \left(B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus X)\right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ένα από τα επόμενα θα ισχύει:

(α) *Υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus X) = \varnothing$. Στην περίπτωση αυτή $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \subseteq X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του X.

(β) *Υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \varnothing$. Τότε $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus X) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εξωτερικό σημείο του X.

(γ) *Για κάθε* $\delta > 0$, έχουμε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \varnothing$ και $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus X) \neq \varnothing$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X.

Είναι φανερό ότι δεν μπορεί ένα $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα συνοριακό και εσωτερικό (ή εξωτερικό) σημείο του X. Επίσης δεν μπορεί να συμβεί το $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του X. Πράγματι αν αυτό συνέβαινε για κάποιο $\mathbf{x}$ τότε θα υπήρχαν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ με

$$B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \quad \text{και} \quad B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus X$$

Όμως τότε αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ θα ήταν

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \quad \text{και} \quad B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus X$$

οπότε

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X \cap (\mathbb{R}^d \setminus X) = \varnothing,$$

άτοπο. Άρα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ακριβώς ένα απο τα (1)-(3) ισχύει. □

Πόρισμα 3.1.7. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε $Int(X) \subseteq X \subseteq Int(X) \cup Bd(X)$.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 3.1.5 έχουμε ότι $Int(X) \subseteq X$ και $Ext(X) \subseteq X^c$. Από την Πρόταση 3.1.6 έχουμε

$$\begin{aligned} X = X \cap \mathbb{R}^d &= X \cap [Int(X) \cup Bd(X) \cup Ext(X)] \\ &= [X \cap (Int(X) \cup Bd(X))] \cup [X \cap Ext(X)] \\ &= X \cap [Int(X) \cup Bd(X)] \subseteq Int(X) \cup Bd(X) \end{aligned}$$

□

Ορισμός 3.1.8. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

(1) Το X καλείται ***ανοικτό*** αν για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του X υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$. Ισοδύναμα, αν κάθε σημείο του X είναι εσωτερικό του σημείο.

(2) Το X καλείται ***κλειστό*** αν το $X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ (δηλαδή το συμπλήρωμά του X) είναι ανοικτό.

(3) Το X καλείται ***φραγμένο*** αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|\mathbf{x}\| \leq M$ (ισοδύναμα, το X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_M(\mathbf{0})$ με κέντρο το $\mathbf{0}$ και ακτίνα M).

Πρόταση 3.1.9. *Κάθε μονοσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό πρέπει να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$. Τότε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και άρα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$. Θέτοντας $\delta = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε $\mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{y})$ και άρα $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$. Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$, άρα το $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. □

Πρόταση 3.1.10. (α) *Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$.

(β) *Αντίστοιχα, κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. (α) Έστω $B = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ μια ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$. Έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Θέτουμε

$$\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|. \tag{3.1.1}$$

Αφού $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ έχουμε ότι $\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \overset{(3.1.1)}{=} \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\mathbf{y} \in B$. Επειδή το $\mathbf{y}$ ήταν τυχόν σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Επίσης, το B είναι φραγμένο αφού για κάθε $\mathbf{x} \in B$ έχουμε

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon + \|\mathbf{x}_0\| = M.$$

(β) Έστω $C = \mathbb{R}^d \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{x} \in C$. Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ και άρα

$$\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \varepsilon > 0. \tag{3.1.2}$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq C$, ισοδύναμα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ για κάθε $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \overset{(3.1.2)}{=} \varepsilon.$$

Επίσης, όπως στο (α) δείχνουμε ότι η $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη. □

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων.

Πρόταση 3.1.11. *Έστω* $X \subseteq \mathbb{R}^d$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το* X *είναι κλειστό.*

(2) *Το* X *περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.*

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\mathbf{x} \notin X$. Τότε, $\mathbf{x} \in X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ και επειδή το X^c είναι ανοικτό θα υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$. Αλλά τότε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \varnothing$, άτοπο από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Έστω ότι το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του. Θα δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, ισοδύναμα ότι το X^c είναι ανοικτό. Πράγματι, έστω $\mathbf{x} \in X^c$. Επειδή το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του, το $\mathbf{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X. Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε οποιοδήποτε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ δεν ανήκει στο X. Επειδή, από την υπόθεση, και το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο X, έχουμε ότι ολόκληρη η ανοικτή μπάλα $B_\delta(\mathbf{x})$ περιέχεται στο X^c, δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι όντως εσωτερικό σημείο του X^c. □

Ένας άλλος χαρακτηρισμός των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι και ο εξής.

Πρόταση 3.1.12. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το X είναι κλειστό.*

(2) $Bd(X) \subseteq X$.

(3) $X = Int(X) \cup Bd(X)$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $\mathbf{x} \in Bd(X)$ με $\mathbf{x} \notin X \Leftrightarrow \mathbf{x} \in X^c$. Επειδή X^c ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$, άτοπο αφού $\mathbf{x} \in Bd(X)$ (και άρα κάθε ανοικτή μπάλα τέμνει και το X).

(2) $\Rightarrow$ (3): Προκύπτει από το Πόρισμα 3.1.7.

(3) $\Rightarrow$ (1): Επειδή το $Ext(X)$ είναι ανοικτό το συμπλήρωμά του $(Ext(X))^c = Int(X) \cup Bd(X) = X$ είναι κλειστό. □

3.2 Ακολουθίες στον χώρο $\mathbb{R}^d$

3.2.1 Βασικοί ορισμοί

Ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ είναι κάθε απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το **όριο** της $(\mathbf{x}_n)$ είναι το $\mathbf{x}$ (ή ότι η $(\mathbf{x}_n)$ **συγκλίνει** στο $\mathbf{x}$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Συμβολικά θα γράφουμε $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ (ή πιο απλά $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$) ή $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$.

Παρατήρηση 3.2.2. Παρατηρήστε ότι $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο $\mathbf{x}$ περιέχει *όλους τελικά* τους όρους της $(\mathbf{x}_n)$.

Πρόταση 3.2.3 (πρώτος χαρακτηρισμός της σύγκλισης στον $\mathbb{R}^d$). *Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Τότε $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha_n = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$, $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} &\iff \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \;\; \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon \\
&\iff \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \;\; \alpha_n < \varepsilon \\
&\iff \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \;\; |\alpha_n - 0| < \varepsilon \\
&\iff \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.2.4 (δεύτερος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον $\mathbb{R}^d$). *Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Έστω*

$$\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n}) \text{ και } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d).$$

Τότε $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$ για όλα τα $1 \leq i \leq d$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha_n = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$ και $\alpha_{i,n} = |x_{i,n} - x_i|$, $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της απόστασης στον $\mathbb{R}^d$ έχουμε

$$\alpha_n = \sqrt{\alpha_{1,n}^2 + \cdots + \alpha_{d,n}^2}. \tag{3.2.1}$$

Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$. Τότε, από την Πρόταση 3.2.3 έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Έστω $1 \le i \le d$. Από την (3.2.1) έπεται ότι

$$0 \le \alpha_{i,n} \le \alpha_n,$$

οπότε από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \alpha_{i,n} = 0$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι $\lim_{n\to\infty} \alpha_{i,n} = 0$ για όλα τα $1 \le i \le d$. Τότε, από την (3.2.1) και τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \alpha_{1,n}^2 + \cdots + \lim_{n\to\infty} \alpha_{d,n}^2} = 0.$$

Συνεπώς, πάλι από την Πρόταση 3.2.3 έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$. □

3.2.2 Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^d$

Ένα βασικό θεώρημα για τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών είναι το θεώρημα Bolzano-Weierstrass που μας λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.4 μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε αυτό το θεώρημα στον $\mathbb{R}^d$. Πριν το διατυπώσουμε θυμίζουμε τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.2.5. Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$. Θεωρώντας την ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ ως συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$, κάθε περιορισμός της σε ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ καλείται ***υπακολουθία*** της $(\mathbf{x}_n)$.

Κάθε υπακολουθία της $(\mathbf{x}_n)$ είναι και αυτή ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$. Πράγματι, αν

$$N = \{k_1 < k_2 < \cdots\}$$

είναι το άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ όπου περιορίζεται η $(\mathbf{x}_n)$, τότε η αντίστοιχη υπακολουθία της $(\mathbf{x}_n)$ είναι η ακολουθία $(\mathbf{y}_n)$ με

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_{k_n}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 3.2.6. *Αν μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ συγκλίνει τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν.*

Απόδειξη. Έστω $(\mathbf{x}_n)$ συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}$ το όριό της. Έστω $N = \{k_1 < k_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_{k_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η υπακολουθία της $(\mathbf{x}_n)$ που ορίζεται από το N. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{y}_n \to \mathbf{x}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \ge n_0$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \ge n_0$. Πράγματι, έστω $n \ge n_0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $k_n \ge n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $k_n \ge n \ge n_0$, οπότε $\|\mathbf{x}_{k_n} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ δηλαδή $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$. □

Στα επόμενα, αν $N = \{k_1 < k_2 < \cdots\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, θα συμβολίζουμε την υπακολουθία $(\mathbf{y}_n)$, όπου $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_{k_n}$, με $(\mathbf{x}_n)_{n\in N}$. Επίσης, αν $\lim \mathbf{y}_n = \mathbf{x}$ τότε θα γράφουμε

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{n\in N} \mathbf{x}$$

Θεώρημα 3.2.7 (θεώρημα Bolzano-Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς d. Για $d = 1$ το θεώρημα ως γνωστόν ισχύει. Έστω $d \geq 2$ και ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbb{R}^{d-1}$. Έστω $(\mathbf{x}_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $M > 0$ με $\|\mathbf{x}_n\| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από την υπόθεση έχουμε $\|\mathbf{x}_n\| = \sqrt{x_{1,n}^2 + \cdots + x_{d,n}^2} \leq M$. Συνεπώς,

$$\sqrt{x_{1,n}^2 + \cdots + x_{d-1,n}^2} \leq M \quad \text{και } |x_{d,n}| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια, η ακολουθία $\mathbf{x}'_n$ του $\mathbb{R}^{d-1}$ με $\mathbf{x}'_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d-1,n})$ καθώς και η ακολουθία $(x_{d,n})$ του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Από την επαγωγική μας υπόθεση υπάρχει $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ με

$$\mathbf{x}'_n \xrightarrow{n \in N_1} \mathbf{x}' \tag{3.2.2}$$

Αφού η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_{d,n})$ είναι φραγμένη από το M, το ίδιο ισχύει και για την υπακολουθία $(x_{d,n})_{n \in N_1}$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για το $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $N_2 \subseteq N_1$ άπειρο και $x_d \in \mathbb{R}$ με

$$x_{d,n} \xrightarrow{n \in N_2} x_d. \tag{3.2.3}$$

Επειδή $N_2 \subseteq N_1$, η ακολουθία $(\mathbf{x}'_n)_{n \in N_2}$ είναι υπακολουθία της $(\mathbf{x}'_n)_{n \in N_1}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν, δηλαδή $\mathbf{x}'_n \xrightarrow{n \in N_2} \mathbf{x}'$. Αφού $\mathbf{x}'_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d-1,n})$, από την Πρόταση 3.2.4 έχουμε ότι

$$x_{1,n} \xrightarrow{n \in N_2} x_1, \ \ldots, \ x_{d-1,n} \xrightarrow{n \in N_2} x_{d-1} \tag{3.2.4}$$

όπου $(x_1, \ldots, x_{d-1}) = \mathbf{x}'$.

Από τις (3.2.3), (3.2.4) και την Πρόταση 3.2.4 έπεται ότι

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{n \in N_2} \mathbf{x}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$. □

3.3 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Με τον όρο *συνάρτηση πολλών μεταβλητών* εννοούμε γενικά μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό (αν $m = d = 1$ τότε έχουμε την κλασική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής).

3.3.1 Ταξινόμηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές***) Είναι οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική, συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη στα σημεία του χώρου, όπως π.χ. η θερμοκρασία ή η ατμοσφαιρική πίεση.

(II) ***Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = \left(t, t^2, \ldots, t^m\right)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στη μορφή

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \ldots, f_k(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$ (δείτε την Πρόταση 3.3.2 παρακάτω).

Παρατήρηση 3.3.1. Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια *m-διάστατη καμπύλη*. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(t) = (\cos t, sint)$ μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, ενώ η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t ως *χρόνο*, σκεφτόμαστε ότι οι συναρτήσεις $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ περιγράφουν την θέση ενός κινητού, την χρονική στιγμή t, στον χώρο $\mathbb{R}^d$.

(III) ***Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $d, m \geq 2$. Αν $d = m$ τότε οι συναρτήσεις αυτές καλούνται *διανυσματικά πεδία*. Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική, π.χ. έχουμε το πεδίο βαρύτητας, το πεδίο ταχύτητας ρευστού κ.λπ. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right).$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

3.3.2 Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις.

Η επόμενη πρόταση ουσιαστικά ανάγει τη μελέτη όλων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στη μελέτη των βαθμωτών συναρτήσεων.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$ από το X στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε*

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Συμβολικά γράφουμε

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

και οι $f_1, \dots, f_m$ καλούνται οι **συνιστώσες συναρτήσεις** *της f.*

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ έστω $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η i-προβολή του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως

$$\mathbf{y} = (\pi_1(\mathbf{y}), \dots, \pi_m(\mathbf{y})) \,. \tag{3.3.1}$$

Έστω τώρα τυχόν $\mathbf{x} \in X$. Θέτοντας $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, από την (3.3.1) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (\pi_1(f(\mathbf{x})), \dots, \pi_m(f(\mathbf{x}))) \,. \tag{3.3.2}$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεση των π_i και f, τότε $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x}))$ και άρα από την (3.3.2) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \,. \tag{3.3.3}$$

Μένει να δείξουμε ότι οι $f_1, \dots, f_m$ είναι η μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (3.3.3). Πράγματι, αν $g_1, \dots, g_m$ είναι συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$$

τότε αναγκαστικά $g_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x})) = \pi_i \circ f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ και κάθε $\mathbf{x} \in X$. □

3.4 Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την έννοια του ορίου συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Όπως θα δούμε, είναι μια απλή γενίκευση της γνωστής αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, για να ορίζεται το όριο μιας συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ σε κάποιο σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ θα πρέπει το $\mathbf{x}_0$ να είναι *σημείο συσσώρευσης* του πεδίου ορισμού X της f.

3.4.1 Όριο βαθμωτής συνάρτησης

Ορισμός 3.4.1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f *έχει όριο το* L *στο* $\mathbf{x}_0$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ χρήσιμο γιατί μεταφέρει το όριο συνάρτησης σε ακολουθίες. Με βάση το θεώρημα αυτό αποδεικνύονται όλες οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων βαθμωτών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.4.2 (αρχή της μεταφοράς). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) *Για* οποιαδήποτε *ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ σημείων του X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ ισχύει ότι $f(\mathbf{x}_n) \to L$.*

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2): Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στο X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(\mathbf{x}_n))$ (που είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών) συγκλίνει στο L, ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, για το δοθέν ε υπάρχει $\delta > 0$ με

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } \mathbf{x} \in X \text{ με } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta. \tag{3.4.1}$$

Επειδή τώρα $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta$ για όλα τα $n \geq n_0$. Από την (3.4.1) έπεται ότι

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n \geq n_0.$$

Συνεπώς, $f(\mathbf{x}_n) \to L$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι δεν ισχύει η (1) ενώ ισχύει η (2). Από την άρνηση του ορισμού του $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, έχουμε ότι θα υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να μπορούμε να βρούμε $\mathbf{x}_\delta \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_0\| < \delta$ αλλά $|f(\mathbf{x}_\delta) - f(\mathbf{x})| \geq \varepsilon_0$. Επιλέγοντας $\delta = 1/n$ βρίσκουμε $\mathbf{x}_n \in X$ με

$$0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < 1/n \tag{3.4.2}$$

και

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0. \tag{3.4.3}$$

Από την (3.4.2) έπεται ότι $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \to 0$ και άρα από την Πρόταση 3.2.3 έχουμε ότι $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $f(\mathbf{x}_n) \to 0$ ή ισοδύναμα $|f(\mathbf{x}_n) - L| \to 0$, άτοπο από την (3.4.3). □

Παράδειγμα 3.4.3. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

δεν υπάρχει.

Απόδειξη. Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X. Από την αρχή της μεταφοράς, για να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) στο X (άρα, $(x_n,y_n),(x'_n,y'_n) \neq (0,0)$) με $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}(x'_n,y'_n) = (0,0)$ αλλά $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n,y'_n)$.

Πράγματι, για την ακολουθία $(1/n, 0)$ έχουμε $(1/n,0) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n,0) \to (0,0)$ (Πρόταση 3.2.4) και

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}+0} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ομοίως, για την ακολουθία $(1/n, 1/n)$ έχουμε πάλι $(1/n,1/n) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(1/n,1/n) \to (0,0)$, αλλά

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

Παράδειγμα 3.4.4. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right) = 0.$

Απόδειξη. Έστω $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x\sin(\dfrac{1}{y})$. Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X. Έστω (x_n, y_n) ακολουθία στο X (οπότε, $y_n \neq 0$ και άρα $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) τέτοια ώστε $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Έχουμε $x_n \to 0$ (Πρόταση 3.2.4) και $|\sin(\dfrac{1}{y_n})| \leq 1$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \left[x_n \cdot \sin(\frac{1}{y_n})\right] = 0$$

(μηδενική × φραγμένη). Από την αρχή της μεταφοράς συμπεραίνουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. □

Πρόταση 3.4.5 (κανόνες παρεμβολής). *Έστω $g, f, h : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$, και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X.*

(1) *Αν $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$ τότε $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.*

(2) *Αν $h(\mathbf{x}) \geq 0$ και $|f(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = 0$, τότε $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.*

Παράδειγμα 3.4.6. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |x| + \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |y| \leq |x| + |y|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ και $h(x,y) = |x| + |y|$, τότε

$$|f(x,y)| \leq h(x,y).$$

Επιπλέον, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$. □

Η επόμενη πρόταση είναι και αυτή μια αρχή της μεταφοράς αλλά με καμπύλες αντί για ακολουθίες. Με τον όρο *καμπύλη* του $\mathbb{R}^d$ θα εννοούμε μια *συνεχή συνάρτηση* [1] $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

Πρόταση 3.4.7 (όριο κατά μήκος καμπύλης). *Έστω* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}_0\} \to \mathbb{R}$ *και* $L \in \mathbb{R}$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) *Για κάθε συνεχή καμπύλη* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *με* $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_0$ *και* $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{x}_0$ *για κάθε* $t \neq 0$, *ισχύει ότι* $\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = L$.

Παράδειγμα 3.4.8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) Να βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Να βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε παραβολής $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) Αποδείξτε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη. (1) Έχουμε

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, \lambda t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \lambda t}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^3}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t}{t^2 + \lambda^2} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το όριο είναι ανεξάρτητο από τον συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας.

(2) Ομοίως,

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, \lambda t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \lambda t^2}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^4}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

και άρα το όριο εξαρτάται από τον συντελεστή λ της παραβολής.

(3) Από το (2) και την Πρόταση 3.4.7 το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 3.4.9. (α) Εξετάστε αν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

(β) Ομοίως για το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Απόδειξη. (α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$ εκτός από την ευθεία $y = -x$. Κατά μήκος της ευθείας $x = y = t$ το όριο είναι 0:

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2} = 0.$$

Όμως, κατά μήκος της καμπύλης $x = t$, $y = -t + t^2$, το όριο είναι -1:

$$\lim_{t\to 0} f\left(t, -t + t^2\right) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2 + t^3}{t^2} = \lim_{t\to 0}(-1 + t) = -1.$$

Συνεπώς, το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ δεν υπάρχει.

[1] για τον ορισμό της συνέχειας δείτε την επόμενη ενότητα.

(β) Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να δείξουμε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ δεν υπάρχει. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{(x+y)^2}{x+y} - \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = x+y-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ και συνεπώς αν υπήρχε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \ell$ θα είχαμε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y} = -\ell$, άτοπο από το (α).

□

3.5 Όριο γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η έννοια του ορίου μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμός 3.5.1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X και $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f *έχει όριο το* $\mathbf{L}$ *στο* $\mathbf{x}_0$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στο όριο των πραγματικών συναρτήσεων που αποτελούν την ανάλυση της f. Συγκεκριμένα, έχουμε την εξής πρόταση που προκύπτει εύκολα από την Πρόταση 3.2.4 και την αρχή της μεταφοράς (Θεώρημα 3.4.2).

Πρόταση 3.5.2. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ *και* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ *σημείο συσσώρευσης του* X*. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το όριο* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *υπάρχει.*

(2) *Αν* $f = (f_1, \dots, f_m)$ *είναι η ανάλυση της* f *τότε το όριο* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})$ *υπάρχει για όλα τα* $i = 1, \dots, m$ *και ισχύει ότι*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x})\right).$$

3.6 Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός 3.6.1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0 \in X$. Λέμε ότι η f είναι *συνεχής στο* $\mathbf{x}_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Η f καλείται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X.

Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι αυτομάτως συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του X. Συνεπώς, για να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής, αρκεί να ελέγξουμε τα σημεία του X που είναι σημεία συσσώρευσής του. Ισχύει και εδώ το ανάλογο του θεωρήματος για τα όρια.

Πρόταση 3.6.2. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ *και* $\mathbf{x}_0 \in X$ *σημείο συσσώρευσης του* X*. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η* f *είναι συνεχής στο* $\mathbf{x}_0$*.*

(β) *Ισχύει ότι* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$*.*

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στη συνέχεια των συνιστωσών συναρτήσεών της. Συγκεκριμένα, από τις Προτάσεις 3.5.2 και 3.6.2 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.6.3. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Έστω επίσης $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

(β) *Για κάθε $i = 1, \dots, m$ η $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

3.7 Ασκήσεις

Άσκηση 3.7.1. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$.

(β) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$.

[*Υπόδειξη:* $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x_1^2 + \cdots + x_d^2$]

Άσκηση 3.7.2. Έστω $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) Τα διανύσματα $\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ και $\|\mathbf{y}\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ είναι ορθογώνια.

(β) Το διάνυσμα $\mathbf{z} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|\mathbf{x}$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

[*Υπόδειξη:* Για το (β) θυμηθείτε ότι η γωνία που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι η μοναδική γωνία $\vartheta \in [0,\pi]$ με $\cos\vartheta = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}$]

Άσκηση 3.7.3. Έστω $B = \{\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} < 1\}$ η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^d$.

(α) Έστω $\mathbf{x} \in B$. Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < 1 - \|\mathbf{x}\|$ ισχύει ότι $\mathbf{y} \in B$ (δηλ. $\|\mathbf{y}\| < 1$). Συμπεράνετε ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

(β) Αποδείξτε ότι η B είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δηλαδή, αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ τότε για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει ότι $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in B$.

[*Υπόδειξη:* Τριγωνική ανισότητα.]

Άσκηση 3.7.4. Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό. Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ με $\mathbf{x}_n \in F$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_n$ ισχύει ότι $\mathbf{x} \in F$.

[*Υπόδειξη:* Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπήρχε ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ με $\mathbf{x}_n \in F$ και $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_n \notin F$. Τότε $\mathbf{x} \in F^c$ και (αφού το F είναι κλειστό) το F^c είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|y - \mathbf{x}\| < \delta \Rightarrow \mathbf{y} \in F^c$. Από την άλλη μεριά η $(\mathbf{x}_n)$ συγκλίνει στο $\mathbf{x}$.]

Άσκηση 3.7.5. Έστω $\mathbf{v}$ μη μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ο ημίχωρος

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} < t\}$$

είναι ανοικτό σύνολο. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι ο ημίχωρος $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \geq t\}$ και το υπερεπίπεδο $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = t\}$ είναι κλειστά σύνολα.

[*Υπόδειξη:* Έστω $\mathbf{x}_0 \in H \Leftrightarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_0 < t$. Πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\mathbf{y} \in H$ ή ισοδύναμα $\mathbf{v}\cdot\mathbf{y} < t$. Παρατηρείστε ότι αν $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| < \delta$ τότε από ανισότητα Cauchy–Schwartz έχουμε $\mathbf{v}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_0 \leq \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| + \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_0 \leq \delta\|\mathbf{v}\| + \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_0$ και άρα αρκεί το δ να επιλεγεί έτσι ώστε $\delta\|\mathbf{v}\| + \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_0 < t$.]

Άσκηση 3.7.6. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, \quad f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$$
$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\,, \quad f(x,y) = \frac{x-y^2}{x^2+y^2}.$$

Άσκηση 3.7.7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\,.$$

Αποδείξτε ότι κατά μήκος κάθε ευθείας $y = \lambda x$, το $f(x,y)$ προσεγγίζει το 0, καθώς $(x,y) \to 0$, αλλά δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

[*Υπόδειξη:* Υπολογίστε το όριο κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$.]

Άσκηση 3.7.8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Αποδείξτε ότι (α) $\max |f(x,y)| = \sqrt{2}$ και (β) το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

[*Υπόδειξη:* (α) Ανισότητα Cauchy–Schwarz. (β) Αρχή της μεταφοράς για τις ακολουθίες $(1/n, -1/n)$, $(1/n, 1/n)$.]

Άσκηση 3.7.9. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{(x^2+y^4)\,\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

[*Υπόδειξη:* $\left|\dfrac{xy^4}{(x^2+y^4)\,\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \dfrac{|xy^2|}{x^2+y^4} \cdot \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| \leq \dfrac{1}{2}|y|$.]

Άσκηση 3.7.10. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin\dfrac{1}{y} + y \cos\dfrac{1}{x} \right) = 0$.

[*Υπόδειξη:* Παράδειγμα 3.4.4.]

Άσκηση 3.7.11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = y$ αν $x = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ αν $x \neq 0$.

Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Άσκηση 3.7.12. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς για κατάλληλες ακολουθίες αποδείξτε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \neq 0$, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$.

Άσκηση 3.7.13. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{y}{x}\right| & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς για κατάλληλες ακολουθίες αποδείξτε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ και άρα $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $y \neq 0$, $\lim_{x\to 0} f(x,y) = +\infty$ και άρα $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = +\infty$.

Άσκηση 3.7.14. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

[*Υπόδειξη:* Παρατηρείστε ότι $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \leq |y|$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.]

Άσκηση 3.7.15. Έστω $a,b,c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^2+bxy+cy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους a,b,c;

[*Υπόδειξη:* Δείτε τι γίνεται κατά μήκος των ευθειών $x=0$, $y=0$ και $y=x$.]

Άσκηση 3.7.16. (α) Έστω $\mathbf{x}_n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ με $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. Αποδείξτε ότι $\|\mathbf{x}_n\| \to \|\mathbf{x}\|$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to B(\mathbf{0},1)$ με $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1+\|\mathbf{x}\|}$ είναι συνεχής 1-1 και επί, με αντίστροφη την $g : B(\mathbf{0},1) \to \mathbb{R}^d$ με $g(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{1-\|\mathbf{y}\|}$. Αποδείξτε ότι η g είναι επίσης συνεχής.

[*Υπόδειξη:* Για το (α) χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, για το (β) μπορείτε να εφαρμόσετε την αρχή της μεταφοράς.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παραγώγιση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την παραγώγιση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$ που παίρνει πραγματικές τιμές. Θα ξεκινήσουμε με τις πιο ασθενείς έννοιες παραγώγισης που είναι οι λεγόμενες *μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης ως προς* x και y και οι *κατευθυνόμενες παράγωγοι*. Κατόπιν θα ορίσουμε την πιο ισχυρή έννοια της (*ολικής*) *παραγώγου* μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών και θα δούμε πώς σχετίζεται με τις ασθενέστερες έννοιες των μερικών και των κατευθυνόμενων παραγώγων.

4.1 Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

Ορισμός 4.1.1 (μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Το όριο
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t}$$
καλείται ***μερική παράγωγος ως προς*** x ***της συνάρτησης*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0) και συμβολίζεται με
$$f_x(x_0,y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$
Θα λέμε ότι η f είναι ***μερικώς παραγωγίσιμη ως προς*** x ***στο σημείο*** (x_0, y_0) αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Ομοίως, το όριο
$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t}$$
καλείται ***μερική παράγωγος ως προς*** y ***της συνάρτησης*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0) και συμβολίζεται με
$$f_y(x_0,y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$
Θα λέμε ότι η f είναι ***μερικώς παραγωγίσιμη ως προς*** y ***στο σημείο*** (x_0, y_0) αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων (x,y) του A στα οποία η $f_x(x,y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Η συνάρτηση $(x, y) \to f_x(x, y)$, $(x, y) \in A_1$ καλείται ***μερική παράγωγος της*** f ***ως προς*** x και συμβολίζεται με f_x ή $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Ομοίως, αν $A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A στα οποία η $f_y(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη, τότε η συνάρτηση $(x, y) \to f_y(x, y)$, $(x, y) \in A_2$ καλείται ***μερική παράγωγος της*** f ***ως προς*** y και συμβολίζεται με f_y ή $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Παράδειγμα 4.1.2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = |x| + |y|.$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως,

$$f_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 4.1.3. Ομοίως για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν, αφού όπως παραπάνω

$$f_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{|y|}{y}.$$

Παράδειγμα 4.1.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Τότε,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Ομοίως,

$$f_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται τη συνέχεια της f στο (x_0, y_0).

Παράδειγμα 4.1.5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Τότε οι $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Πράγματι, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Παράδειγμα 3.4.3) το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0,0)$. Όμως,

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

4.2 Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u}$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^d$. Το όριο

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

καλείται **παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο** $\mathbf{x}_0$ και συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0).$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A. Πιο συγκεκριμένα, έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη[1] και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Επίσης, αν $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των κατά κατεύθυνση παραγώγων μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια της f σε αυτό το σημείο.

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Αποδείξτε ότι:

(1) Η f δεν έχει όριο στο $(0,0)$.

[1] διότι $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$, αφού $\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\| = \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$

(2) Όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $(0,0)$ υπάρχουν.

Απάντηση: (1) Δείτε το Παράδειγμα 3.4.8.

(2) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^2u_2}{t^5u_1^4+t^3u_2^2}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3u_1^2u_2}{t^3(t^2u_1^4+u_2^2)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4+u_2^2}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2+u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$.

(β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4+u_2^2} = \frac{u_1^2u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$.

4.3 Παράγωγος και διαφορικό

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καλείται *παραγωγίσιμη στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, αν το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

είναι πραγματικός αριθμός. Τότε, αν θέσουμε $a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $x \mapsto ax$ είναι μια γραμμική συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

Γενικεύουμε τώρα τα παραπάνω για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών ως εξής:

Ορισμός 4.3.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) **στο σημείο** (x_0, y_0) αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{4.3.1}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον Ορισμό 4.3.2 για συναρτήσεις $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, ως εξής:

Ορισμός 4.3.2. Έστω $d \geq 2$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) **στο σημείο** $\mathbf{x}_0$ αν υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{4.3.2}$$

όπου με $\mathbf{a}\cdot\mathbf{h}$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{h}$.

Παρατηρείστε ότι η (4.3.1) προκύπτει από την (4.3.2) αν θέσουμε $(h,k) = \mathbf{h}$, $(x_0, y_0) = \mathbf{x}_0$, $(a,b) = \mathbf{a}$ και $\sqrt{h^2 + k^2} = \|\mathbf{h}\|$.

Πρόταση 4.3.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 4.3.2 υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{4.3.3}$$

Αφού το $\mathbf{x}_0$ είναι εσωτερικό σημείο του A υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε

$$R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{h} \tag{4.3.4}$$

για κάθε $\mathbf{h} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$. Τότε,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{a}\cdot\mathbf{h} + R(\mathbf{h}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{4.3.5}$$

Ειδικότερα,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0$$

Επιπλέον, από ανισότητα Cauchy–Schwarz, $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{h}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{h}\|$ και άρα

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{h}) = 0$$

Από τα παραπάνω και την (4.3.5) παίρνουμε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{a}\cdot\mathbf{h} + R(\mathbf{h})\right) = f(\mathbf{x}_0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. □

Επανερχόμαστε τώρα στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών και συγκεκριμμένα στον Ορισμό 4.3.1. Οι πραγματικοί αριθμοί a, b που ικανοποιούν την (4.3.1) είναι μοναδικοί όπως προκύπτει από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.3.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιείται η* (4.3.1)*, τότε τα a, b είναι μοναδικά και ισχύει ότι $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.*

Απόδειξη. Από την (4.3.1) για $k = 0$ έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Συνεπώς,
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-ah}{h}=0$$
δηλαδή
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}-a\right)=0$$
που σημαίνει ότι
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=a$$
Ομοίως αποδεικνύεται ότι $f_y(x_0,y_0)=b$. □

Από τα παραπάνω έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 4.3.5. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ και (x_0,y_0) εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0).*

(2) *Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) και ισχύει ότι*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0. \tag{4.3.6}$$

Τα παραπάνω γενικεύονται και για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών.

Πόρισμα 4.3.6. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.*

(2) *Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και αν $\mathbf{a}=\big(f_{x_1}(\mathbf{x}_0),\dots,f_{x_d}(\mathbf{x}_0)\big)$ ισχύει ότι*

$$\lim_{\mathbf{h}\to(0,0)}\frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-\mathbf{a}\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}=0. \tag{4.3.7}$$

Η ύπαρξη μόνο των μερικών παραγώγων χωρίς τη συνθήκη (4.3.7) δεν συνεπάγεται την παραγωγισιμότητα της f, όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.3.7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad (x,y)\neq(0,0)$$
και $f(0,0)=0$. Τότε,

(1) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Ισχύει ότι $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

(3) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Απόδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι
$$|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|y|\leq|y|$$

και άρα, από τον κανόνα παρεμβολής, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(3) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\|(h,k)\|} = 0 &\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \\ &\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = 0.\end{aligned}$$

Όμως, αυτό το όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, για την ακολουθία $(1/n, 1/n) \to (0,0)$ έχουμε $f(1/n,1/n) = 1/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim_{n\to+\infty} f(1/n,1/n) = 1/2$. Όμως, για την ακολουθία $(1/n, 0) \to (0,0)$ έχουμε $f(1/n,0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim_{n\to+\infty} f(1/n,0) = 0$. □

Ορισμός 4.3.8. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0,y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0).

1) Ο πίνακας γραμμή

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

θα καλείται **παράγωγος της** f **στο σημείο** (x_0,y_0) και θα συμβολίζεται με $f'(x_0,y_0)$.

2) Το διάνυσμα

$$\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)$$

θα καλείται **κλίση της** f **στο σημείο** (x_0,y_0) και θα συμβολίζεται με $\nabla f(x_0,y_0)$.

3) Η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$T(x,y) = f_x(x_0,y_0)x + f_y(x_0,y_0)y$$

θα καλείται **διαφορικό της** f **στο σημείο** (x_0,y_0) και θα συμβολίζεται με $D_{(x_0,y_0)}f$.

Παρατήρηση 4.3.9. Παρατηρήστε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό $D_{(x_0,y_0)}f$ της f στο (x_0,y_0) μπορεί να γραφτεί με τις εξής μορφές:

$$\begin{aligned} D_{(x_0,y_0)}f(x,y) &= f_x(x_0,y_0)x + f_y(x_0,y_0)y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y \\ &= f'(x_0,y_0)\cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{(γινόμενο πινάκων)} \\ &= \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x,y) \quad \text{(εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων)} \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Γενικότερα έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.3.10. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

1) Ο πίνακας γραμμή

$$[f_{x_1}(\mathbf{x}_0)\dots f_{x_d}(\mathbf{x}_0)] \in \mathbb{R}^{1\times d}$$

θα καλείται **παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $f'(\mathbf{x}_0)$.

2) Το διάνυσμα

$$(f_{x_1}(\mathbf{x}_0),\dots,f_{x_d}(\mathbf{x}_0))$$

θα καλείται **κλίση της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.

3) Η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$T(x_1,\dots,x_d) = f_{x_1}(\mathbf{x}_0)\cdot x_1 + \cdots + f_{x_d}(\mathbf{x}_0)\cdot x_d$$

θα καλείται **διαφορικό της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $D_{\mathbf{x}_0}f$.

4.4 Εφαπτόμενο επίπεδο

Θυμίζουμε πρώτα ότι αν $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, το γράφημα (συμβολίζουμε με $\mathrm{Gr}(f)$) της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (x,y)\in A \text{ και } z = f(x,y)\} \subseteq \mathbb{R}^3. \tag{4.4.1}$$

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Το επίπεδο π του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$(x,y,z)\in\pi \iff z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{4.4.2}$$

θα καλείται ***εφαπτόμενο επίπεδο*** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$. Παρατηρήστε ότι ένα σημείο $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = (-f_x(x_0,y_0),\ -f_y(x_0,y_0),\ 1) \tag{4.4.3}$$

$\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-f(x_0,y_0))$. Με άλλα λόγια, αν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Το διάνυσμα $\mathbf{n}$ που ορίζεται από την (4.4.3) καλείται ***κάθετο διάνυσμα*** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$.

4.5 Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγων

Παρατηρείστε ότι από το Πόρισμα 4.3.6 έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{4.5.1}$$

Πρόταση 4.5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη* *στο* $\mathbf{x}_0$ *τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} \tag{4.5.2}$$

για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ *με* $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, εφαρμόζοντας την (4.5.1) για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})}{\|t\mathbf{u}\|}\right| = 0 \tag{4.5.3}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u}}{\|t\mathbf{u}\|}\right| &= \left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})}{|t|\cdot\|\mathbf{u}\|}\right| \\ &= \left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})}{|t|}\right| \\ &= \left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - t\,(\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})}{t}\right| \\ &= \left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})\right|,\end{aligned}$$

άρα η (4.5.3) γράφεται ως

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})\right| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})\right) = 0,$$

δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}.$$

□

Η εφαρμογή της Πρότασης 4.5.1 χρειάζεται προσοχή γιατί δεν ισχύει απαραίτητα αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Διευκρινίζουμε αυτό το σημείο με το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.5.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$. Θα δείξουμε τα ακόλουθα:

(i) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ υπάρχει.

(iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε ότι

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|.$$

Συνεπώς, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^3+t^3u_2^3}{t^2u_1^2+t^2u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3,$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ (το $\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο).

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ έχουμε ότι

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ έχουμε ότι

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Από το Πόρισμα 4.3.5 γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Τότε όμως, αν $x = y = t$ θα πρέπει να έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Από την Πρόταση 4.5.1 αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = u_1 + u_2$.

Όμως από το (ii) έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^3 + u_2^3$. Επομένως, θα είχαμε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$ για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο. □

Παρατήρηση 4.5.3. Το αντίστροφο της Πρότασης 4.5.1 δεν ισχύει. Δηλαδή, μπορεί να ισχύει ο τύπος $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ αλλά η f να μην είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) (βλ. Άσκηση Β8).

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 4.5.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{4.5.4}$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$*. Επιπλέον, αν* $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0,0)$ *τότε οι κατευθύνσεις*

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

είναι αυτές για τις οποίες η f *έχει τη μέγιστη και αντίστοιχα ελάχιστη κατευθυνόμενη παράγωγο, δηλαδή*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \ \mu\varepsilon \ \|u\| = 1\right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{4.5.5}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \ \mu\varepsilon \ \|u\| = 1\right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{4.5.6}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, από την Πρόταση 4.5.1 έχουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{4.5.7}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_1 &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (4.5.7) παίρνουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

που δίνει την (4.5.5). Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. □

4.6 Συνέχεια μερικών παραγώγων και παραγωγισιμότητα

Είδαμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο τότε έχει και μερικές παραγώγους σε αυτό το σημείο. Επίσης είδαμε, με ένα παράδειγμα, ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε ότι αν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου και ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι συνεχείς σε αυτό το σημείο, τότε η f είναι παραγωγίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής.

Θεώρημα 4.6.1 (ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας). *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$*,* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *και* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ *εσωτερικό σημείο του* A *τέτοιο ώστε οι* f_x, f_y *ορίζονται σε μια περιοχή του* $\mathbf{x}_0$ *και είναι συνεχείς στο* $\mathbf{x}_0$*. Τότε, η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$*.*

Απόδειξη. Από τον χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών (Πόρισμα 4.3.5) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \tag{4.6.1}$$

Έστω B μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το (x_0, y_0) τέτοια ώστε $B \subseteq A$ και οι f_x, f_y να ορίζονται στο B. Θεωρούμε $(h, k) \neq (0, 0)$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Ας υποθέσουμε ότι $h \neq 0$ και $k \neq 0$. (Οι περιπτώσεις $h = 0$ και $k = 0$ αντιμετωπίζονται ομοίως).

Προσθαφαιρώντας τον όρο $f(x_0, y_0 + k)$, μπορούμε να γράψουμε τη διαφορά

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

ως άθροισμα δύο διαφορών όπου στη μία από αυτές μένει το y και στην άλλη το x, ως εξής:

$$\left[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)\right] + \left[f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\right].$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) βλέπουμε ότι υπάρχουν $\vartheta_1 = \vartheta_1(h, k), \vartheta_2 = \vartheta_2(h, k) \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k)h$$

και

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k)k.$$

Συνεπώς, το πηλίκο

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \tag{4.6.2}$$

γράφεται ως $Q_1(h, k) + Q_2(h, k)$ όπου

$$Q_1(h, k) = (f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \tag{4.6.3}$$

και

$$Q_2(h, k) = \Big(f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0)\Big) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \tag{4.6.4}$$

Επειδή η f_x είναι συνεχής στο (x_0, y_0), έπεται ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) = 0. \tag{4.6.5}$$

Επιπλέον,

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq 1.$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q_1(h, k) = 0. \tag{4.6.6}$$

Ομοίως, επειδή η f_y είναι συνεχής στο (x_0, y_0),

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0)\Big) = 0$$

και αφού

$$\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q_2(h,k) = 0. \tag{4.6.7}$$

Από τις (4.6.6) και (4.6.7) συμπεραίνουμε ότι το όριο του πηλίκου στην (4.6.2) καθώς το $(h,k)\to(0,0)$ είναι ίσο με 0. Συνεπώς, η (4.6.1) ισχύει, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0). □

Ορισμός 4.6.2. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ για την οποία οι f_x, f_y ορίζονται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς στο A καλείται ***συνεχώς παραγωγίσιμη*** στο A. Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 4.6.1 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 4.6.3. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f\in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Παράδειγμα 4.6.4. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=e^xy+x^2e^y$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Επίσης, να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $(1,0)$.

Απόδειξη. Έχουμε $f_x(x,y)=ye^x+2xe^y$ και $f_y(x,y)=e^x+x^2e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και $(x_n,y_n)\to(x,y)$. Τότε $f_x(x_n,y_n)=y_ne^{x_n}+2x_ne^{y_n}\to ye^x+2xe^y$, από τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Αφού λοιπόν οι f_x, f_y είναι συνεχείς, η f είναι παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x,y) είναι εξ ορισμού ο πίνακας γραμμή $f'(x,y)=[f_x(x,y)\quad f_y(x,y)]$. Δηλαδή, $f'(1,0)=[2\quad e+1]$. □

Παράδειγμα 4.6.5. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=e^{x+2y}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x+2y}-1-x-2y}{|x|+|y|}.$$

Απόδειξη. Έχουμε $f_x(x,y)=e^{x+2y}$ και $f_y(x,y)=2e^{x+2y}$. Επομένως, η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x+2y}-1-x-2y}{|x|+|y|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{e^{x+2y}-1-x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}\right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x+2y}-1-x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

διότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$. Επειδή

$$\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}\right|\leq 1$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x+2y}-1-x-2y}{|x|+|y|}=0.$$

□

4.7 Ασκήσεις

Άσκηση 4.7.1. (α) Βρείτε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y της συνάρτησης

$$f(x,y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}$$

(β) Ομοίως για την συνάρτηση $g(x,y) = x^y$, $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

Άσκηση 4.7.2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Αποδείξτε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0,0)$.

Άσκηση 4.7.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^2 + y^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(1,2)$ γίνεται ελάχιστη.

Άσκηση 4.7.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{2x^3 + 3xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) Δείξτε ότι η είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Δείξτε με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου ότι η $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ υπάρχει για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 4.7.5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{|x|\sin x + y^3}{|x| + |y|}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$.

(γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 4.7.6. Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^4}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

Άσκηση 4.7.7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

(ii) Ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Άσκηση 4.7.8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και $\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big) \neq (0,0)$ αποδείξτε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 4.7.9. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μερικώς παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μερικώς παραγωγίσιμες με $\nabla f(x,y) = \nabla g(x,y)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x,y) = g(x,y) + c$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[*Υπόδειξη:* Για το (α) παρατηρείστε ότι $f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)) + (f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1))$ και εφαρμόστε το ΘΜΤ σε κάθε διαφορά.]

Άσκηση 4.7.10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

Άσκηση 4.7.11. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = u_1^2$. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Άσκηση 4.7.12. Ένα έντομο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Ο βαθμός τοξικότητας, στο σημείο (x, y), δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = 2x^2 - 4y^2.$$

Το έντομο βρίσκεται στο σημείο $(-1, 2)$. Σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί για να βρεθεί το ταχύτερο δυνατόν σε περιοχή χαμηλότερης τοξικότητας ;

Άσκηση 4.7.13. Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = y\cos(x - y)$, στο σημείο $(2, 2, 2)$.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f και g έχουν την ίδια τιμή και τις ίδιες μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0), τότε τα γραφήματα τους έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα γραφήματα τους εφάπτονται στο σημείο αυτό.

Άσκηση 4.7.14. Βρείτε τα σημεία στα οποία εφάπτονται τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ και $g(x, y) = x^2 - 3xy + 4x - 16$. Ποιό είναι το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο;

Άσκηση 4.7.15. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. Έστω $c \neq f(0, 0)$ και έστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$g(x, y) = \begin{cases} c & \text{αν } y = x^2 \text{ και } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Η g δεν έχει όριο στο $(0, 0)$. Κατά συνέπεια, η g δεν είναι συνεχής άρα ούτε και παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

(β) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ισχύει ότι $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$.

(γ) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ισχύει ότι $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = g_x(0, 0)u_1 + g_y(0, 0)u_2$.

Άσκηση 4.7.16. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \dfrac{x^5}{x^4 + y^6}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Δείξτε με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου ότι η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **5**

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^d$, Κανόνας αλυσίδας και Θεώρημα μέσης τιμής

5.1 Καμπύλες στον $\mathbb{R}^d$

Με τον όρο (*παραμετρική*) *καμπύλη* στο $\mathbb{R}^d$ θα εννοούμε μια συνάρτηση $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^d$, όπου το I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{\mathbf{r}(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^d$ θα το ονομάζουμε *ίχνος της καμπύλης*. Μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^d$ θα συμβολίζεται με

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t)).$$

Θα λέμε ότι η καμπύλη $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^d$ είναι *παραγωγίσιμη* (ή *διαφορίσιμη*) *στο σημείο* $t_0 \in I$ αν οι $x_1'(t_0), \ldots, x_d'(t_0)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί. Σε αυτήν την περίπτωση το διάνυσμα

$$\mathbf{r}'(t_0) = \left(x_1'(t_0), \ldots, x_d'(t_0)\right)$$

θα καλείται *εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο* t_0.

Δύο πολύ χρήσιμα παραδείγματα επίπεδων καμπυλών είναι τα επόμενα:

(1) ***Το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του*** $\mathbb{R}^d$ ***με άκρα τα σημεία*** $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$: Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε την καμπύλη $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in [0,1]. \tag{5.1.1}$$

Το ίχνος αυτής της καμπύλης καλείται *κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του* $\mathbb{R}^d$ *με άκρα τα* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, και συμβολίζεται με $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Δηλαδή,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in [0,1]\}.$$

Αν $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ και $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ τότε η $\mathbf{r}(t)$ παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t)) \tag{5.1.2}$$

όπου

$$x_i(t) = a_i + t(b_i - a_i) \tag{5.1.3}$$

για όλα τα $1 \le i \le d$. Παρατηρούμε ότι

$$x_i'(t) = b_i - a_i$$

και συνεπώς το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{r}$ είναι σταθερό για κάθε $t \in [0,1]$ και δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, \dots, b_d - a_d) = \mathbf{b} - \mathbf{a}. \tag{5.1.4}$$

(2) ***Ο μοναδιαίος κύκλος του*** $\mathbb{R}^2$: Η καμπύλη $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

έχει ίχνος τον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή τον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $R = 1$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Παρατηρήστε ότι $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$, δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα στο t είναι κάθετο στο $\mathbf{r}(t)$.

(3) ***Το γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής*** : Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε το γράφημα της f,

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \ \text{ και } \ y = f(x)\}$$

αποτελεί το ίχνος της επίπεδης καμπύλης $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

όπου

$$x(t) = t \ \text{ και } \ y(t) = f(t)$$

5.2 Πρώτος Κανόνας αλυσίδας

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί την πιο απλή μορφή του κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε το ίχνος της να περιέχεται στο A. Ορίζουμε $F : I \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους, δηλαδή*

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)),$$

για κάθε $t \in I$.

Αν οι $x(t), y(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο $t_0 \in I$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) =$

(x_0, y_0) *τότε η* F *είναι παραγωγίσιμη στο* t_0 *και ισχύει ότι*

$$(5.2.1)\qquad \begin{aligned} F'(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0) \cdot x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot y'(t_0) \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0)$, έχουμε

$$(5.2.2)\qquad f(x, y) = f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x - x_0, y - y_0)$$

με

$$(5.2.3)\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0\|} = 0$$

Άρα

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= f_x(x_0, y_0) \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + f_y(x_0, y_0) \lim_{t\to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ &+ \lim_{t\to t_0} \frac{R(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))}{t - t_0} \\ &= f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) \\ &+ \lim_{t\to t_0} \frac{R(x(t) - x_0, y(t) - y_0)}{t - t_0} \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\lim_{t\to t_0} \frac{R(x(t) - x_0, y(t) - y_0)}{t - t_0} = 0$$

ή ισοδύναμα,

$$\lim_{t\to t_0} \left|\frac{R(x(t) - x_0, y(t) - y_0)}{t - t_0}\right| = 0$$

Πράγματι,

$$\lim_{t\to t_0} \left|\frac{R(x(t) - x_0, y(t) - y_0)}{t - t_0}\right| = \lim_{t\to t_0} \frac{|R(x(t) - x_0, y(t) - y_0)|}{\|(x(t) - x_0, y(t) - y_0)\|} \cdot \lim_{t\to t_0} \frac{\|(x(t) - x_0, y(t) - y_0)\|}{|t - t_0|}$$

Το όριο του πρώτου παράγοντα στο t_0, από την (5.2.3), είναι ίσο με 0, αφού λόγω συνέχειας της σύνθεσης $E(\mathbf{r}(t)) = E(x(t), y(t))$, έχουμε

$$(5.2.4)\qquad \lim_{t\to t_0} E(x(t), y(t)) = E(x(t_0), y(t_0)) = E(x_0, y_0) = 0$$

Επίσης το όριο του δεύτερου παράγοντα στο t_0 υπάρχει και είναι το $\|\mathbf{r}'(t_0)\|$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\frac{\|(x(t)-x_0, y(t)-y_0)\|}{|t-t_0|} &= \lim_{t\to t_0}\frac{\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2}}{|t-t_0|}\\ &= \lim_{t\to t_0}\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2+\left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}\\ &= \sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2} = \|\mathbf{r}'(t_0)\|.\end{aligned}$$

□

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται άμεσα ως εξής (η απόδειξη είναι ανάλογη):

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω $f(x_1,\dots,x_d): A\to\mathbb{R}$, όπου $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ανοικτό, και $\mathbf{r}(t)=(x_1(t),\dots,x_d(t)): I\to\mathbb{R}^d$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^d$ με ίχνος στο A. Έστω $F: I\to\mathbb{R}$ η σύνθεση $F=f\circ\mathbf{r}$, δηλαδή*

$$F(t)=f(\mathbf{r}(t))=f\left(x_1(t),\dots,x_d(t)\right)$$

για κάθε $t\in I$. Έστω $t_0\in\mathbb{R}$ και έστω $\mathbf{x}_0=\mathbf{r}(t_0)=(x_1(t_0),\dots,x_d(t_0))$. Αν οι $x_1,\dots,x_d$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει ότι

$$\begin{aligned}F'(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\cdot x_1'(t_0)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}_0)\cdot x_d'(t_0)\\ &= \nabla f\left(\mathbf{r}(t_0)\right)\cdot\mathbf{r}'(t_0).\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

Παρατήρηση 5.2.3. Ο τύπος (5.2.5) μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση της έννοιας της κατευθυνόμενης παραγώγου της f στο $\mathbf{x}_0$. Πράγματι, αν $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^d$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{r}(t)=\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}$, $t\in I$, δηλαδή η καμπύλη είναι το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το $\mathbf{x}_0$ που είναι παράλληλο στο $\mathbf{u}$, τότε $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{u}$ για κάθε $t\in I$ και άρα ο τύπος (5.2.5), για $t_0=0$ γράφεται

$$F'(0)=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}$$

Άρα στην περίπτωση αυτή παίρνουμε τον τύπο της παραγώγου της f στο $\mathbf{x}_0$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ (δείτε Πρόταση 4.5.1).

Παράδειγμα 5.2.4. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(tx,ty)=t^a f(x,y)\tag{5.2.6}$$

για όλα τα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και $t\in(0,+\infty)$ (όπου $a\in\mathbb{R}$ σταθερά). Αποδείξτε ότι για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=af(x,y).$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Έστω $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t)=f(x_0t,y_0t)$$

Από τον κανόνα αλυσίδας (για $x(t) = x_0 t$ και $y(t) = y_0 t$) έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 t, y_0 t) \cdot x'(t) + f_y(x_0 t, y_0 t) \cdot y'(t) \\ &= x_0 \cdot f_x(x_0 t, y_0 t) + y_0 \cdot f_y(x_0 t, y_0 t) \end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$. Από την άλλη πλευρά, από την (5.2.6),

$$F'(t) = at^{a-1} f(x_0, y_0)$$

και άρα θα πρέπει να ισχύει ότι

$$x_0 f_x(x_0 t, y_0 t) + y_0 f_y(x_0 t, y_0 t) = at^{a-1} f(x_0, y_0) \tag{5.2.7}$$

για κάθε $t > 0$. Θέτοντας $t = 1$ στην (5.2.7) έχουμε ότι

$$x_0 f_x(x_0, y_0) + y_0 f_y(x_0, y_0) = af(x_0, y_0)$$

και επειδή αυτό ισχύει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ η απόδειξη είναι πλήρης. □

5.3 Ισοσταθμικές καμπύλες και κλίση

Έστω $g : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Μια καμπύλη $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^d$ θα καλείται ***ισοσταθμική καμπύλη της*** g αν αν για όλα τα $t \in I$, $\mathbf{r}(t) \in A$ και υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\mathbf{r}(t)) = c$, δηλαδή το ίχνος της περιέχεται στο A και ο περιορισμός της g στο ίχνος της $\mathbf{r}$ είναι σταθερή συνάρτηση.

Πρόταση 5.3.1 (καθετότητα του ∇g και των ισοσταθμικών καμπυλών της g). *Έστω $g : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^d$, μια ισοσταθμική καμπύλη της g. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε*

$$\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \perp \mathbf{r}'(t_0)$$

Απόδειξη. Έστω $G(t) = g(\mathbf{r}(t))$, $t \in I$. Η G είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $G'(t) = 0$ για όλα τα $t \in I$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε ότι $G'(t_0) = \nabla g(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$ και άρα $\nabla g(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$. Συνεπώς, τα διανύσματα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ και $\mathbf{r}'(t_0)$ είναι κάθετα μεταξύ τους. □

5.4 Θεώρημα μέσης τιμής για πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του A τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ να περιέχεται στο A. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Τότε υπάρχει σημείο $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{5.4.1}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

η καμπύλη που παραμετρικοποιεί το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ και έστω $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$F(t)=f(\mathbf{r}(t))=f\left(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right)$$

για κάθε $t\in[0,1]$. Επειδή $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\subseteq A$, η F είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, όπως είδαμε (βλ. σχέση (5.1.4)) το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$ είναι σταθερό και ίσο με $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ για οποιοδήποτε $t\in[0,1]$.΄Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα 5.2.2 έπεται ότι και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(t)=\nabla f\left(\mathbf{r}(t)\right)\cdot\mathbf{r}'(t)=\nabla f\left(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

για κάθε $t\in(0,1)$. Από το Θεώρημα μέσης τιμής για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής έχουμε

$$F(1)-F(0)=F'(\xi) \tag{5.4.2}$$

για κάποιο $\xi\in(0,1)$. Επειδή $F(0)=f(\mathbf{a})$ και $F(1)=f(\mathbf{b})$, αντικαθιστώντας στην (5.4.2) παίρνουμε

$$f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=\nabla f\left(\mathbf{a}+\xi(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

Θέτοντας τώρα $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{a}+\xi(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ έχουμε ότι $\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{a},\mathbf{b})$ και

$$f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=\nabla f\left(\boldsymbol{\xi}\right)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

$\square$

Παράδειγμα 5.4.2. Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$ με $f(\mathbf{a})=f(\mathbf{b})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{a},\mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$\nabla f(\boldsymbol{\xi})\perp\mathbf{b}-\mathbf{a}. \tag{5.4.3}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.4.1 έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{a},\mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=\nabla f(\boldsymbol{\xi})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}). \tag{5.4.4}$$

Επειδή $f(\mathbf{b})=f(\mathbf{a})$, έπεται ότι $\nabla f(\boldsymbol{\xi})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$, δηλαδή $\nabla f(\boldsymbol{\xi})\perp\mathbf{b}-\mathbf{a}$. $\square$

Παράδειγμα 5.4.3. Έστω $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν υπάρχουν $\mathbf{a}\neq\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ με $f(\mathbf{a})=f(\mathbf{b})$ και $g(\mathbf{a})=g(\mathbf{b})$, αποδείξτε ότι τότε υπάρχουν $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ τέτοια ώστε

$$f_x(\boldsymbol{\xi})g_y(\boldsymbol{\eta})=f_y(\boldsymbol{\xi})g_x(\boldsymbol{\eta})$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$. Από το θεώρημα μέσης τιμής για την $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ υπάρχει $\boldsymbol{\xi}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ τέτοιο ώστε

$$f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=\nabla f(\boldsymbol{\xi})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=f_x(\boldsymbol{\xi})(b_1-a_1)+f_y(\boldsymbol{\xi})(b_2-a_2).$$

Ομοίως, για την g υπάρχει $\boldsymbol{\eta}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ με

$$g(\mathbf{b})-g(\mathbf{a})=\nabla g(\boldsymbol{\eta})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=g_x(\boldsymbol{\eta})(b_1-a_1)+g_y(\boldsymbol{\eta})(b_2-a_2).$$

Αφού $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ και $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{b})$, οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν ότι

$$f_x(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + f_y(\boldsymbol{\xi})(b_2 - a_2) = 0$$

και

$$g_x(\boldsymbol{\eta})(b_1 - a_1) + g_y(\boldsymbol{\eta})(b_2 - a_2) = 0,$$

και, επειδή $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(\boldsymbol{\xi})x + f_y(\boldsymbol{\xi})y &= 0 \\ g_x(\boldsymbol{\eta})x + g_y(\boldsymbol{\eta})y &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη μηδενική λύση. Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδενική, δηλαδή

$$f_x(\boldsymbol{\xi})g_y(\boldsymbol{\eta}) - f_y(\boldsymbol{\xi})g_x(\boldsymbol{\eta}) = 0 \Rightarrow f_x(\boldsymbol{\xi})g_y(\boldsymbol{\eta}) = f_y(\boldsymbol{\xi})g_x(\boldsymbol{\eta})$$

□

Πόρισμα 5.4.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι σταθερή.*

(2) *Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και*

$$\nabla f = \mathbf{0}$$

δηλαδή όλες οι μερικές παράγωγοι της f είναι ίσες με μηδέν.

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2): Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ και $1 \leq i \leq d$. Αν η f είναι σταθερή τότε

$$f_{x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Έστω $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ και έστω $c = f(\mathbf{a})$. Έστω $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. Η f είναι C^1 συνάρτηση διότι είναι μερικώς παραγωγίσιμη και οι μερικές παράγωγοι ως σταθερές είναι και συνεχείς. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^d$. Τώρα, από το Θεώρημα 5.4.1 έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ με

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

και άρα $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) = c$. □

Σημείωση: Το Πόρισμα 5.4.4 δεν ισχύει όταν το πεδίο ορισμού της f είναι τυχόν υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, έστω και ανοικτό. Για παράδειγμα, έστω D_1, D_2 δύο ξένοι ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{R}^2$ και έστω $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D_1 \\ 2, & (x, y) \in D_2 \end{cases}$$

Τότε, $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι αν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει ένα σημείο από τον πρώτο δίσκο με ένα σημείο από τον δεύτερο, τότε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα δεν περιέχεται ολόκληρο στο A και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.4.1.

Παράδειγμα 5.4.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x + h, y) = f(x, y + h) = f(x, y)$$

για όλα τα $h \in (-\delta, \delta)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 5.4.4 αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει μηδενικές μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο (x, y). Πράγματι, έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Από την υπόθεση υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x + h, y) = f(x, y + h) = f(x, y)$ για όλα τα $h \in (-\delta, \delta)$ και άρα $f(x + h, y) - f(x, y) = f(x, y + h) - f(x, y) = 0$ για h αρκετά κοντά στο 0. Συνεπώς,

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

□

Παράδειγμα 5.4.6. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι *τοπικά σταθερή* αν είναι σταθερή γύρω από κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή αν για κάθε σημείο $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta = \delta(a_1, a_2) > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στην ανοικτή μπάλα $B_\delta(a_1, a_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x-a_1, y-a_2)\| \leq \delta\}$. Αποδείξτε ότι κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 5.4.4 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και $f_x = f_y = 0$. Πράγματι, έστω $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $\delta = \delta(a_1, a_2) > 0$ η ακτίνα της μπάλας με κέντρο το (a_1, a_2) όπου η f είναι σταθερή. Τότε, για κάθε $h \in \mathbb{R}$ με $0 < |h| < \delta$ έχουμε ότι το σημείο $(a_1 + h, a_2)$ ανήκει σε αυτή τη μπάλα (αφού η απόστασή του από το (a_1, a_2) ισούται με $|h| < \delta$) και άρα $f(a_1 + h, a_2) = f(a_1, a_2)$. Συνεπώς,

$$f_x(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = 0.$$

Ομοίως, για $k \in \mathbb{R}$ με $0 < |k| < \delta$ το σημείο $(a_1, a_2 + k)$ ανήκει στην ίδια μπάλα (αφού η απόστασή του από το (a_1, a_2) ισούται με $|k| < \delta$) και άρα $f(a_1, a_2 + k) = f(a_1, a_2)$. Συνεπώς,

$$f_y(a_1, a_2) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)}{k} = 0.$$

□

5.5 Κανόνας αλυσίδας για μερικές παραγώγους

Θεώρημα 5.5.1. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και $x_1, \ldots, x_d : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Έστω $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση*

$$F(t_1, \ldots, t_m) = f\left(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_d(t_1, \ldots, t_m)\right)$$

για κάθε $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

Έστω $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{x}_0 = (x_1(\mathbf{t}_0), \ldots, x_d(\mathbf{t}_0)) \in \mathbb{R}^m$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και οι $x_1, \ldots, x_d$ είναι μερικώς παραγωγίσιμες στο $\mathbf{t}_0$ τότε η F είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{t}_0$ και για κάθε $j = 1, \ldots, m$

ισχύει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0)$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{t}_0 = (t_1^0, \ldots, t_d^0)$. Σταθεροποιούμε κάποιο $j \in \{1, \ldots, m\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{F(t_1^0, \ldots, t_j^0 + t, \ldots, t_m^0) - F((t_1^0, \ldots, t_j^0, \ldots, t_m^0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j) - F(\mathbf{t}_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j), \ldots, x_d(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j)) - f(x_1(\mathbf{t}_0), \ldots, x_d(\mathbf{t}_0))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(y_1(t), \ldots, y_d(t)) - f(y_1(0), \ldots, y_d(0))}{t} = G'(0)
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

όπου $y_i(t) = x_i(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j)$ για κάθε $i = 1, \ldots, d$ και $G(t) = f(y_1(t), \ldots, y_d(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 5.2.2 παίρνουμε

$$G'(0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1(0), \ldots, y_d(0)) \cdot y_i'(0)$$

Έχουμε

$$y_i'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{y_i(t) - y_i(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x_i(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j)) - x_i(\mathbf{t}_0)}{t} = \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0)$$

και αντίστοιχα

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1(0), \ldots, y_d(0)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(\mathbf{t}_0), \ldots, x_d(\mathbf{t}_0))$$

για όλα τα $i = 1, \ldots, d$. Συνεπώς,

$$G'(0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(\mathbf{t}_0), \ldots, x_d(\mathbf{t}_0)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \tag{5.5.2}$$

Από τις (5.5.1) και (5.5.2) έπεται το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 5.5.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(t_1x_1, t_2x_2) = t_1^{a_1} t_2^{a_2} f(x, y) \tag{5.5.3}$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t_1, t_2 > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

$$a_2 x f_x(x, y) = a_1 y f_y(x, y) = a_1 a_2 f(x, y).$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t_1, t_2) = f(x_0 t_1, y_0 t_2).$$

Από το Θεώρημα 5.5.1 (για $x(t_1, t_2) = x_0 t_1$ και $y(t_1, t_2) = y_0 t_2$) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= f_x(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1, t_2) + f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1, t_2) \\
&= f_x(x_0 t, y_0 t) \cdot x_0
\end{aligned}$$

για κάθε $t_1, t_2 > 0$. Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1,t_2) &= f_x(x_0t_1,y_0t_2)\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2) + f_y(x_0t_1,y_0t_2)\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1,t_2)\\ &= f_y(x_0t_1,y_0t_2)\cdot y_0.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, από την (5.5.3),

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1,t_2) = a_1 t_1^{a_1-1}t_2^{a_2}f(x_0,y_0)$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1,t_2) = t_1^{a_1}a_2 t_2^{a_2-1}f(x_0,y_0)$$

άρα θα πρέπει να ισχύουν οι

$$x_0 f_x(x_0t_1,y_0t_2) = a_1 t_1^{a_1-1}t_2^{a_2}f(x_0,y_0)$$

και, αντίστοιχα,

$$y_0 f_y(x_0t_1,y_0t_2) = t_1^{a_1}a_2 t_2^{a_2-1}f(x_0,y_0)$$

για κάθε $t_1, t_2 > 0$. Θέτοντας $t_1 = t_2 = 1$ έχουμε ότι

$$x_0 f_x(x_0,y_0) = a_1 f(x_0,y_0) \text{ και } y_0 f_y(x_0,y_0) = a_2 f(x_0,y_0)$$

οπότε

$$a_2 x_0 f_x(x_0,y_0) = a_1 y_0 f_y(x_0,y_0) = a_1 a_2 f(x_0,y_0)$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 5.5.3. Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(u,v,w) = f(u-v, v-w, w-u)$$

για κάθε $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι

$$F_u + F_v + F_w = 0.$$

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.5.1 για $t_1 = u$, $t_2 = v$ και $t_3 = w$. Θέτουμε $x(u,v,w) = u-v$, $y(u,v,w) = v-w$ και $z(u,v,w) = w-u$. Έστω $(u_0,v_0,w_0)\in\mathbb{R}^3$ και έστω $x_0 = u_0 - v_0$, $y_0 = v_0 - w_0$ και $z_0 = w_0 - u_0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}F_u(u_0,v_0,z_0) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0,v_0,w_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0,w_0)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0,w_0)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0,w_0)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} F_v(u_0, v_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} F_w(u_0, v_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial x}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial y}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial z}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση. □

5.6 Ασκήσεις

Άσκηση 5.6.1. Έστω $f(x, y) = x^2 e^y$, $x(t) = t^2$, $y(t) = \sin t$, $F(t) = f(x(t), y(t))$. Βρείτε την $F'(t)$.

Λύση : $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2xe^y 2t + x^2 e^y \cos t = 4t^3 e^{\sin t} + t^4 e^{\sin t} \cos t$.

Άσκηση 5.6.2. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Θέτουμε $F(x, y) = g(f(x, y))$. Δείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τα διανύσματα $\nabla f(x, y)$ και $\nabla F(x, y)$ είναι παράλληλα.

Λύση :$F_x(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f_x(x, y)$ και $F_y(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f_y(x, y)$ και άρα $\nabla F(x, y) = \lambda \nabla f(x, y)$, με $\lambda = g'(f(x, y)$.

Άσκηση 5.6.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x, y)x + f_y(x, y)y \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο.

Λύση : Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) - f(0, 0) &= f_x(\xi x_0, \xi y_0)x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)y_0 \\ &= \frac{1}{\xi}\Big(f_x(\xi x_0, \xi y_0)\xi x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)\xi y_0\Big) \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = \xi x_0$ και $y = \xi y_0$ παίρνουμε

$$f(x_0, y_0) - f(0, 0) = \frac{1}{\xi}\Big(f_x(x, y)x + f_y(x, y)y\Big) \geq 0$$

και άρα $f(x_0, y_0) \geq f(0, 0)$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε ότι η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 5.6.4. Έστω $f(x,y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x+t,y+t) = f(x,y)$ για όλα τα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και $t\in\mathbb{R}$.

(1) Δείξτε ότι για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $f_x(x,y)+f_y(x,y)=0$.

(2) Αν $f_x(0,0)\neq 0$ δείξτε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν υπάρχει.

Λύση : (1) (α′ τρόπος) Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ και έστω $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t) = f(x_0+t, y_0+t)$$

Από τον Κανόνα Αλυσίδας για την καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t),y(t))$ με $x(t)=x_0+t$ και $y(t)=y_0+t$, έχουμε

$$\begin{aligned}F'(t) &= f_x(x_0+t,y_0+t)\cdot x'(t) + f_y(x_0+t,y_0+t)\cdot y'(t)\\ &= f_x(x_0+t,y_0+t) + f_y(x_0+t,y_0+t)\end{aligned}$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$ Από την άλλη μεριά, έχουμε $F(t)=f(x_0,y_0)=c$ και άρα

$$F'(t)=0$$

Συνεπώς θα πρέπει

$$f_x(x_0+t,y_0+t)+f_y(x_0+t,y_0+t)=0 \tag{5.6.1}$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Θέτοντας στην (5.6.1) $t=0$ έχουμε ότι

$$f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)=0$$

(β′ τρόπος) Από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της f έχουμε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{5.6.2}$$

και άρα θέτοντας $h=k=t$ και χρησιμοποιώντας ότι $f(x_0+t,y_0+t)=f(x_0,y_0)$ για όλα τα $t\in\mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)t-f_y(x_0,y_0)t}{\sqrt{2}|t|}=0 \Rightarrow$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0)t+f_y(x_0,y_0)t}{|t|}=0\Rightarrow f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)=0$$

(2) Θέτουμε $f_x(0,0)=a\neq 0$. Τότε, από το (1) έχουμε $f_y(0,0)=-a$ και από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $(0,0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-ax+ay}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} - a\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$$

Συνεπώς, αν το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = L$ υπήρχε θα είχαμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{L}{a}$$

Όμως το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν υπάρχει. Πράγματι, για $x = y = t$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ ενώ για $x = t > 0$ και $y = -t$ παίρνουμε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης, Τύπος Taylor

6.1 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y να υπάρχουν τουλάχιστον σε μια περιοχή του (x_0, y_0). Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων f_x, f_y ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο*** (x_0, y_0).

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τέσσερεις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x_0, y_0) &= (f_x)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
f_{xy}(x_0, y_0) &= (f_x)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
f_{yx}(x_0, y_0) &= (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
f_{yy}(x_0, y_0) &= (f_y)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0}.
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\
f_{yx}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ είναι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0). Ειδικότερα, οι $f_{xy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ καλούνται ***μεικτές*** μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0).

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} στα κατάλληλα σύνολα των σημείων (x, y) του A όπου οι τιμές $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες.

Παράδειγμα 6.1.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x,y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$f_{xx}(x,y)(= (f_x)_x(x,y)) = 6x + 2y, \quad f_{xy}(x,y)(= (f_x)_y(x,y)) = 2x + 2y,$$
$$f_{yx}(x,y)(= (f_y)_x(x,y)) = 2x + 2y, \quad f_{yy}(x,y)(= (f_y)_y(x,y)) = 6y + 2x.$$

6.2 Συμμετρία των μεικτών παραγώγων

Στο Παράδειγμα 6.1.1 οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για τη συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 6.2.1 (θεώρημα Schwarz). *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και οι f_{xy}, f_{yx} είναι συνεχείς στο (x_0, y_0), τότε $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1 χρειαζόμαστε κάποια προεργασία. Σε ό,τι ακολουθεί, για απλότητα θα υποθέσουμε ότι $A = \mathbb{R}^2$.

Ορισμός 6.2.2. Έστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h, k \neq 0$ και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε

$$\Delta_x^h g(x,y) = g(x+h, y) - g(x,y) \qquad \text{και } \Delta_y^k g(x,y) = g(x, y+k) - g(x,y)$$

Η επόμενη πρόταση είναι μια διδιάστατη επέκταση του θεωρήματος μέσης τιμής.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $h, k \neq 0$. Τότε:*

(1) *Υπάρχουν $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε*

$$\Delta_x^h \left(\Delta_y^k f(x_0, y_0)\right) = f_{xy}\,(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k)\, hk \tag{6.2.1}$$

(2) *Υπάρχουν $\vartheta_1', \vartheta_2' \in (0,1)$ τέτοια ώστε*

$$\Delta_y^k \left(\Delta_x^h f(x_0, y_0)\right) = f_{yx}\left(x_0 + \vartheta_1' h, y_0 + \vartheta_2' k\right) hk \tag{6.2.2}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο τον ισχυρισμό (1) (ο ισχυρισμός (2) προκύπτει με όμοιο τρόπο). Εφαρμόζονταω το Θεώρημα Μέσης Τιμής γαι συναρτήσεις μιασ μεταβλητής παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\Delta_x^h \left(\Delta_y^k f(x_0, y_0)\right) &= \Delta_x^h \left(f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\right) \\
&= \Delta_x^h \left(f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) \cdot k\right) \\
&= [f_y(x_0 + h, y_0 + \vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k)] \cdot k \\
&= [(f_y)x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k) \cdot h] \cdot k \\
&= f_{yx}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k) \cdot hk
\end{aligned}$$

με $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$. □

Πρόταση 6.2.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $h, k \neq 0$. Τότε*

$$\Delta_x^h \left(\Delta_y^k f(x_0, y_0)\right) = \Delta_y^k \left(\Delta_x^h f(x_0, y_0)\right) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) \tag{6.2.3}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\Delta_x^h\left(\Delta_y^k f(x_0,y_0)\right) &= \Delta_x^h\left(f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)\right)\\ &= \left(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-(f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)\right)\\ &= f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)\end{aligned}$$

Ομοίως για την $\Delta_x^h\left(\Delta_y^k f(x_0,y_0)\right)$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος Schwarz:

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1. Από την (6.2.1) και τη συνέχεια της f_{xy} στο (x_0,y_0) έχουμε

(6.2.4)
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta_x^h\left(\Delta_y^k f(x_0,y_0)\right)}{hk}=\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}\left(x_0+\vartheta_1 h,y_0+\vartheta_2 k\right)=f_{xy}\left(x_0,y_0\right)$$

Ομοίως, από την (6.2.2) και τη συνέχεια της f_{yx} στο (x_0,y_0) έχουμε

(6.2.5)
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta_y^k\left(\Delta_x^h f(x_0,y_0)\right)}{hk}=\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}\left(x_0+\vartheta_1' h,y_0+\vartheta_2' k\right)=f_{yx}\left(x_0,y_0\right)$$

Από την (6.2.3), για κάθε $h,k\neq 0$,

$$\Delta_x^h\left(\Delta_y^k f(x_0,y_0)\right)=\Delta_y^k\left(\Delta_x^h f(x_0,y_0)\right)$$

Άρα

(6.2.6)
$$f_{xy}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta_x^h\left(\Delta_y^k f(x_0,y_0)\right)}{hk}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta_y^k\left(\Delta_x^h f(x_0,y_0)\right)}{hk}=f_{yx}\left(x_0,y_0\right)$$

□

Το Θεώρημα Schwarz έχει και την παρακάτω πιο ισχυρή μορφή.

Θεώρημα 6.2.5 (ισχυρή μορφή του Θεωρήματος Schwarz). *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f:A\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y και f_{xy} υπάρχουν σε μια περιοχή του (x_0,y_0) και η f_{xy} είναι συνεχής στο (x_0,y_0). Τότε, υπάρχει και η $f_{yx}(x_0,y_0)$ και ισχύει ότι $f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.5 είναι παρόμοια με αυτήν που δώσαμε για το Θεώρημα 6.2.1. Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με το επόμενο παράδειγμα που δείχνει ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα 6.2.6 (παράδειγμα συνάρτησης για την οποία $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=0$ και

$$f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

αν $(x,y)\neq(0,0)$. Θα δείξουμε ότι $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} \tag{6.2.7}$$

και

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x}. \tag{6.2.8}$$

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τις $f_x(0,0), f_y(0,0), f_x(0,y)$ και $f_y(x,0)$. Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Για το σημείο $(0,y)$, με $y \neq 0$,

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y,$$

και τέλος για το $(x,0)$ με $x \neq 0$,

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x.$$

Αντικαθιστώντας στις (6.2.7) και (6.2.8) παίρνουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

ενώ

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

□

6.3 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης να υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0). Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0). Υιοθετώντας αντίστοιχο συμβολισμό με αυτόν των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης, συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους τρίτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) ως εξής:

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) \\
f_{xxy}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x_0, y_0) \\
f_{xyx}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x_0, y_0) \\
f_{xyy}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x_0, y_0) \\
f_{yxx}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) \\
f_{yxy}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x_0, y_0) \\
f_{yyx}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) \\
f_{yyy}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f έως και τρίτης τάξης υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***μερικές παράγωγοι τέταρτης τάξης της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0). Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε τις ***μερικές παραγώγους*** n***-τάξης της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0).

Το Θεώρημα 6.2.1 γενικεύεται με επαγωγή ως εξής.

Θεώρημα 6.3.1. *Έστω* $n \geq 2$, $f : A \to \mathbb{R}$ *όπου* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *και* (x_0, y_0) *εσωτερικό σημείο του* A. *Αν οι μερικές παράγωγοι της* f *έως και* n*-τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του* (x_0, y_0) *και όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι* n*-τάξης είναι συνεχείς στο* (x_0, y_0) *τότε όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι στο* (x_0, y_0) *που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.*

Για παράδειγμα, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.1 για $n = 3$ τότε

$$f_{xyx}(x_0, y_0) = f_{xxy}(x_0, y_0) = f_{yxx}(x_0, y_0).$$

6.4 Τύπος Taylor γαι συναρτήσεις μιας μεταβλητής-Σύντομη επανάληψη

Ας θυμηθούμε τα θεωρήματα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής πριν προχωρήσουμε στη γενίκευσή τους.

Θεώρημα 6.4.1 (τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής). *Έστω* $m \geq 0$ *ακέραιος,* I *διάστημα του* $\mathbb{R}$ *και* $f : I \to \mathbb{R}$ *μια* $(m+1)$*-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης* $a \in I$. *Τότε, για κάθε* $h \neq 0$ *με* $a + h \in I$ *υπάρχει σημείο* ξ *στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα* a *και* $a + h$ *τέτοιο ώστε*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+1}. \tag{6.4.1}$$

Το πολυώνυμο

(6.4.2) $$T_m(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor*** m***-τάξης της*** f ***με κέντρο το*** a. Ο τύπος (6.4.1) γράφεται και ως εξής: Για κάθε $x \in I$,

(6.4.3) $$f(x) = T_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x.

Προφανώς, $T_m(a) = f(a)$. Αν x είναι ένα σημείο του I διαφορετικό από το a, τότε η εξίσωση (6.4.3) μας λέει ότι η διαφορά $f(x) - T(x)$ γράφεται ως

(6.4.4) $$f(x) - T_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x.

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω $m \geq 1$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$. Έστω $a \in I$ και έστω ότι η f είναι m-φορές παραγωγίσιμη στο a. Έστω $T_m(x)$ το πολυώνυμο Taylor m-τάξης της f με κέντρο το a. Τότε,*

(6.4.5) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_m(x)}{(x-a)^m} = 0.$$

Με άλλα λόγια

(6.4.6) $$f(x) = T_m(x) + R_m(x)$$

όπου

(6.4.7) $$\lim_{x \to a} \frac{R_m(x)}{(x-a)^m} = 0.$$

6.5 Η συνάρτηση $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$

Για τα επόμενα σταθεροποιούμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A.

Έστω επίσης $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

(6.5.1) $$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2)$$

για κάθε $t \in [0,1]$.

Η συνάρτηση F έχει χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής (Θεώρημα 5.4.1). Όπως είδαμε εκεί, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο A τότε από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2.$$

Επίσης, παρατηρήστε ότι αν το $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε η παράγωγος της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$ στο $\mathbf{a}$, δηλαδή η $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a})$, ισούται με την $F'(0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0).$$

Πρόταση 6.5.1. *Αν $f \in C^2(A)$ τότε η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$F''(t) = f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2^2 \tag{6.5.2}$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Ειδικότερα, για $t = 0$ έχουμε

$$F''(0) = f_{xx}(\mathbf{a})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a})h_2^2. \tag{6.5.3}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{h} = (a_1 + th_1, a_2 + th_2)$, $t \in [0, 1]$. Έχουμε δει ότι η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in [0, 1]$ και το εφαπτόμενο διάνυσμά της σε κάθες $t \in [0, 1]$ είναι το $\mathbf{r}'(t) = (h_1, h_2) = \mathbf{h}$. Επίσης, η f είναι C^2 άρα και C^1, συνεπώς είναι παραγωγίσιμη. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2 = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F''(t) = (F')'(t) &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\ &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1\Big)' + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\ &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))\Big)'h_1 + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))\Big)'h_2. \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση $f_x(\mathbf{r}(t))$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \Big(f_x(\mathbf{r}(t))\Big)' &= \nabla f_x(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (f_x)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_x)_y(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2. \end{aligned}$$

Ομοίως, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $f_y(\mathbf{r}(t))$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι $f_{xy} = f_{yx}$ (λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης) έχουμε

$$\begin{aligned} \Big(f_y(\mathbf{r}(t))\Big)' &= \nabla f_y(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (f_y)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_y)_y(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{yx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.5.4) παίρνουμε εύκολα την (6.5.2). □

Όπως παρατηρήσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας, όταν το διάνυσμα $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a}) = F'(0)$. Από αυτήν την άποψη, η δεύτερη παράγωγος $F''(0)$ ορίζεται ως η *δεύτερης τάξης παράγωγος της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$*.

Παρατήρηση 6.5.2. Αν $\mathbf{h} = \mathbf{e}_1$ (αντίστοιχα $\mathbf{h} = \mathbf{e}_2$) παρατηρήστε ότι $F''(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})$ (αντίστοιχα, $F''(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a})$).

Μπορούμε να γενικεύσουμε την Πρόταση 6.5.1 για παραγώγους ανώτερης τάξης. Για να διατυπώσουμε τη γενική μορφή της, είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό.

Ορισμός 6.5.3. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $k \geq 1$, $f \in C^k(A)$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(x,y) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(x,y)\, h_1^{k-j}h_2^j \\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(x,y)\, h_1^{k-j}h_2^j\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

για κάθε $(x,y) \in A$.

Παρατήρηση 6.5.4. Ο συμβολισμός $\left[h_1\dfrac{\partial}{\partial x} + h_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)}$ δεν είναι τυχαίος. Προέρχεται από τον τύπο του *διωνύμου του Νεύτωνα*: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος, τότε

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^j \tag{6.5.6}$$

όπου

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \tag{6.5.7}$$

για κάθε $j = 0, \ldots, k$.

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $k = 1, 2, 3$, η (6.5.5) παίρνει αντίστοιχα τις μορφές

$$\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_2,$$

$$\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\, h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\, h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, h_2^2,$$

$$\begin{aligned}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)} f(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\, h_1^3 & \\ + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)\, h_1^2h_2 &+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)\, h_1h_2^2 \\ + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)\, h_2^3. &\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε τη γενική μορφή της Πρότασης 6.5.1.

Πρόταση 6.5.5. *Αν $f \in C^k(A)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, τότε η F είναι k-φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$F^{(k)}(t) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \tag{6.5.8}$$

για κάθε $t \in [0,1]$.

Ειδικότερα, για $t = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F^{(k)}(0) &= \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(a_1, a_2)\, h_1^j h_2^{k-j}. \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 6.5.5 γίνεται με επαγωγή και είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 6.5.1. Αν το $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε η παράγωγος $F^{(k)}(0)$ ονομάζεται *k-τάξης παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση* $\mathbf{h}$.

6.6 Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεώρημα 6.6.1. *Έστω $m \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^{m+1}(A)$ (δηλαδή, $f : A \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και $m+1$ τάξης). Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] \subseteq A$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) &+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(a_1, a_2) \\ &+ \frac{1}{(m+1)!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m+1)} f(a_1 + \xi h_1, a_2 + \xi h_2). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}), \quad t \in [0,1].$$

Αφού $f \in C^{m+1}(A)$, από την Πρόταση 6.5.5 έχουμε ότι η F είναι $m+1$-φορές παραγωγίσιμη. Από τον τύπο του Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής (Θεώρημα 6.4.1 για $a = 0$ και $h = 1$) έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \tag{6.6.1}$$

Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$, $F(1) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$,

$$F^{(k)}(0) \overset{(6.5.9)}{=} \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a})$$

και

$$F^{(m+1)}(\xi) \overset{(6.5.8)}{=} \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m+1)} f(\mathbf{a} + \xi\mathbf{h}),$$

η σχέση (6.6.1) δίνει τον τύπο του Taylor. □

Ορισμός 6.6.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $m \geq 1$ ακέραιος. Το πολυώνυμο

$$T_m(x,y) = f(a_1,a_2) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(a_1,a_2) \tag{6.6.2}$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor*** m***-τάξης της*** f ***με κέντρο το*** $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_1(x,y) = f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2).$$

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(a_1,a_2)(x-a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1,a_2)(x-a_1)(y-a_2) + f_{yy}(a_1,a_2)(y-a_2)^2\right]. \end{aligned}$$

Άρα το Θεώρημα 6.6.1 μας λέει ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x,y) \in A$ με $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subseteq A$ ισχύει ότι

$$f(x,y) = T_m(x,y) + R_m(x,y)$$

όπου

$$R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m+1)} f(a_1 + \xi(x-a_1), a_2 + \xi(y-a_2))$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$. Ειδικότερα, έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 6.6.3. *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *ανοικτό και* $f \in C^2(A)$. *Έστω* $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ *και* $\mathbf{x} = (x,y)$ *με* $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ *τέτοιο ώστε* $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subseteq A$. *Τότε, υπάρχει* $\xi \in (0,1)$ *(που εξαρτάται από το* $\mathbf{x}$*) τέτοιο ώστε αν θέσουμε* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (a_1 + \xi(x-a_1), a_2 + \xi(y-a_2))$, *έχουμε*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi_1,\xi_2)(x-a_1)^2 + 2f_{xy}(\xi_1,\xi_2)(x-a_1)(y-a_2) + f_{yy}(\xi_1,\xi_2)(y-a_2)^2\right) \end{aligned}$$

Ειδικότερα αν $\mathbf{a} = (0,0)$ *τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi_1,\xi_2)x^2 + 2f_{xy}(\xi_1,\xi_2)xy + f_{yy}(\xi_1,\xi_2)y^2\right) \end{aligned}$$

με $(\xi_1, \xi_2) = (\xi x, \xi y)$ *για κάποιο* $\xi \in (0,1)$.

Παράδειγμα 6.6.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = e^{3x+2y}$. Για $m = 1, 2$ υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,1)$.

Απάντηση: Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$f_x(x,y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x,y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$f_{xx}(x,y) = (f_x)_x(x,y) = 9e^{3x+2y}, \; f_{xy}(x,y) = (f_x)_y(x,y) = 6e^{3x+2y}$$

$$f_{yx}(x,y) = (f_y)_x(x,y) = 6e^{3x+2y}, f_{yy}(x,y) = (f_y)_y(x,y) = 4e^{3x+2y}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0,1) = 3e^2, \;\; f_y(0,1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0,1) = 9e^2, \;\; f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = 6e^2, \;\; f_{yy}(0,1) = 4e^2.$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(a_1, a_2) = (0,1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1) \\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,1)x^2 + 2f_{xy}(0,1)x(y-1) + f_{yy}(0,1)(y-1)^2\right] \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[9e^2x^2 + 12e^2x(y-1) + 4e^2(y-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.6.5. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 2$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, αποδείξτε ότι $f(x,y) = (x+y)^2$.

Απάντηση: Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από το Πόρισμα 6.6.3, για $\mathbf{a} = (0,0)$ και $\mathbf{x} = (x,y)$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2\right). \end{aligned} \tag{6.6.3}$$

Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Επειδή για $(x,y) = (0,0)$ ο παραπάνω τύπος δίνει ότι $f(0,0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

6.7 Θεώρημα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Στο κεφάλαιο για την παραγώγιση είδαμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ αν και μόνο αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a_1, a_2)$ και $f_y(a_1, a_2)$ υπάρχουν και

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - f_x(a_1,a_2)(x-a_1) - f_y(a_1,a_2)(y-a_2)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|} = 0. \tag{6.7.1}$$

Επειδή το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a}$ ορίζεται να είναι το

$$T_1(x,y) = f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2),$$

ο τύπος (6.7.1) γράφεται

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|} = 0. \tag{6.7.2}$$

Το επόμενο θεώρημα γενικεύει την (6.7.2) όταν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και m-τάξης.

Θεώρημα 6.7.1 (θεώρημα Taylor). *Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^m(A)$. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $T_m(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor m-τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a}$. Τότε,*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|^m} = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}} = 0. \tag{6.7.3}$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $(x,y) \in A$,

$$f(x,y) = T_m(x,y) + R_m(x,y) \tag{6.7.4}$$

με

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R_m(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|^m} = 0. \tag{6.7.5}$$

Για παράδειγμα, αν $m = 2$, έχουμε το εξής

Πόρισμα 6.7.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $T_2(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a}$. Τότε,*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= T_2(x,y) + R_2(x,y) \\ &= f(0,0) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(a_1,a_2)(x-a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1,a_2)(x-a_1)(y-a_2) + f_{yy}(a_1,a_2)(y-a_2)^2\right] + R_2(x,y) \end{aligned}$$

με

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R_2(x,y)}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = 0$$

Ειδικότερα αν $\mathbf{a} = (0,0)$ τότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] + R_2(x,y) \end{aligned}$$

με $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.7.1 θα χρειαστεί να κάνουμε κάποια προεργασία. Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^m(A)$. Έστω $\mathbf{x} = (x,y), \mathbf{x}' = (x',y') \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$. Θέτουμε

$$\delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \max\left\{\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x',y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x,y)\right| : 0 \leq j \leq m\right\} \tag{6.7.6}$$

και

$$\Delta(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x',y') - \left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x,y). \tag{6.7.7}$$

Λήμμα 6.7.3. *Για κάθε* $\mathbf{x}',\mathbf{x} \in A$ *και* $\mathbf{h} = (h_1,h_2)$ *ισχύει ότι*

$$\left|\Delta(\mathbf{x}',\mathbf{x})\right| \leq 2^{m/2}\delta(\mathbf{x}',\mathbf{x})\,\|(h_1,h_2)\|^m\,. \tag{6.7.8}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}',\mathbf{x} \in A$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\Delta(\mathbf{x}',\mathbf{x})\right| &= \left|\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}\,(x',y')\,h_1^{m-j}h_2^j - \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}\,(x,y)\,h_1^{m-j}h_2^j\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}\,(x',y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}\,(x,y)\right||h_1|^{m-j}|h_2|^j \\
&\leq \delta(\mathbf{x}',\mathbf{x})\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}|h_1|^{m-j}|h_2|^j \\
&= \delta(\mathbf{x}',\mathbf{x})\,(|h_1|+|h_2|)^m \qquad \text{(διώνυμο του Νεύτωνα)} \\
&\leq 2^{m/2}\delta(\mathbf{x}',\mathbf{x})\,\|(h_1,h_2)\|^m\,,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την *ανισότητα Cauchy–Schwarz*:

$$|h_1|+|h_2| = (1,1)\cdot(|h_1|,|h_2|) \leq \|(1,1)\|\cdot\|(|h_1|,|h_2|)\| = 2^{1/2}\,\|(h_1,h_2)\|$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.7.1. Έστω $m = 1$. Τότε $f \in C^1(A)$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. Από τον χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$ (Πόρισμα 4.3.5) έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - f_x(a_1,a_2)(x-a_1) - f_y(a_1,a_2)(y-a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}} = 0 \tag{6.7.9}$$

Επειδή $T_1(x,y) = f(a_1,a_2) + f_x(\xi_1,\xi_2)(x-a_1) + f_y(\xi_1,x_2)(y-a_2)$, έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}} = 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $m \geq 2$. Έστω $(x,y) \in A$ αρκετά κοντά στο $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a}$ να περιέχεται στο A. Από τον τύπο Taylor (για «$m = m-1$») έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2)$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$ και $\mathbf{x} = (x,y)$ τέτοιο ώστε

$$f(x,y) = T_{m-1}(x,y) + \frac{1}{m!}\left[(x-a_1)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-a_2)\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(m)}(\xi_1,\xi_2).$$

Από τον ορισμό του πολυωνύμου Taylor παρατηρούμε ότι

$$T_{m-1}(x,y) = T_m(x,y) - \frac{1}{m!}\left[(x-a_1)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-a_2)\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(m)}(x,y).$$

Θέτουμε $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ με $h_1 = x - a_1$ και $h_2 = y - a_2$. Από τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 6.7.3 συμπεραίνουμε ότι

$$f(x,y) = T_m(x,y) + \frac{1}{m!}\Delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}).$$

Συνεπώς,

$$\left|\frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}}\right| = \frac{1}{m!}\frac{|\Delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})|}{\|(h_1,h_2)\|^m} \overset{(6.7.8)}{\leq} \frac{2^{m/2}}{m!}\delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \tag{6.7.10}$$

όπου (βλ. σχέση (6.7.6)),

$$\delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \max\left\{\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x,y)\right| : 0 \leq j \leq m\right\}.$$

Από την συνέχεια των μερικών παραγώγων και επειδή το $\boldsymbol{\xi}$ ανήκει στο $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, βλέπουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = 0$$

οπότε από την (6.7.10) προκύπτει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}} = 0.$$

□

Παράδειγμα 6.7.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = e^{x+y}$. Βρίσκοντας πρώτα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$, υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2+y^2}.$$

Απάντηση: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f οποιασδήποτε τάξης ταυτίζονται με την f και συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ οποιασδήποτε τάξης είναι ίσες με το $e^0 = 1$. Συνεπώς, τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + x + y$$

και

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2!}\left[x^2 + 2xy + y^2\right]. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$
Επίσης
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$
δηλαδή
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-\frac{1}{2!}\left[x^2+2xy+y^2\right]}{x^2+y^2} &= \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\right] &= 0\end{aligned}$$
που σημαίνει ότι
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 6.7.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση και έστω
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \ell \in \mathbb{R}$$
Αποδείξτε τα εξής:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ και $f(0,0)=0$.

(2) Αν $T_1(x,y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της f πρώτης τάξης με κέντρο το $(0,0)$, τότε $T_1(x,y)=0$.

(2) Αν $T_2(x,y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της f δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0,0)$, τότε $T_2(x,y) = \ell(x^2+y^2)$.

Απόδειξη. (1) Έχουμε
$$\begin{aligned}\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \ell\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$
Επίσης,
$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\right) = \ell\cdot 0 = 0.$$
(2) Έχουμε
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
και συνεπώς $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ (βλ. Πρόταση 4.3.4). Συνεπώς, $T_1(x,y) = f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y = 0$.

(3) Έχουμε

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$T_2(x,0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 \text{ και } T_2(0,y) = \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2.$$

Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0. \tag{6.7.11}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - T_2(x,0)}{x^2} = 0 \text{ και } \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - T_2(0,y)}{y^2} = 0$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x^2} = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0) \text{ και } \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)}{y^2} = \frac{1}{2}f_{yy}(0,0). \tag{6.7.12}$$

Επειδή, από την υπόθεση,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \ell, \tag{6.7.13}$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x^2} = \ell \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)}{y^2} = \ell$$

και άρα, από την (6.7.12),

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2\ell.$$

Έπεται ότι

$$T_2(x,y) = \ell(x^2+y^2) + f_{xy}(0,0)xy \tag{6.7.14}$$

Μένει να δείξουμε ότι $f_{xy}(0,0) = 0$. Πράγματι, από τις (6.7.11), (6.7.13) και (6.7.14) έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(0,0)\frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Συνεπώς, αν είχαμε $f_{xy}(0,0) \neq 0$ θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

που είναι άτοπο αφού, όπως έχουμε δει, το όριο αυτό δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 6.7.6. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1,0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = (f_x)_y = \frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Επομένως,

$$f_x(1,0) = 2, \quad f_y(1,0) = 0, \quad f_{xx}(1,0) = -2, \quad f_{yy}(1,0) = 2, \quad f_{xy}(1,0) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1,0)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,0)(x-1)y + f_{yy}(1,0)y^2\right) \\ &= 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2) - \left(2(x-1) - (x-1)^2 + y^2\right)}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$

Αν υπήρχε το $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$ τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2(x-1) - (x-1)^2 + y^2}{(x-1)^2+y^2}$$

και θα ήταν ίσα. Όμως το παραπάνω όριο δεν υπάρχει αφού για $x = 1+u$ με $u \neq 0$, $u \to 0$ και $y = 0$ το όριο ισούται με

$$\lim_{u\to 0} \frac{2u - u^2}{u^2} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{2}{u}\right) - 1,$$

το οποίο δεν υπάρχει. Συνεπώς, το $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 6.7.7. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$ και $f_{xy}(0,0) = 1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$\text{(i)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} \qquad \text{(ii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}.$$

Απόδειξη. (i) Το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_1(x,y) = 0$. Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} = 0 \tag{6.7.15}$$

αφού $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

((ii) Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f είναι το $T_2(x,y) = xy$ και από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Από αυτή τη σχέση παρατηρούμε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει, αφού διαφορετικά θα έπρεπε να υπάρχει και το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ που όμως, όπως ελέγχεται εύκολα με τις ακολουθίες $(1/n, 0)$ και $(1/n, 1/n)$, δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 6.7.8. Δίνεται C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f_x(x,y) = 5x$ και $f_y(x,y) = 2y$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι $|f(x,y)| \leq 25x^2 + 4y^2$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. Για $(x,y) = (0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει (ξ, η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$f(x,y) - f(0,0) = f_x(\xi,\eta)(x-0) + f_y(\xi,\eta)(y-0) = 5\xi \cdot x + 2\eta \cdot y. \tag{6.7.16}$$

Από την (6.7.16) και από την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$|f(x,y)| = |f(x,y) - f(0,0)| = |5\xi x + 2\eta y| \leq \sqrt{25\xi^2 + 4\eta^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}. \tag{6.7.17}$$

Επειδή το (ξ,η) ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y), έπεται ότι $|\xi| \leq |x|$ και $|\eta| \leq |y|$, και άρα $\sqrt{25\xi^2 + 4\eta^2} \leq \sqrt{25x^2+4y^2}$, οπότε από την (6.7.17) έχουμε ότι $|f(x,y)| \leq \sqrt{25x^2+4y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 25x^2 + 4y^2$. □

6.8 Ασκήσεις

Άσκηση 6.8.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2- συνάρτηση και $x(t), y(t)$ δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Να υπολογισθεί η παράγωγος δεύτερης τάξης $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ της συνάρτησης $z = f(x(t), y(t))$.

Άσκηση 6.8.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2-συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2$. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$$

Άσκηση 6.8.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Υποθέτουμε τα εξής:

(i) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και

(ii) Υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq M$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Δείξτε ότι $|f(x,y)| \leq \dfrac{M}{2}(|x|+|y|)^2$.

Άσκηση 6.8.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 2$ και $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 4$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε τον τύπο της f.

Άσκηση 6.8.5. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) Το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f, δηλαδή $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, (ii) $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων

7.1 Βασικές έννοιες

7.1.1 Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 7.1.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{a} \in A$.

(1) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο *τοπικού μεγίστου* της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν, ειδικότερα, $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού τοπικού μεγίστου*. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *ολικού μεγίστου* της f αν $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα, αν $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού ολικού μεγίστου*.

(2) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο *τοπικού ελαχίστου* της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν, ειδικότερα, $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού τοπικού ελαχίστου*. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *ολικού ελαχίστου* της f αν $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα, αν $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού ολικού ελαχίστου*.

(3) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο *τοπικού ακροτάτου* της f αν το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου για την f. Αντίστοιχα ορίζονται οι έννοιες του σημείου *αυστηρού τοπικού ακροτάτου* και *ολικού τοπικού ακροτάτου*.

7.1.2 Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα

Ένα από τα πλέον κλασικά θεωρήματα σχετικά με τα ακρότατα για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής.

Θεώρημα 7.1.2. *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και φραγμένο, και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K, δηλαδή υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με*

$$f(\mathbf{x}_1) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \ \textit{και}\ f(\mathbf{x}_2) = \max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.2 στηρίζεται στο Θεώρημα Bolzano–Weierstrass και ακολουθεί τις ίδιες γραμμές με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για συνεχείς συναρτήσεις μιας μεταβλητής που ορίζονται σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$.

7.1.3 Κρίσιμα σημεία

Ορισμός 7.1.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ καλείται *κρίσιμο* σημείο της f αν

$$f_x(\mathbf{a}) = f_y(\mathbf{a}) = 0$$

ή ισοδύναμα αν

$$\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$$

Παρατήρηση 7.1.4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (a_1, a_2) είναι

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2).$$

Συνεπώς, αν το (a_1, a_2) είναι κρίσιμο σημείο της f τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (a_1, a_2) γίνεται $z = f(a_1, a_2)$ και άρα είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο.

Πρόταση 7.1.5 (σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων). *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε, κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι και κρίσιμο σημείο της f.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Θυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} f_x(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(a_1, a_2) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

όπου $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1)$, με $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1 \in A$. Αφού $F(0) = f(\mathbf{a})$ και το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, έπεται ότι το $t_0 = 0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της F. Άρα, από την γνωστή πρόταση του Fermat για τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, συμπεραίνουμε ότι $F'(0) = 0$, που λόγω της (7.1.1) σημαίνει ότι $f_x(\mathbf{a}) = 0$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $f_y(\mathbf{a}) = 0$. □

Παρατήρηση 7.1.6. Όπως συμβαίνει και στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το αντίστροφο της Πρότασης 7.1.5 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δούμε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x, y) = x^3 + y^3$ αλλά δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Επίσης η Πρόταση 7.1.5 δεν ισχύει αν το A δεν είναι ανοικτό. Π.χ. έστω $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος και $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή σε όλα τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Όμως για κάθε σημείο $(x, y) \in S$ έχουμε $\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$.

Ορισμός 7.1.7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου καλείται *σαγματικό* σημείο ή (*σημείο σέλας*) της f.

Παρατήρηση 7.1.8. Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα σημείο $\mathbf{a} \in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\delta(\mathbf{a})$, τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}_2).$$

Στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη, από τη Παρατήρηση 7.1.8, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν το το οριζόντιο επίπεδο $z = f(a_1, a_2)$ *δεν αφήνει το γράφημα της f από τη μία πλευρά του.*

Σε πολλές περιπτώσεις (δείτε π.χ. την περίπτωση (3) του Θεωρήματος 7.3.3 παρακάτω), το γράφημα της $f(x, y)$ στο σαγματικό σημείο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας, εξού και το όνομα. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα. Π.χ. το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x, y) = y^3$ και δεν είναι τοπικό ακρότατο αλλά το γράφημα της f στο $(0, 0)$ δεν θα λέγαμε ότι μοιάζει με σέλα, Γενικά τα σαγματικά σημεία είναι κάτι σαν τα σημεία *καμπής* των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

7.2 Τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^2$

Ορισμός 7.2.1. Μια συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ καλείται *τετραγωνική μορφή* αν γράφεται ως

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Από τον ορισμό της τετραγωνικής μορφής παρατηρούμε εύκολα ότι

$$Q(tx_1, tx_2) = t^2 Q(x_1, x_2) \tag{7.2.1}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ τότε η Q διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε όλα τα μη μηδενικά σημεία της ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$ και το σημείο (x_1, x_2).

Ορισμός 7.2.2. Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$.

(i) Η Q καλείται θετικά ορισμένη αν $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

(ii) Η Q καλείται αρνητικά ορισμένη αν $Q(x_1, x_2) < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

(iii) Η Q καλείται ορισμένη αν είτε είναι θετικά είτε είναι αρνητικά ορισμένη.

Παρατήρηση 7.2.3. Παρατηρήστε ότι, επειδή $Q(0, 0) = 0$, μια τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά (αντίστοιχα, αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν το $(0, 0)$ είναι σημείο αυστηρού ολικού ελαχίστου (αντίστοιχα, μεγίστου) της Q.

Πρόταση 7.2.4. *Έστω Q μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$.*

(1) *Η Q είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε*

$$Q(\mathbf{x}) \geq m \cdot \|\mathbf{x}\|^2 \tag{7.2.2}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(2) *Η Q είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε*

$$Q(\mathbf{x}) \leq -m \cdot ||\mathbf{x}||^2 \tag{7.2.3}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. (1) Η εξίσωση (7.2.2) ισχύει τετριμμένα αν $\mathbf{x} = (0,0)$. Έστω $\mathbf{x} \neq (0,0)$. Τότε $\mathbf{x} = ||\mathbf{x}|| \cdot \dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$ και από την (7.2.1), για $t = ||\mathbf{x}||$ έχουμε

$$Q(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2 \cdot Q\left(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}\right) \tag{7.2.4}$$

Παρατηρείστε επίσης ότι το διάνυσμα $\dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο S αφού έχει νόρμα ίση με την μονάδα. Η Q είναι συνεχής και το S είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Άρα από το Θεώρημα 7.1.2, η Q λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο S. Έστω

$$m = \min\{Q(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$$

Επειδή υπάρχει $\mathbf{x}_0 \in S$ με $Q(\mathbf{x}_0) = m$ και έχουμε υποθέσει ότι η Q είναι θετικά ορισμένη, έπεται ότι $m > 0$ και άρα από την (7.2.4) έχουμε

$$Q(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2 \cdot Q\left(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}\right) \geq m||\mathbf{x}||^2$$

(2) Προκύπτει από το (1) θεωρώντας την $-Q$. □

Η τετραγωνική μορφή $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ γράφεται και υπό τη μορφή γινομένου πινάκων:

$$Q(x_1, x_2) = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{7.2.5}$$

Με άλλα λόγια, αν θέσουμε

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

τότε το $Q(x_1, x_2)$ ισούται με το (σύνηθες) εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ με το διάνυσμα $A\mathbf{x} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2)$. Συνεπώς, έχουμε

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \tag{7.2.6}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Γενικά, η μελέτη μιας τετραγωνικής μορφής γίνεται μέσω των ιδιοτιμών του πίνακα που την ορίζει. Εδώ, επειδή έχουμε μόνο δύο μεταβλητές, θα παρουσιάσουμε μια πιο στοιχειώδη προσέγγιση.

Σταθεροποιούμε για τα επόμενα μια τετραγωνική μορφή $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ στον $\mathbb{R}^2$ και θέτουμε

$$D = det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

Όπως θα δούμε στα επόμενα το πρόσημο της ορίζουσας D καθορίζει το αν είναι ορισμένη ή όχι η τετραγωνική μορφή.

Πρόταση 7.2.5. (1) *Η Q είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $a > 0$ και $D > 0$.*

(2) *Η Q είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν $a < 0$ και $D > 0$.*

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη. Τότε, $Q(1, 0) = a > 0$. Άν $a \neq 0$ είναι εύκολο να δούμε ότι η Q γράφεται στη μορφή

$$Q(x_1, x_2) = a\left[\left(x_1 + \frac{b}{a}\,x_2\right)^2 + \frac{D}{a^2}\,x_2^2\right], \tag{7.2.7}$$

Από την (7.2.7) παίρνουμε $Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) = \frac{D}{a^2} > 0$ και άρα $D > 0$.

Αντίστροφα τώρα, αν $a > 0$ και $D > 0$ τότε από την (7.2.7) προκύπτει άμεσα ότι $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, δηλαδή η $Q(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένη.

(2) Προκύπτει από το (1) αν θεωρήσουμε την $-Q$. □

Πόρισμα 7.2.6. *Η Q είναι ορισμένη αν και μόνο αν $D > 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η Q είναι ορισμένη, δηλαδή είναι είτε θετικά είτε αρνητικά ορισμένη. Από την Πρόταση 7.2.5 έχουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το D είναι θετικό. Αντίστροφα, έστω ότι $D = ac - b^2 > 0$. Συνεπώς $a \neq 0$ (διότι αν ήταν $a = 0$ τότε $D = -b^2 \leq 0$ άτοπο). Άρα είτε $a > 0$ είτε $a < 0$ οπότε πάλι από Πρόταση 7.2.5 η Q είναι ορισμένη. □

Πρόταση 7.2.7. *Αν $D < 0$ τότε υπάρχουν δύο $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε*

$$Q(tu_1, tu_2) < 0 < Q(tv_1, tv_2) \tag{7.2.8}$$

για κάθε $t \neq 0$. Με άλλα λόγια υπάρχουν δύο ευθείες που διέρχονται από το $(0, 0)$ τέτοιες ώστε πάνω στην μία η Q παρουσιάζει στο $(0, 0)$ γνήσιο ολικό μέγιστο ενώ πάνω στην άλλη γνήσιο ολικό ελάχιστο.

Απόδειξη. Από την (7.2.1) παρατηρούμε ότι για να αποδείξουμε την πρόταση αρκεί να βρούμε δύο σημεία στο $\mathbb{R}^2$ στα οποία η Q να παίρνει ετερόσημες τιμές. Πράγματι, αν $a \neq 0$ τότε από την (7.2.7) είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) \cdot Q(1, 0) < 0$. Με ανάλογο σκεπτικό βλέπουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει όταν $c \neq 0$ και $D < 0$. Αν τώρα $a = c = 0$ τότε $Q(x_1, x_2) = 2bx_1x_2$ με $b \neq 0$ (διαφορετικά $D = ac - b^2 = 0$ άτοπο). Άρα $Q(1, 1) \cdot Q(-1, 1) = -4b^2 < 0$ και το συμπέρασμα πάλι ισχύει. □

Πρόταση 7.2.8. *Αν $D = 0$ και η Q δεν είναι η μηδενική συνάρτηση τότε η Q λαμβάνει την τιμή 0 ακριβώς στα σημεία μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$ και παντού αλλού διατηρεί το ίδιο πρόσημο.*

Απόδειξη. Έστω ότι η Q δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Επειδή $D = ac - b^2 = 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα a, c είναι διάφορο του 0. Έστω $a \neq 0$ (η περίπτωση $c \neq 0$ εξετάζεται όμοια). Από την (7.2.1) έχουμε $Q(x_1, x_2) = a\left(x_1 + \frac{b}{a}\,x_2\right)^2$. Άρα αν $a > 0$ τότε $Q(x_1, x_2) \geq 0$ για όλα τα $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και αντίστοιχα, αν $a < 0$ τότε $Q(x_1, x_2) \leq 0$ για όλα τα $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης $Q(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + \frac{b}{a}\,x_2 = 0$, δηλαδή η Q μηδενίζεται ακριβώς στα σημεία της ευθείας $x_1 + \frac{b}{a}\,x_2 = 0$. □

Ορισμός 7.2.9. Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$.

(i) Η Q καλείται θετικά ημιορισμένη αν $Q(x_1, x_2) \geq 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Η Q καλείται αρνητικά ορισμένη αν $Q(x_1, x_2) \leq 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Η Q καλείται ημιορισμένη αν είτε είναι θετικά είτε είναι αρνητικά ημιορισμένη.

Με την παραπάνω ορολογία η Πρόταση 7.2.8 λέει ότι αν $D = 0$ τότε η Q δεν είναι ορισμένη αλλά είναι ημιορισμένη.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο εξής.

Πόρισμα 7.2.10. *Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$ και έστω*

$$D = det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

(1) *Αν $D > 0$ τότε η Q είναι ορισμένη. Ειδικότερα, αν $a > 0$ και $D > 0$ η Q είναι θετικά ορισμένη, ενώ αν $a < 0$ και $D < 0$ η Q είναι αρνητικά ορισμένη.*

(2) *Αν $D < 0$ τότε η Q δεν είναι ορισμένη. Ειδικότερα, υπάρχουν δύο μη μηδενικά σημεία (a_1, a_2) και (b_1, b_2) του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε*

$$Q(ta_1, ta_2) < 0 < Q(tb_1, tb_2) \tag{7.2.9}$$

(3) *Αν $D = 0$ τότε η Q δεν είναι ορισμένη αλλά είναι ημιορισμένη. Ειδικότερα, αν η Q δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε λαμβάνει την τιμή 0 ακριβώς στα σημεία μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$.*

7.3 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης δύο μεταβλητών ορισμένης σε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ ένα κρίσιμο σημείο της f. Από το Θεώρημα Taylor (Θεώρημα 6.7.1 ή Πόρισμα 6.7.2) έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$,

$$f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0 \tag{7.3.1}$$

όπου $T_2(\mathbf{x})$ είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a}$. Επειδή το $\mathbf{a}$ είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f_x(a_1, a_2) = f_y(a_1, a_2) = 0$ και άρα

$$T_2(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{1}{2}\left[a(x - a_1)^2 + 2b(x - a_1)(y - a_2) + c(y - a_2)^2\right]$$

όπου $a = f_{xx}(a_1, a_2)$, $b = f_{xy}(a_1, a_2)$ και $c = f_{yy}(a_1, a_2)$. Θέτοντας

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

γράφουμε την (7.3.1) ως εξής:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\, Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \tag{7.3.2}$$

όπου

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} = 0 \tag{7.3.3}$$

Πρόταση 7.3.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ κρίσιμο σημείο της f. Έστω $a = f_{xx}(a_1, a_2)$, $b = f_{xy}(a_1, a_2)$ και $c = f_{yy}(a_1, a_2)$, και έστω*

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

(1) Αν $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, δηλαδή η Q είναι θετικά ορισμένη, τότε η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{a}$.

(2) Αν $Q(x_1, x_2) < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, δηλαδή η Q είναι αρνητικά ορισμένη τότε η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο $\mathbf{a}$.

(3) Αν υπάρχουν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $Q(\mathbf{u}) < 0 < Q(\mathbf{v})$, τότε το $\mathbf{a}$ είναι σαγματικό σημείο της f. Ειδικότερα, επί της ευθείας $\{\mathbf{a} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ η f παρουσιάζει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό μέγιστο ενώ επί της ευθείας $\{\mathbf{a} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$ η f παρουσιάζει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην αρχή της ενότητας, από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \text{ με } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} = 0$$

για κάθε $\mathbf{x} \in A$.

(1) Έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη. Τότε, από την (7.2.2) έχουμε ότι υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε

$$Q(\mathbf{x}) \geq m \cdot \|\mathbf{x}\|^2$$

και άρα για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{1}{2}Q(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \\ &\geq \frac{1}{2}m \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \left[\frac{m}{2} + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2}\right] \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2. \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Αφού $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} = 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\mathbf{x} \in A$,

$$0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} < \frac{m}{4} \Rightarrow -\frac{m}{4} < \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} \tag{7.3.5}$$

Από τις (7.3.4) και (7.3.5) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > \frac{m}{4}\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$ και συνεπώς το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Προκύπτει από την (1) θεωρώντας την $-Q$.

(3) Έστω ότι υπάρχουν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $Q(\mathbf{u}) < 0 < Q(\mathbf{v})$. Επειδή $Q(0,0) = 0$, έχουμε ότι $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$$

αντικαθιστώντας τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ με τα $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ και $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ αντίστοιχα, αφού $Q\left(\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right) \overset{(7.2.1)}{=} \dfrac{Q(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} < 0$ και ομοίως $Q\left(\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \dfrac{Q(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} > 0$.

Επειδή $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} = 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} < \frac{1}{4}\min\{-Q(\mathbf{u}), Q(\mathbf{v})\} \tag{7.3.6}$$

Έστω $0 < |t| < \delta$ και έστω

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$$

Τότε

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = |t|\cdot\|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$$

και άρα από την (7.3.6),

$$\frac{R_2(\mathbf{x})}{|t|^2} < \frac{1}{4}\left(-Q(\mathbf{u})\right) \Rightarrow R_2(\mathbf{x}) < -\frac{1}{4}t^2 Q(\mathbf{u})$$

Συνεπώς,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q(t\mathbf{u}) + R_2(\mathbf{x}) < \frac{1}{2}t^2 Q(\mathbf{u}) - \frac{1}{4}t^2 Q(\mathbf{u}) = \frac{t^2 Q(\mathbf{u})}{4} < 0$$

Οπότε $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ για κάθε $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$ με $0 < |t| < \delta$ και άρα το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο της f επί της ευθείας $\mathbf{a} + t\mathbf{u}$.

Ομοίως έστω $0 < |t| < \delta$ και έστω

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$$

Τότε $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = |t| < \delta$ και άρα από την (7.3.6),

$$-\frac{1}{4}Q(\mathbf{v}) < \frac{R_2(\mathbf{x})}{|t|^2} \Rightarrow R_2(\mathbf{x}) > -\frac{1}{4}t^2 Q(\mathbf{v})$$

Συνεπώς,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q(t\mathbf{v}) + R_2(\mathbf{x}) > \frac{1}{2}t^2 Q(\mathbf{v}) - \frac{1}{4}t^2 Q(\mathbf{v}) = \frac{t^2 Q(\mathbf{v})}{4} > 0$$

Οπότε $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ για κάθε $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$ με $0 < |t| < \delta$ και άρα το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της f επί της ευθείας $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. □

Ορισμός 7.3.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$. Ο συμμετρικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(a_1,a_2) & f_{xy}(a_1,a_2) \\ f_{xy}(a_1,a_2) & f_{yy}(a_1,a_2) \end{bmatrix} \tag{7.3.7}$$

καλείται *Εσσιανός πίνακας της f στο σημείο* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

Από το Πόρισμα 7.2.10 και την Πρόταση 7.3.1 προκύπτει άμεσα το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου:

Θεώρημα 7.3.3 (κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών). *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $(a_1, a_2) \in A$ κρίσιμο σημείο της f (δηλαδή $f_x(a_1,a_2) = f_y(a_1,a_2) = 0$).*

Έστω

$$\Delta(a_1, a_2) = f_{xx}(a_1, a_2)f_{yy}(a_1, a_2) - f_{xy}^2(a_1, a_2) \tag{7.3.8}$$

η ορίζουσα του Εσσιανού πίνακα της f στο (a_1, a_2). Τότε ισχύουν τα επόμενα:

(1) *Αν $f_{xx}(a_1, a_2) > 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο σημείο (a_1, a_2).*

(2) *Αν $f_{xx}(a_1, a_2) < 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο σημείο (a_1, a_2).*

(3) *Αν $\Delta(a_1, a_2) < 0$ τότε το (a_1, a_2) είναι σαγματικό σημείο της f.*

Παρατηρήσεις 7.3.4. (α) Αν $\Delta(a_1, a_2) = 0$ τότε δεν μπορούμε γενικά να αποφανθούμε για το αν το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου ή όχι. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει ευθεία (βλ. Πρόταση 7.2.8) που διέρχεται από το (a_1, a_2) όπου εκεί η $Q(x - a_1, y - a_2)$ μηδενίζεται, οπότε για τα σημεία (x, y) αυτής της ευθείας, η διαφορά $f(x, y) - T_2(x, y)$ ισούται με το $R_2(x, y)$ το οποίο ναι μεν τείνει στο 0 καθώς πλησιάζουμε το (a_1, a_2) αλλά δεν διατηρεί απαραίτητα πρόσημο.

(β) Αν $\Delta(a_1, a_2) \neq 0$ τότε οι τρεις περιπτώσεις (1)-(3) του θεωρήματος είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να συμβούν. Πράγματι, η εναπομείνασα περίπτωση $\Delta(a_1, a_2) > 0$ και $f_{xx}(a_1, a_2) = 0$ είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού τότε από τον ορισμό του $\Delta(a_1, a_2)$ (εξίσωση (7.3.8)) θα είχαμε $f_{xy}^2(a_1, a_2) < 0$ που φυσικά δεν μπορεί να ισχύει.

(γ) Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετάμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου μπορούμε εντελώς στοιχειωδώς να βρούμε τα τοπικά ακρότατα απευθείας, χωρίς τη βοήθεια του κριτηρίου. Για παράδειγμα, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο τοπικού ακροτάτου που έχει η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ και άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. Αν τώρα υπήρχε και άλλο σημείο τοπικού ακροτάτου τότε θα έπρεπε αυτό να είναι κρίσιμο σημείο, δηλαδή θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x = 0 \\ f_y(x, y) &= 2y = 0. \end{aligned}$$

Όμως, το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (0, 0)$.

Δίνουμε παρακάτω κάποια παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος 7.3.3.

Παράδειγμα 7.3.5. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x \\ f_{xx}(x, y) &= 6x \\ f_{yy}(x, y) &= 6y \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα, αντικαθιστώντας στην δεύτερη, παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα, έχουμε δύο πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0, 0)$ και $(-1, -1)$. Τώρα, για κάθε (x, y) έχουμε ότι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 36xy - 9.$$

Εφόσον $\Delta(0, 0) = -9 < 0$, το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Επίσης, $\Delta(-1, -1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$. Συνεπώς, στο σημείο $(-1, -1)$ έχουμε αυστηρό τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα 7.3.6. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^3+3xy^2-3x^2-3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x\\
f_y(x, y) &= 6xy - 6y\\
f_{xx}(x, y) &= 6x - 6\\
f_{yy}(x, y) &= 6x - 6\\
f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 6y
\end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0\\
f_y(x, y) &= 6xy - 6y = 0.
\end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x - 1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1. \tag{7.3.9}$$

Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x - 2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς, έχουμε τα σημεία

$$(0, 0) \quad \text{και} \quad (2, 0).$$

Αντίστοιχα για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \iff y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1, 1) \quad \text{και} \quad (1, -1).$$

Συνολικά δηλαδή έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ και $(1, -1)$. Τώρα, για κάθε (x, y) υπολογίζουμε την

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = (6x - 6) \cdot (6x - 6) - 36y^2.$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ και άρα το $(0, 2)$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1, 1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, 1)$ είναι σαγματικό σημείο.

(4) $\Delta(1,-1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 7.3.7. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x,y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 8x - 4x^3 \\ f_y(x,y) &= -4y^3 \\ f_{xx}(x,y) &= 8 - 12x^2 \\ f_{yy}(x,y) &= -12y^2 \\ f_{xy}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 8x - 4x^3 = 0 \\ f_y(x,y) &= -4y^3 = 0. \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι τα σημεία $(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$. Επειδή

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = -12(8-12x^2)y^2 = 0$$

και σε όλα τα κρίσιμα σημεία η y-συντεταγμένη είναι μηδενική έχουμε ότι

$$\Delta(0,0) = \Delta(\sqrt{2},0) = \Delta(-\sqrt{2},0) = 0$$

που σημαίνει ότι το κριτήριο δεν αποφαίνεται για κανένα από τα κρίσιμα σημεία.

Παρατηρούμε ότι $f(\pm\sqrt{2},0) = 4$ και

$$f(x,y) = 4x^2 - x^4 - y^4 = 4x^2 - x^4 - 4 + 4 - y^4 = 4 - (x^2-2)^2 - y^4 < 4$$

για κάθε $(x,y) \neq (\pm\sqrt{2},0)$. Άρα η f παρουσιάζει αυστηρό ολικό μέγιστο στα σημεία $(\pm\sqrt{2},0)$.

Επίσης $f(0,0) = 0$, $f(0,y) = -y^4 < 0$ για κάθε σημείο $(0,y) \neq (0,0)$ ενώ $f(x,0) = 4x^2 - x^4 > 0$ για κάθε $(x,0) \neq (0,0)$ με $|x| < 2$. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

7.4 Τοπικά Ακρότατα υπό συνθήκη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης όταν οι μεταβλητές της ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Οι περιορισμοί εκφράζονται με την μορφή εξισώσεων που συνδέουν τισ μεταβλητές της συνάρτησης και περιορίζουν το πεδίο ορισμού της. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα ακρότατα της συνάρτησης ονομάζονται *ακρότατα υπό συνθήκες* ή *δεσμευμένα ακρότατα*. Εδώ θα μελετήσουμε τα δεσμευμένα ακρότατα με μία μόνο συνθήκη. Γεωμετρικά η συνθήκη αυτή θα ορίζει μια καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ (αν είναι δύο μεταβλητών) ή μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (αν είναι τριών μεταβλητών). Π.χ. η συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$ ορίζει τον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$, ή συνθήκη $y - x = 0$ μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$ και αντίστοιχα η συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ απεικονίζει την μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ ενώ η συνθήκη $x + y + z = 0$ ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός 7.4.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ καλείται* ***σημείο τοπικού***

ακροτάτου της f υπό την συνθήκη *$g(\mathbf{x}) = c$, αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης $f|_S : S \to \mathbb{R}$, όπου $S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$.*

Στα επόμενα παρουσιάζουμε με παραδείγματα τις μεθόδους που ακολουθούμε για την εύρεση των δεσμευμένων ακροτάτων.

7.4.1 Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με παραμετρικοποίηση της συνθήκης

Παράδειγμα 7.4.2. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x + y$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση: Έστω $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ μια παραμετρικοποίηση του μοναδιαίου κύκλου. Το πρόβλημα της εύρεσης των ακροτάτων της $f(x, y)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ ανάγεται στην εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής και συγκεκριμένα της της συνάρτησης

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = -x(t) - y(t) = \cos t + \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Όπως γνωρίζουμε Τα πιθανά τοπικά ακρότατα της g περιέχονται είτε στα άκρα $0, 2\pi$ ή στα εσωτερικά σημεία του $[0, 2\pi]$ που μηδενίζουν την παράγωγο της g. Έχουμε

$$g'(t) = \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ ή } t = \frac{5\pi}{4}$$

Επειδή η g σίγουρα λαμβάνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή (ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα) και

$$g(0) = g(2\pi) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \text{και } g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

συγκρίνοντας τις τιμές έπεται ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $t = \frac{5\pi}{4}$ και μέγιστο στο $t = \frac{\pi}{4}$. Άρα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο σημείο $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ και μέγιστη στο $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

7.4.2 Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με επίλυση της συνθήκης

:

Παράδειγμα 7.4.3. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα την συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω στην ευθεία $y - x - 1 = 0$.

Λύση: Λύνουμε την εξίσωση της συνθήκης $y - x - 1 = 0$ ως προς μια από τις μεταβλητές π.χ. ως προς y και παίρνουμε $y = x - 1$. Αντικαθιστούμε τώρα στον τύπο της f το y με $x - 1$ και έχουμε μια συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$F(x) = f(x, x - 1) = x^2 + (x - 1)^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1$$

Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την F αν και μόνο αν το $(x_0, x_0 - 1)$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία $y - x - 1 = 0$. Ομοίως ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την F αν και μόνο αν το $(x_0, x_0 - 1)$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την f πάνω στην ευθεία $y-x-1=0$. Με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα της εύρεσης των τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη της συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$ ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων χωρίς κάποια συνθήκη, της συνάρτησης μιας μεταβλητής $F(x)$.

Τα πιθανά τοπικά ακρότατα της F είναι τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ που μηδενίζουν την F'. Έχουμε

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Επιπλέον $F'(x) < 0$ για $x < 1/2$ και $F'(x) > 0$ για $x > 0$. Άρα η F είναι φθίνουσα για $x \leq 1/2$ και αύξουσα για $x \geq 1/2$ και συνεπώς στο $x = 1/2$ η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Ισοδύναμα, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο πάνω στην ευθεία $y-x-1=0$ στο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

7.4.3 Εύρεση δεσμευμένων ακροτάτων με την μέθοδο των Πολλαπλασιαστών Lagrange

Μια άλλη μέθοδο αντιμετώπισης προβλημάτων ακροτάτων υπό συνθήκη είναι η λεγόμενη *μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange*. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την μέθοδο αυτή μελετώντας το εξής πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια C^1-συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και έστω S μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι S είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$). Θέλουμε να βρούμε τα σημεία της S όπου η f όταν την περιορίζουμε πάνω στην S λαμβάνει την μεγαλύτερη ή την μικρότερη τιμή, με άλλα λόγια ψάχνουμε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f|_S : S \to \mathbb{R}$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0). Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0). Αυτό εξ ορισμού σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x,y,z) \geq f(x_0,y_0,z_0)$ για όλα τα $(x,y,z) \in S \cap B_\delta(x_0,y_0,z_0)$.

Έστω C μια παραγωγίσιμη καμπύλη της S που διέρχεται από το $\mathbf{x}_0$. Η καμπύλη C μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}$ όπου I είναι ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $0 \in I$ και $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ Τότε η συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, παρουσιάζει στο $t = 0$ τοπικό ακρότατο. Επομένως, από τον Κανόνα Αλυσίδας,

$$F'(0) = \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$$

Άρα $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp \mathbf{r}'(0)$ για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ της S που διέρχεται από το $\mathbf{r}(0) = (x_0,y_0,z_0)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S. Αν επιπλέον η S είναι ισοσταθμική επιφάνεια μιας C^1 συνάρτησης g δηλαδή $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = c\}$ τότε όπως γνωρίζουμε το $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ είναι το κλασικό κάθετο διάνυσμα στην S στο (x_0,y_0,z_0). Επομένως, θα πρέπει

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \parallel \nabla g(x_0,y_0,z_0) \tag{7.4.1}$$

αφού και τα δύο είναι κάθετα στην S στο ίδιο σημείο. Αν επιπλέον $\nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$ τότε η σχέση (7.4.1) σημαίνει ότι θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$$

Ο αριθμός αυτός λ καλείται *πολλαπλασιαστής Lagrange*. Η μέθοδος που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε διάσταση d και συνοψίζεται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 7.4.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω $\mathbf{x}_0 \in A$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$. Αν $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0) \tag{7.4.2}$$

Παρατήρηση 7.4.5. Αν επιπλέον ισχύει ότι και $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ τότε η σχέση 7.4.2 σημαίνει ότι οι ισοσταθμικές επιφάνειες $S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$ και $T = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ των g και f αντίστοιχα που διέρχονται από το $\mathbf{x}_0$ δέχονται κοινό εφαπτόμενο επιπεδο στο $\mathbf{x}_0$, με άλλα λόγια οι επιφάνειες S και T εφάπτονται στο $\mathbf{x}_0$.

Πόρισμα 7.4.6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Αν $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $g(\mathbf{x}) = c$. τότε τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$ ικανοποιούν το σύστημα*

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

Παράδειγμα 7.4.7. Βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + z$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και συνεπώς η συνθήκη γίνεται $g(x, y, z) = 1$. Επειδή $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ όταν $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ για να βρούμε τα σημεία στα οποία η f πιθανόν να παρουσιάζει ακρότατο υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{cases} (1, 0, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Από το παραπάνω σύστημα παίρνουμε ότι πιθανά τοπικά ακρότατα της f είναι τα σημεία

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και η μοναδιαία σφαίρα είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, από το Θεώρημα 7.1.2 έχουμε ότι η f λαμβάνει σίγουρα μέγιστη και ελάχιστη τιμή επί της μοναδιαίας σφαίρας. Με σύγκριση των τιμών της f στα παραπάνω δύο σημεία βλέπουμε ότι στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ λαμβάνεται η μέγιστη τιμή και αντίστοιχα στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή της f πάνω στην σφαίρα.

Στο επόμενο παράδειγμα βλέπουμε πως θα μπορούσε να λυθεί το Παράδειγμα 7.4.3 με χρήση Πολλαπλασιαστών Lagrange.

Παράδειγμα 7.4.8. Με χρήση της μεθόδου Lagrange να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω στην ευθεία $y - x - 1 = 0$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y) = y - x - 1$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (-1, 1) \neq (0, 0)$, έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει μόνο ένα σημείο το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακροτάτου κάνουμε την εξής σκέψη: Καθώς οι ισοσταθμικές της f που είναι οι κύκλοι με κέντρο το $(0, 0)$ απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων η τιμή της f μεγαλώνει. Επομένως εκεί που εφάπτεται η ισοσταθμική με την ευθεία $y - x - 1 = 0$ θα έχουμε ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία.

7.4.4 Ακρότατα σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με εσωτερικό

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και φραγμένο με μη κενό εσωτερικό (πχ. το D είναι ένας κλειστός δίσκος του $\mathbb{R}^2$). Αν $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε από το Θεώρημα 7.1.2 η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στο D. Επειδή το D είναι κλειστό ισχύει ότι $D = D^\circ \cup \partial D$ Για να προσδιορίσουμε τα σημεία αυτά εργαζόμαστε ως εξής:

(i) Βρίσκουμε πρώτα τα **πιθανά τοπικά ακρότατα** του περιορισμού της f στο εσωτερικό του D. Αν η f είναι C^1 στο εσωτερικό του D τότε, επειδή το εσωτερικό του D είναι ανοικτό σύνολο, από την Πρόταση 7.1.5, τα σημεία αυτά είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\nabla f(x, y) = 0$.

(ii) Βρίσκουμε τα **πιθανά τοπικά ακρότατα** του περιορισμού της f στο σύνορο του D. Επειδή το σύνορο του D είναι κλειστό και φραγμένο και η f συνεχής, από το Θεώρημα 7.1.2 ο περιορισμός της f στο σύνορο του D θα παρουσιάζει σίγουρα ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

(iii) Συγκρίνουμε τις τιμές που βρήκαμε.

Παράδειγμα 7.4.9. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$$

πάνω στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Λύση: Στο εσωτερικό του D τα τοπικά ακρότατα βρίσκονται στα σημεία που μηδενίζεται η κλίση της f. Έχουμε $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$ και άρα

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Πάνω στο $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ η f παίρνει την μορφή

$$f(x, y) = -x - y$$

Έστω $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ μια παραμετρικοποίηση του ∂D. Για να βρούμε τα πιθανά ακρότατα της f στο ∂D, αρκεί να βρούμε τα ακρότατα της

$$g(t) = -\cos t - \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Αυτό γίνεται εύκολα: Τα πιθανά ολικά ακρότατα της g ανήκουν είτε τα άκρα $0, 2\pi$ ή στα εσωτερικά σημεία του $[0, 2\pi]$ με

$$g'(t) = \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ ή } t = \frac{5\pi}{4}$$

Έχουμε

$$g(0) = g(2\pi) = -1, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{και } g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

και άρα

$$f(1,0) = f(0,1) = -1, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Επίσης,

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Συγκρίνοντας τις τιμές, βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με τιμή $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ και ολικό μέγιστο στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, με τιμή $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

7.5 Ασκήσεις

Άσκηση 7.5.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές.

(α) Αν $a \cdot b > 0$ δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

(β) Αν $a \cdot b < 0$ δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Υπόδειξη: Επειδή $f_x(x, y) = 4x^3$ και $f_y(x, y) = by^3$ έχουμε ότι $f_x(0, 0) = 0$ και $f_y(0, 0) = 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Επιπλέον $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = 12y^2$ και $f_{xy}(0, 0) = 0$. Οπότε $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0$ και άρα $\Delta(0, 0) = 0$. Συνεπώς το Κριτήριο Δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να αποφανθεί. Εξετάζοντας όμως τον τύπο της f βλέπουμε τα εξής:

(α) Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $f(x, y) = ax^4 + by^4 \geq 0 = f(0, 0)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Αντίστοιχα αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $f(x, y) = ax^4 + by^4 \leq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου.

(β) Αν $a < 0$ και $b > 0$ τότε για όλα τα σημεία $(x, 0)$ στον x-άξονα έχουμε $f(x, 0) = ax^4 \leq 0$ ενώ για όλα τα σημεία $(0, y)$ στον y-άξονα $f(0, y) = by^4 \geq 0$. Άρα στον x-άξονα το $(0, 0)$ είναι σημείο ελαχίστου ενώ στον y-άξονα σημείο μεγίστου. Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Αντίστοιχα αν $a > 0$ και $b < 0$.

Άσκηση 7.5.2. Να μελετηθεί ως προς τα τοπικά ακρότατα η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$.

Υπόδειξη: Έχουμε

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y, f_y(x,y) = -4x + 4y,$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ \ f_{xy}(x,y) = -4,\ \ f_{yy}(x,y) = 4$$

και άρα $f \in C^2$. Επίσης,

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 48x^2 - 16 \tag{7.5.1}$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = x$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x + 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Από την (7.5.1) παίρνουμε $\Delta(0,0) < 0$ και άρα το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης, $\Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) > 0$ και $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) > 0$ οπότε τα σημεία $(1,1)$ και $(-1,-1)$ είναι τοπικά ελάχιστα.

Άσκηση 7.5.3. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Υπόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0. \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $x^3 = -y^3$, ή ισοδύναμα, $y = -x$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$. Συνεπώς, τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = (12x^2 - 4)\cdot(12y^2 - 4) - 16.$$

Βλέπουμε ότι $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως, παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $0 < x \leq 1$ ισχύει ότι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και (γ) για κάθε $x = y \neq 0$ ισχύει ότι $f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Για τα άλλα δύο σημεία διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$, οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο. Άρα, η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο τοπικά ελάχιστα.

Άσκηση 7.5.4. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4$.

Υπόδειξη: Έχουμε

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3, \quad f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3,$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 12(x - y)^2, \; f_{yy}(x, y) = 12y^2 - 12(x - y)^2$$

και

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 12(x - y)^2$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3 = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3 = 0 \end{cases}$$

Άρα $f \in C^2$. Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις, παίρνουμε $x^3 + y^3 = 0$, ή ισοδύναμα,

$$y = -x \tag{7.5.2}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, έχουμε

$$4x^3 - 4(x - y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε από την (7.5.2) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$. Έχουμε $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0$ και άρα $\Delta(0, 0) = 0$. Συνεπώς, από το κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το $(0, 0)$ είναι ή δεν είναι τοπικό ακρότατο. Όμως, παρατηρούμε ότι

(1) $f(0, 0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0, 0)$ ισχύει ότι $f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0$, και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0, 0)$ ισχύει ότι $f(x, y) = f(x, -x) = -14x^4 < 0$.

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι σαγματικό σημείο και η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 7.5.5. Με χρήση Πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ πάνω στην έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 4$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4$ και άρα η συνθήκη $x^2 + 2y^2 = 4$ γράφεται $g(x, y) = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\nabla g(x, y) = \big(g_x(x, y), g_y(x, y)\big) = (2x, 4y) \neq \mathbf{0}$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 4$, και άρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(x, y) = 0$ θα είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$8x = 2\lambda x \tag{7.5.3}$$

$$-2y = 4\lambda y \tag{7.5.4}$$

$$x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \tag{7.5.5}$$

Από την (7.5.3) έχουμε

$$8x = 2\lambda x \Leftrightarrow 2x(4 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \lambda = 4$$

και ομοίως από την (7.5.6)

$$-2y = 4\lambda y \Leftrightarrow 2y(1 + 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } \lambda = -1/2 \tag{7.5.6}$$

(1) Έστω $x = 0$. Τότε η (7.5.5) δίνει

$$2y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = -\sqrt{2} \text{ ή } y = \sqrt{2}$$

Τα σημεία $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$ είναι λύσεις του συστήματος (με $\lambda = -\frac{1}{2}$).

(2) Έστω $x \neq 0$. Τότε από την (7.5.3) έχουμε $\lambda = -4$ και άρα η (7.5.6) δίνει $y = 0$. Αντικαθιστώντας στην (7.5.5) παίρνουμε

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Τα σημεία $(-2, 0)$, $(2, 0)$ είναι λύσεις του συστήματος (με $\lambda = -\frac{1}{2}$).

Οι παραπάνω λύσεις είναι όλες οι λύσεις αφού είτε $x = 0$ είτε $x \neq 0$. Αρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ υπό την συνθήκη $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ είναι τα σημεία

$$(0, -\sqrt{2}),\ (0, \sqrt{2}),\ (-2, 0) \text{ και } (2, 0)$$

Έχουμε

$$f(0, -\sqrt{2}) = f(0, \sqrt{2}) = -2$$

και

$$f(-2, 0) = f(2, 0) = 16$$

Δεδομένου ότι τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = 0$ αποτελούν μια έλλειψη του $\mathbb{R}^2$ δηλαδή ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ έχουμε ότι πάνω στην E η f θα παρουσιάζει ολικά ακρότατα . Επειδή όλα τα ολικά ακρότατα της f θα περιέχονται στα παραπάνω τέσσερα σημεία, βλέποντας τις τιμές της

f σε αυτά τα σημεία καταλαβαίνουμε ότι

$$\min\{f(x,y) : g(x,y) = 0\} = -2 \text{ και } \quad \max\{f(x,y) : g(x,y) = 0\} = 16$$

και άρα ότι η f πάνω στην έλλειψη παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα σημεία $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$ και ολικό μέγιστο στα $(-2, 0)$ και $(2, 0)$.

Άσκηση 7.5.6. Βρείτε με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange ή με άλλο τρόπο το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που είναι πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$.

Υπόδειξη: Ψάχνουμε το σημείο (x_0, y_0, z_0) όπου η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = x+y+z-3 = 0$. Θα δώσουμε τρείς τρόπους εύρεσης αυτού του σημείου.

α′ τρόπος (Με πολλαπλασιαστές Lagrange): Έχουμε

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0) \tag{7.5.7}$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και άρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x, y, z)$ υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = 0$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2y = 2z = \lambda \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Οπότε $x = y = z = \lambda/2$ και αντικαθιστώντας στην $x + y + z = 3$ παίρνουμε $\lambda = 2$. Αρα το μοναδικό πιθανό τοπικό ακρότατο της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 3$ είναι το σημείο $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$ και άρα αυτό είναι το ζητούμενο σημείο.

β′ τρόπος (Με επίλυση της συνθήκης ως προς μια μεταβλητή): Λύνοντας την εξίσωση $x + y + z = 3$ ως προς z έχουμε $z = 3 - x - y$ και αντικαθιστώντας στην f παίρνουμε την συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$\begin{aligned} F(x,y) &= f(x,y,3-x-y) \\ &= x^2 + y^2 + (3-x-y)^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 6y \end{aligned}$$

που ορίζεται σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της F λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) = 0 \\ F_y(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 6 = 0 \\ 4y + 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η μοναδική λύση είναι το σημείο $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Έχουμε $F_{xx}(x, y) = F_{yy}(x, y) = 4$ και $F_{xy}(x, y) = 2$. Άρα $\Delta(1, 1) = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0$ και αφού $F_{xx}(1, 1) = 4 > 0$ το σημείο $(1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Αρα το $(x_0, y_0, 3 - x_0 - y_0) = (1, 1, 1)$ είναι το σημείο

γ′ τρόπος Από ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$x + y + z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{3}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x+y+z = x\cdot 1 + y\cdot 1 + z\cdot 1 = (x,y,z)\cdot(1,1,1) &\leq \|(x,y,z)\|\cdot\|(1,1,1)\| \\ &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{3} \end{aligned}$$

Οπότε για όλα τα $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ με $x+y+z=3$ έχουμε

$$3 \leq x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow f(1,1,1)\leq f(x,y,z)$$

Συνεπώς το $\mathbf{x}_0=(1,1,1)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ υπο την συνθήκη $x+y+z=3$.

Άσκηση 7.5.7. Να βρείτε με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ πάνω στο σύνολο $K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x^2+y^2+3z^2\leq 1\right\}$.

Υπόδειξη: Ισοδύναμα θα βρούμε που μεγιστοποιείται η συνάρτηση

$$h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

πάνω στο K. Παρατηρούμε ότι η h δεν μεγιστοποιείται στο εσωτερικό αυτού του συνόλου αφού το μοναδικό της κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0)$ στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο. Συνεπώς η h θα λαμβάνει μέγιστη τιμή στο σύνορο

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x^2+y^2+3z^2=1\right\}.$$

Για να την προσδιορίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολ/στων Lagrange. Θέτουμε $g(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2-1$ και επειδή $\nabla g(x,y,z)\neq\mathbf{0}$ για $(x,y,z)\in S$, τα πιθανά σημεία ακροτάτων θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\nabla h(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \text{ και } g(x,y,z)=0.$$

Συνεπώς πρέπει

$$(2x,2y,2z)=\lambda(4x,2y,6z)$$

και άρα $\lambda\neq 0$ αφού διαφορετικά $(x,y,z)=(0,0,0)\notin S$. Με αυτό το δεδομένο βρίσκουμε ότι είτε $\lambda=1/2$ και $(x,y,z)=(\pm 1/\sqrt{2},0,0)$, είτε $\lambda=1$ και $(x,y,z)=(0,\pm 1,0)$ ή $\lambda=1/3$ και $(x,y,z)=(0,0,\pm 1/\sqrt{3})$. Με σύγκριση βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή λαμβάνεται στα σημεία $(0,1,0)$ και είναι 1.

Άσκηση 7.5.8. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της ποσότητας $x^2+xy+y^2+yz+z^2$, πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας S του $\mathbb{R}^3$.

Υπόδειξη: Η εύρεση της μέγιστης τιμής της ποσότητας $x^2+xy+y^2+yz+z^2$ πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$ είναι ισοδύναμο πρόβλημα με την εύρεση της μέγιστης τιμής της συνάρτησης $f(x,y,z)=xy+yz+1$ υπό την συνθήκη $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$. Για να την προσδιορίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολ/στων Lagrange. Θέτουμε $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ και επειδή $\nabla g(x,y,z)=(2x,2y,2z)\neq(0,0,0)$ για όλα τα $(x,y,z)\in S$ τα πιθανά σημεία ακροτάτων θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \text{ και } g(x,y,z)=0.$$

Συνεπώς πρέπει

$$(y,x+z,y)=\lambda(2x,2y,2z).$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις.

- $\lambda = 0$. Τότε $y = 0$ και $x + z = 0$. Οπότε έχουμε δύο πιθανά σημεία τα $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ και $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
- $\lambda \neq 0$. Τότε $x \neq 0$ αφού διαφορετικά $y = z = 0$ και το $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας. Οπότε $x = z$ και
$$y^2 = x^2 + xz = 2x^2 .$$
Αντικαθιστώντας στην $g(x, y, z) = 0$ βρίσκουμε ότι $x = \pm 1/2$ απ'όπου παίρνουμε άλλα 4 σημεία: $(1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$, $(-1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2)$,
$(1/2, -1/\sqrt{2}, 1/2)$ και $(-1/2, -1/\sqrt{2}, -1/2)$.

Με σύγκριση βρίσκουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στα σημεία $(1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$ και $(-1/2, -1/\sqrt{2}, -1/2)$ η οποία είναι ίση με $1 + \sqrt{2}$.

Άσκηση 7.5.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = y$ και έστω η καμπύλη $y^3 = x^2$.

(α) Παρατηρείστε ότι το $(0, 0)$ είναι ολικό ακρότατο της f υπό την συνθήκη $y^3 - x^2 = 0$.

(β) Δείξτε ότι το σύστημα
$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$
δεν έχει λύση.

(γ) Γιατί η μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange δεν εφαρμόζεται?

[*Υπόδειξη* : (γ) $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$]

Άσκηση 7.5.10. Δείξτε ότι μεταξύ όλων των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δεδομένο κύκλο το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

[*Υπόδειξη* : Έστω R η ακτίνα του κύκλου και ΑΒΓ ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο. Αν με x, y, z συμβολίσουμε τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τότε το εμβαδόν του ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο
$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} R^2 (\sin x + \sin y + \sin z)$$
όπου $x + y + z = 2\pi$ και $0 < x, y, z < \pi$. Επομένως ψάχνουμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z)$ υπό τις συνθήκες $x + y + z = 2\pi$ και $0 < x, y, z < \pi$.]

Άσκηση 7.5.11. (Υπαρξη ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος) Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $d \times d$ συμμετρικός πίνακας και $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή, δηλαδή
$$q(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_i x_j$$

(α) Δείξτε ότι $\nabla q(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

(β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}$ με $\|\mathbf{x}\| = 1$, τέτοια ώστε $A\,\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

Υπόδειξη:

(α) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} a_{ii}x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{d}(a_{1i}+a_{i1})x_1x_i + +\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{d}(a_{2i}+a_{i2})x_2x_i + \dots \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=2}^{d} a_{i1}x_1x_i + \sum_{i=3}^{d} a_{i2}x_2x_i + \dots
\end{aligned}
$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι $a_{ij} = a_{ji}$, για κάθε $i, j = 1, 2, ..., d$.

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x_1} &= a_{11}x_1 + \sum_{i=2}^{d} a_{1i}x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\
\frac{\partial q}{\partial x_2} &= a_{22}x_2 + a_{21}x_1 + \sum_{i=3}^{d} a_{2i} = \sum_{i=1}^{d} a_{2i}x_i
\end{aligned}
$$

κ.ο.κ, οπότε και έχουμε την ισότητα $\nabla q(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

(β) Η q ως συνεχής λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στη μοναδιαία σφαίρα

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| = 1\right\}.$$

Ισοδύναμα η q λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή με τον περιορισμό

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = 1.$$

Έστω $\mathbf{x}_0 \in S$ $(\|\mathbf{x}_0\| = 1)$ το σημείο στο οποίο λαμβάνει μέγιστη τιμή. Σύμφωνα με τη μέθοδο των πολ/στων Lagrange θα υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\nabla q(\mathbf{x}_0) = \mu \nabla g(\mathbf{x}_0) = 2\mu \mathbf{x}_0.$$

Θέτοντας $\lambda = 2\mu$ και χρησιμοποιώντας το (α) έχουμε το συμπέρασμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης

8.1 Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για δύο μεταβλητές

8.1.1 Εισαγωγικά

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών

(8.1.1)
$$F(x, y) = 0$$

ως προς τη μία από τις μεταβλητές συναρτήσει της άλλης. Θέλουμε δηλαδή να δώσουμε κάποιες συνθήκες ώστε δεδομένης της εξίσωσης (8.1.1) να υπάρχει μια λύση της μορφής

(8.1.2)
$$y = f(x) \quad \text{ή} \quad x = g(y).$$

Το ερώτημα αυτό έχει και την εξής γεωμετρική διατύπωση: Πότε το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $F(x, y) = 0$, αποτελεί το ίχνος μιας «φυσιολογικής» καμπύλης του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι το γράφημα μιας συνάρτησης από ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$; Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Αν η $F(x, y) = 0$ είναι η εξίσωση

(8.1.3)
$$ax + by + c = 0$$

και $b \neq 0$ τότε η (8.1.3) λύνεται ως προς τη μεταβλητή y:

(8.1.4)
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

και συνεπώς όλα τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την (8.1.3) αποτελούν το γράφημα της συνάρτησης (8.1.4), δηλαδή μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$.

Από την άλλη πλευρά, αν $F(x, y) = 0$ είναι η εξίσωση

(8.1.5)
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1, y_2 με $F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0$ και αντίστοιχα για κάθε $y \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1, x_2 με $F(x_1, y) = F(x_2, y) = 0$. Συνεπώς, η εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 = 0$ δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία από τις μεταβλητές x, y. Όμως, αν περιορίσουμε τα (x, y) με $F(x, y) = 0$ που θεωρούμε, τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ ως προς μία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Για παράδειγμα, αν περιοριστούμε στο άνω ημικύκλιο (δηλαδή για $y \geq 0$), έχουμε

$$F(x, y) = 0 \text{ και } y \geq 0 \iff y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1].$$

Ομοίως,

$$F(x, y) = 0 \text{ και } x \leq 0 \iff x = -\sqrt{1 - y^2}, y \in [-1, 1].$$

8.1.2 Διατύπωση του θεωρήματος

Όπως θα δούμε στην συνέχεια το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης λέει ότι κάτω από κάποιες απλές συνθήκες μια εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$ μπορεί να επιλυθεί ως προς μια μεταβλητή *τοπικά* σε κάθε σημείο (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$.

Ορισμός 8.1.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : A \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Λέμε ότι η $F(x, y) = 0$* ***λύνεται στο*** *(x_0, y_0)* ***ως προς*** *y* ***(συναρτήσει του x)*** *αν υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ και $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ τέτοιο ώστε $F(x, y) = 0$. Η συνάρτηση $g : X \to Y$ που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$ λέμε ότι ορίζεται* ***πεπλεγμένα μέσω της*** *$F(x, y) = 0$* ***στο*** *(x_0, y_0).*

Θεώρημα 8.1.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : A \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Αν*

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

τότε η $F(x, y) = 0$ λύνεται στο (x_0, y_0) ως προς y.

Η συνάρτηση $y = f(x)$ που ορίζεται πεπλεγμένα μέσω της $F(x, y) = 0$ στο (x_0, y_0), είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει ότι

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\Big|_{y=f(x)} \tag{8.1.6}$$

Ειδικότερα,

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{8.1.7}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία βήματα.
Βήμα 1. Βρίσκουμε τα διαστήματα Y και X και ορίζουμε την συνάρτηση $f : X \to Y$ ως εξής. Έστω ότι $F_y(x_0, y_0) > 0$ (αν $F_y(x_0, y_0) < 0$ τότε η απόδειξη προχωράει ανάλογα). Επειδή η $F_y : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F_y(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Έστω

$$\delta_2 = \delta/2, \ y_0^- = y_0 - \delta_2, \ y_0^+ = y_0 + \delta_2, \text{ και } Y = (y_0^-, y_0^+).$$

Παρατηρείστε ότι

$$\{x_0\} \times Y = \{(x_0, y) : y \in Y\} \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$$

και άρα

$$F_y(x_0, y) > 0$$

για κάθε $y \in Y$.

Περιορίζουμε τώρα την F στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+), δηλαδή θεωρούμε τη συνάρτηση $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ με

$$g_0(y) = F(x_0, y)$$

για κάθε $y \in Y$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $g_0'(y) = F_y(x_0, y)$ και συνεπώς $g_0'(y) > 0$ για κάθε $y \in Y$. Αυτό σημαίνει ότι η g_0 είναι μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση. Επειδή $g_0(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ θα πρέπει να έχουμε

$$y < y_0 < y' \Rightarrow g_0(y) < 0 < g_0(y') \Rightarrow F(x_0, y) < 0 < F(x_0, y')$$

για κάθε $y, y' \in Y$. Ειδικότερα,

$$F(x_0, y_0^-) < 0 < F(x_0, y_0^+).$$

Επειδή η F είναι συνεχής στα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+) θα υπάρχει $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε

$$F(x, y) < 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^-) \text{ και } F(x, y) > 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^+) \tag{8.1.8}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε μικραίνοντας το δ' αν χρειαστεί ότι

$$B_{\delta'}(x_0, y_0^-), B_{\delta'}(x_0, y_0^-) \subseteq B_{\delta}(x_0, y_0)$$

και άρα

$$F_y(x, y) > 0 \tag{8.1.9}$$

για κάθε $(x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^-) \cup B_{\delta'}(x_0, y_0^-)$

Θέτουμε

$$\delta_1 = \delta', \;\; x_0^- = x_0 - \delta_1, \;\; x_0^+ = x_0 + \delta_1, \;\; \text{και } X = (x_0^-, x_0^+).$$

Τότε $X \times \{y_0^-\} \subseteq B_{\delta'}(x_0, y_0^-)$ και $X \times \{y_0^+\} \subseteq B_{\delta'}(x_0, y_0^+)$. Συνεπώς, από την (8.1.8),

$$F(x, y_0^-) < 0 < F(x, y_0^+)$$

για κάθε $x \in X$. Επιπλέον,

$$X \times Y \subseteq B_{\delta}(x_0, y_0)$$

και άρα, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $x \in X$ και θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(y) = F(x, y)$, $y \in Y$, θα έχουμε ότι $g'(y) = F(x, y) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επειδή $g(y_0^-) = F(x, y_0^-) < 0$ και $g(y_0^+) = F(x, y_0^+) > 0$, θα υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ με $g(y) = F(x, y) = 0$. Έστω $f : X \to Y$ η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$.

Βήμα 2. Δείχνουμε ότι η $f : X \to Y$ που ορίσθηκε στο Βήμα 1 είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν σημείο $a \in X$ και $\varepsilon > 0$. Από την επιλογή των X και Y παραπάνω, το $b = f(a)$ θα είναι το μοναδικό σημείο του διαστήματος Y που ικανοποιεί τις $F(a, b) = 0$ και $F(a, y) < 0 < F(a, y')$ αν και μόνο αν $y < b < y'$. Περνώντας σε μικρότερο $\varepsilon > 0$ αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteq Y$. Επειδή $F(a, b - \varepsilon) < 0 < F(a, b + \varepsilon)$ και η F είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(x, y) < 0$ αν $(x, y) \in B_{\delta}(a, b - \varepsilon)$ και $F(x, y) > 0$ αν $(x, y) \in B_{\delta}(a, b + \varepsilon)$. Ειδικότερα, για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $F(x, b - \varepsilon) < 0 < F(x, b + \varepsilon)$, το οποίο σημαίνει ότι $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, αφού, από την επιλογή

των Y, X και τον ορισμό της f στο Βήμα 1, το $f(x)$ είναι το μοναδικό σημείο y στο Y με την ιδιότητα $F(x,y') < 0 < F(x,y'') \iff y' < y < y''$.
Βήμα 3. Δείχνουμε ότι η $f : X \to Y$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Έστω $a \in X$ και έστω $x \in X$ με $x \neq a$. Παρατηρήστε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a, f(a))$ και $\mathbf{x} = (x, f(x)$ περιέχεται ολόκληρο στο $X \times Y$, άρα περιέχεται στο A. Επειδή η F είναι C^1, είναι και παραγωγίσιμη και άρα από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ τέτοιο ώστε

$$F(x, f(x)) - F(a, f(a)) = F_x(\boldsymbol{\xi})(x-a) + F_y(\boldsymbol{\xi})(f(x) - f(a)).$$

Από τις $F(x, f(x)) = F(a, f(a)) = 0$ έπεται ότι

$$F_x(\boldsymbol{\xi})(x-a) + F_y(\boldsymbol{\xi})(f(x) - f(a)) = 0.$$

Εφόσον $\boldsymbol{\xi} \in X \times Y \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$ (βλ. Βήμα 1), $F_y(\boldsymbol{\xi}) > 0$. Ειδικότερα, $F_y(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ και άρα

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = -\frac{F_x(\boldsymbol{\xi})}{F_y(\boldsymbol{\xi})}.$$

Λόγω συνέχειας της f, $\lim_{x\to a}(x, f(x)) = (a, f(a))$. Επειδή $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ με $0 < |\xi_1 - a| < |x-a|$ και $0 < |\xi_2 - f(a)| < |f(x) - f(a)|$, έχουμε ότι $\lim_{x\to a} \boldsymbol{\xi} = (a, f(a)$ και άρα

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = -\lim_{x\to a} \frac{F_x(\boldsymbol{\xi})}{F_y(\boldsymbol{\xi})} = -\frac{F_x(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}.$$

□

8.1.3 Παρατηρήσεις

(1) Το παράδειγμα της ευθείας $F(x,y) = ax + by + c = 0$ είναι ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει τη συνθήκη $F_y(x,y) \neq 0$. Πράγματι, η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x αν $b = F_y(x,y) \neq 0$.

(2) Παρατηρήστε ότι η επίλυση της $F(x,y) = 0$ ως προς $y = f(x)$ είναι *τοπική* στο (x_0, y_0), δηλαδή υπάρχει μια περιοχή X του x_0 και μια περιοχή Y του y_0, όπου η $F(x,y) = 0$ λύνεται ως προς y συναρτήσει του x. Γενικά όμως μπορεί για κάποια ή και για όλα τα $x \in X$ να υπάρχουν και άλλα y που δεν ανήκουν στο Y αλλά ικανοποιούν την $F(x,y) = 0$. Στο παράδειγμα όπου $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, αν $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $X = (-1, 1)$ και $Y = (0, 2)$ έχουμε $F(x, +\sqrt{1-x^2}) = 0$ για κάθε $x \in X$ (εδώ $f(x) = +\sqrt{1-x^2}$), ενώ για $Y = (-2, 0)$, $F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$, πάλι για κάθε $x \in X$ (και άρα $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$).

(3) Γενικά η συνάρτηση $f : X \to Y$ που επιλύει την $F(x,y) = 0$ ως προς y στο (x_0, y_0) όταν $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ συνήθως δεν δίνεται από κάποιον *κλειστό τύπο*, ούτε και τα διαστήματα X και Y μπορούν να προσδιορισθούν εύκολα. Αυτό που γνωρίζουμε για την f είναι ότι ανήκει στην κλάση C^1. Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $F \in C^k(A)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ (ή αντίστοιχα C^∞) τότε και η f είναι $C^k(X)$ (αντίστοιχα C^∞).

(4) Με εναλλαγή των x και y έχουμε τα εξής. Καταρχάς θα λέμε ότι η εξίσωση $F(x,y) = 0$ **λύνεται στο** (x_0, y_0) **ως προς** x **(συναρτήσει του** y**)** αν υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ και $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοια ώστε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε $F(x,y) = 0$. Η συνάρτηση $g : Y \to X$ που στέλνει κάθε $y \in Y$ στο μοναδικό $x \in X$ με $F(x,y) = 0$ λέμε ότι ορίζεται **πεπλεγμένα μέσω της** $F(x,y) = 0$ **στο** (x_0, y_0).

Θεώρημα 8.1.3. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $F : A \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Αν $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ τότε η $F(x, y) = 0$ λύνεται στο (x_0, y_0) ως προς x. Η συνάρτηση $x = g(y)$ που ορίζεται πεπλεγμένα μέσω της $F(x, y) = 0$ στο (x_0, y_0), είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει ότι $g'(y) = -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}\Big|_{x=g(y)}$ Ειδικότερα, $g'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$.*

(4) Τα Θεωρήματα 8.1.2 και 8.1.3 έχουν και την εξής γεωμετρική συνέπεια:

Πόρισμα 8.1.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $F : A \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω*

$$C = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$$

Τότε για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0) \in C$ με

$$\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0} \tag{8.1.10}$$

υπάρχει ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο R με κέντρο το (x_0, y_0) τέτοιο ώστε η τομή $R \cap C$ είναι το γράφημα μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

8.1.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 8.1.5. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2e^y + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα στο $(0, 1)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(0) = 0$.

Λύση : Η συνάρτηση $F(x, y) = x^2e^y + y - 1$ είναι C^1 με

$$F_x(x, y) = 2xe^y, \quad F_y(x, y) = x^2e^y + 1$$

Επειδή $F(0, 1) = 0$ και $F_y(x, y) \neq 0$ από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης έχουμε ότι η εξίσωση $x^2e^y + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα στο $(0, 1)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Παράδειγμα 8.1.6. Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ με κέντρο το $x_0 = 1$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = 2x^{f(x)}$, για όλα τα $x \in I$.

Απόδειξη. Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = 2x^y \iff 2x^y - y = 0$. Θέτουμε $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y) = 2x^y - y.$$

Έχουμε

$$F_x(x, y) = 2yx^{y-1} \text{ και } \quad F_y(x, y) = 2\ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η F είναι C^1. Επίσης,

$$F(1, 2) = 0 \text{ και } \quad F_y(1, 2) = -1 \neq 0.$$

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται στο $(1, 2)$ ως προς y, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X και Y με κέντρα τα $x_0 = 1$ και $y_0 = 2$ αντίστοιχα, και μια C^1 συνάρτηση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε $F(x,y)=0 \iff y=f(x)$, για κάθε $x\in X$ και $y\in Y$. Συνεπώς, $f(1)=2$ και $F(x,f(x))=0 \iff 2x^{f(x)}-f(x)=0 \iff f(x)=2x^{f(x)}$, για κάθε $x\in X$. □

8.2 Γενίκευση για περισσότερες μεταβλητές

8.2.1 Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για τρείς μεταβλητές

Το Θεώρημα 8.1.2 γενικεύεται (με την ίδια σχεδόν απόδειξη) και για εξισώσεις με τρείς μεταβλητές.

Θεώρημα 8.2.1. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^3$ ανοικτό σύνολο, $F:A\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και $(x_0,y_0,z_0)\in A$ τέτοιο ώστε $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Αν $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ τότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X, Y και Z με κέντρα τα x_0, y_0 και z_0 αντίστοιχα τέτοια ώστε για κάθε $(x,y)\in X\times Y$ υπάρχει μοναδικό $z\in Z$ τέτοιο ώστε $F(x,y,z)=0$. Η συνάρτηση $z=f(x,y)$ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και ισχύει ότι*

$$f_x(x,y)=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\Big|_{z=f(x,y)} \quad \text{και} \quad f_y(x,y)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\Big|_{z=f(x,y)} \tag{8.2.1}$$

Ειδικότερα,

$$f_x(x_0,y_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \quad \text{και} \quad f_y(x_0,y_0)=-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \tag{8.2.2}$$

Αντίστοιχα διατυπώνεται το Θεώρημα 8.2.1 όταν $F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ ή $F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Το ανάλογο γεώμετρικό πόρισμα είναι το εξής.

Πόρισμα 8.2.2. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^3$ ανοικτό και $F:A\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω*

$$S=\{(x,y,z)\in A : F(x,y,z)=0\}.$$

Τότε για οποιοδήποτε σημείο $(x_0,y_0,z_0)\in S$ με

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq \mathbf{0}$$

υπάρχει ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R με κέντρο το (x_0,y_0,z_0) τέτοιο ώστε η τομή $R\cap S$ είναι το γράφημα μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών.

8.2.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 8.2.3. Η εξίσωση

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz-4=0$$

λύνεται ως προς $z=z(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(1,1,2)$.

Πράγματι,

$$F_x(x,y,z)=3x^2-3yz, \quad F_y(x,y,z)=3y^2-3xy, \quad F_z(x,y,z)=3z^2-3xy.$$

Άρα, η F είναι C^1. Επιπλέον, $F(1,1,2)=0$ και $F_z(1,1,2)=12-3=9\neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 8.2.1 μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή $U\subseteq\mathbb{R}^2$ του $(1,1)$ και ανοικτή περιοχή $Z\subseteq\mathbb{R}$ του $z=2$ ώστε για κάθε $(x, y) \in U$ να υπάρχει μοναδικό $z = z(x, y) \in Z$ με $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Επίσης,

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}_{z=z(x,y)}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}\Big|_{z=z(x,y)}$$

και άρα (αφού $z(1, 1) = 2$),

$$z_x(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3, \quad z_y(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3.$$

Παράδειγμα 8.2.4. Δίνεται η συνάρτηση $F(x, y, z) = z^3 + z - x^2 - y^2 - 2$.

(α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$ σε μια περιοχή του $(0, 0, 1)$.

(β) Αποδείξτε ότι η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(γ) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ δεύτερης τάξης της $z = z(x, y)$ με κέντρο το $(0, 0)$ και υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{z(x, y) - z(0, 0)}{x^2 + y^2}$.

Απάντηση: (α) Η F είναι C^2 συνάρτηση ως πολυωνυμική. Επίσης έχουμε $F(0, 0, 1) = 0$ και $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (οπότε και $F_z(0, 0, 1) \neq 0$). Άρα, η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$, όπου η $z = z(x, y) : U \to \mathbb{R}$ είναι C^2 συνάρτηση και $U \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι μια ανοικτή περιοχή του $(0, 0)$.

(β) Έχουμε $F_x(x, y, z) = -2x$, $F_y(x, y, z) = -2y$ και όπως ειδαμε $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1$. Υπολογίζουμε:

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}_{z=z(x,y)} = \frac{2x}{3z^2(x, y) + 1}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}_{z=z(x,y)} = \frac{2y}{3z^2(x, y) + 1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} z_{xx}(x, y) &= \frac{2(3z^2(x, y) + 1) - 2x \cdot 6z(x, y)z_x(x, y)}{(3z^2 + 1)^2} \\ z_{yy}(x, y) &= \frac{2(3z^2(x, y) + 1) - 2y \cdot 6z(x, y)z_y(x, y)}{(3z^2(x, y) + 1)^2} \\ z_{xy}(x, y) &= \frac{-2x \cdot 6z(x, y)z_y(x, y)}{(3z^2(x, y) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Άρα, επειδή $z(0, 0) = 1$, $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την $z = z(x, y)$. Επιπλέον, $z_{xx}(0, 0) = z_{yy}(0, 0) = 8/16 = 1/2$ και $z_{xy}(0, 0) = 0$. Άρα, $z_{xx}(0, 0) > 0$ και $\Delta = z_{xx}(0, 0) \cdot z_{yy}(0, 0) - z_{xy}(0, 0)^2 = 1/4 > 0$ και άρα, από το κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου, η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(β) Έχουμε

$$T_2(x, y) = z(0, 0) + z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\left(z_{xx}(0, 0)x^2 + 2z_{xy}(0, 0)xy + z_{yy}(0, 0)y^2\right)$$

και άρα αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - 1 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big[\frac{z(x,y)-1}{x^2+y^2} - \frac{1}{4}\Big] = 0.$$

Συνεπώς, αφού $z(0,0) = 1$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}.$$

8.3 Ασκήσεις

Άσκηση 8.3.1. Να δείξετε ότι η επιφάνεια $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$ μπορεί να αναπαρασταθεί, με μοναδικό τρόπο, από το γράφημα μίας διαφορίσιμης συνάρτησης $z = g(x,y)$ γύρω από το σημείο $(1,0,-1)$. Στη συνέχεια να βρείτε τις μερικές παραγώγους της g στο σημείο $(1,0)$.

Υπόδειξη: Θέτουμε

$$F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

και παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,-1) = 3 \neq 0\,.$$

Συνεπώς από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $z = f(x,y)$ τέτοια ώστε

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

για κάθε (x,y) σε μία κατάλληλη περιοχή του σημείου $(1,0)$. Άρα η επιφάνεια $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$ είναι το γράφημα της f γύρω από το σημείο $(1,0,-1)$.

Σύμφωνα και πάλι με το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης έχουμε ότι

$$f_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}$$

και

$$f_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}$$

Επομένως

$$f_x(1,0) = 1 = f_y(1,0)\,.$$

Άσκηση 8.3.2. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3z^2 - z^3yx = 0$ μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z, σε μία περιοχή του σημείου $(1,1,1)$ αλλά όχι σε περιοχή του σημείου $(0,0,0)$. Στη συνέχεια υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $z_x(1,1)$ και $z_y(1,1)$.

Υπόδειξη: Θέτουμε

$$F(x,y,z) = x^3z^2 - z^3yx$$

και έχουμε ότι

$$F_z(1,1,1) = -1 \neq 0$$

Επομένως η εξίσωση

$$x^3z^2 - z^3yx = 0$$

μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z, σε μία περιοχή του σημείου $(1,1,1)$.

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$F_z(0,0,0) = 0$$

και άρα δεν ικανοποιείται η υπόθεση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Επιπλέον βλέπουμε ότι η εξίσωση μας για $x = 0$ ικανοποιείται για κάθε z και συνεπώς δεν μπορεί να λυθεί με μοναδικό τρόπο σε καμμία περιοχή του σημείου $(0, 0, 0)$.

Τέλος, όπως και στην προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε ότι

$$z_x(1, 1) = 2 \text{ και } z_y(1, 1) = -1 .$$

Άσκηση 8.3.3. Αν η $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαθέτει συνεχείς παραγώγους 1ης τάξης με $f(0, 0) = 0$, $f_u(0, 0) \neq 0$, δείξτε ότι υπάρχει μια μοναδική συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $x = g(y)$ με $g(0) = 0$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(g(y) + y, g^2(y)) = 0$, για y κοντά στο μηδέν και βρείτε την τιμή $g'(0)$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $u = x + y$, $v = x^2$ και έστω

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

και έχουμε ότι η F είναι C^1 με $F(0, 0) = f(0, 0) = 0$. Επιπλέον $F_x = f_u + 2xf_v$ και συνεπώς

$$F_x(0, 0) = f_u(0, 0) \neq 0 .$$

Συνεπώς από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης έχουμε ότι υπάρχει C^1 συνάρτηση $x = g(y)$, σε περιοχή του 0 τέτοια ώστε $g(0) = 0$ και $F(g(y), y) = 0$, για y κοντά στο μηδέν. Αυτό όμως συνεπάγεται το ζητούμενο, δηλαδή ότι $f(g(y) + y, g^2(y)) = 0$, για y κοντά στο μηδέν. Επιπλέον

$$g'(0) = -\frac{F_y(0, 0)}{F_x(0, 0)} = -\frac{f_u(0, 0)}{f_v(0, 0)} = -1 .$$

Άσκηση 8.3.4. Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση στο D με $f(1, 2) = 1$. Δώστε ικανές συνθήκες για την f ώστε η εξίσωση $f(f(x, y), xy) = 1$ να μπορεί να επιλυθεί κοντά στο $(1, 2)$;

Υπόδειξη: Έστω $u = f(x, y)$, $v = xy$ και $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $F(x, y) = f(f(x, y), xy) = f(u, v)$. Τότε η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $F(1, 2) = 1$. Για να εφαρμόσουμε το θεωρημα πεπλεγμένης συνάρτησης πρέπει να υποθέσουμε ότι $F_y(1, 2) \neq 0$. Επομένως εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας προκύπτει

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(f(x, y), xy)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(f(x, y), xy) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(f(x, y), xy) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(f(x, y), xy)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + x\frac{\partial v}{\partial y}(f(x, y), xy)\end{aligned}$$

Επομένως, θα πρέπει

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + 1\right) \neq 0 \;,$$

άρα οι συνθήκες είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \neq 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \neq -1 \;.$$

Άσκηση 8.3.5. *Ν.δ.ο υπάρχει μία συνάρτηση $y = f(x)$, ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή A του 1 έτσι ώστε $f(1) = 1$ και $x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2$, $(x \in A)$. Επίσης να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(1)$.*

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x,y) = x^y + y^x - 2 = e^{ylnx} + e^{xlny} - 2 = 0$. Υπολογίζοντας παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y lnx + \frac{x}{y} y^x \ ,$$

δηλαδή $F(1,1) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1 \neq 0$.

Από θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει C^∞ $\Big($αφού $F \in C^\infty((0,\infty)\times(0,\infty))\Big)$ συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή A του 1 ώστε

$$x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2 \ , \quad f(1) = 1$$

Επιπλέον $F_x(x,y) = \frac{y}{x} x^y + y^x lnx$, και άρα

$$f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -1$$

Άσκηση 8.3.6. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $z = f(x,y)$, ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή A του $(1,1)$ έτσι ώστε $f(1,1) = 1$ και

$$x^{f(x,y)} + [f(x,y)]^y + y^x = 3 \ , \quad (x \in A)$$

Να υπολογίσετε τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u}$ για τα οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\mathbf{u}}$ μηδενίζεται.

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x,y,z) = x^y + z^y + y^x - 3 = 0$. Παρατηρούμε ότι $F(1,1,1) = 0$ καθώς και ότι F είναι C^1.

$$\begin{aligned}
&F(x,y,z) = e^{zlnx} + e^{ylnz} + e^{xlny} - 3 \\
&\Rightarrow\ F_z(x,y,z) = lnxe^{zlnx} + \frac{y}{z}e^{ylnz} \ , \quad F_x(x,y,z) = \frac{z}{x}e^{zlnx} + lnye^{xlny} \ , \quad F_y(x,y,z) = lnze^{ylnz} + \frac{x}{y}e^{xlny} \ .
\end{aligned}$$

Αφού $F_z(1,1,1) = 1 \neq 0$ προκύπτει από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι υπάρχει C^1 συνάρτηση $z = f(x,y)$ ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή A του $(1,1)$ ώστε να ισχύει

$$x^{f(x,y)} + [f(x,y)]^y + y^x = 3 \ , \quad \forall (x,y) \in A$$

με $f(1,1) = 1$ και

$$f_x(1,1) = -\frac{F_x(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -1 \ , \quad f_y(1,1) = -\frac{F_y(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -1 \ .$$

Έστω $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $f_{\mathbf{u}}(1,1) = 0$. Τότε

$$f_{\mathbf{u}}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\mathbf{u} = 0 \ \Leftrightarrow\ (-1,-1)\cdot(u_1,u_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ u_1 = -u_2$$

Αφού $\mathbf{u}$ μοναδιαίο άρα

$$\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1\ ,\Rightarrow u_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{και}\ u_2=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Άρα τα διανύσματα αυτά είναι τα $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Άσκηση 8.3.7. Να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $z=f(x,y)$ σε ανοικτή περιοχή A του $(-1,1)$ με $f(-1,1)=1$ τέτοια ώστε

$$[f(x,y)]^5+xy[f(x,y)]^2+2xf(x,y)+x^2+1=0\ ,\quad \forall (x,y)\in A\ .$$

και να βρείτε την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο $(-1,1)$

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x,y,z)=z^5+xyz^2+2xz+x^2+1$. Παρατηρούμε ότι $F(-1,1,1)=0$ καθώς και ότι $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$.

$$F_x(x,y,z)=yz^2+2z+2x\ ,\quad F_y(x,y,z)=xz^2\ ,\quad F_z(x,y,z)=5z^4+2xyz+2x$$

Αφού $F(-1,1,1)=1\neq 0$ από Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει C^1 συνάρτηση $z=f(x,y)$ ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή A του $(-1,1)$ ώστε να ισχύει

$$[f(x,y)]^5+xy[f(x,y)]^2+2xf(x,y)+x^2+1=0,\quad \forall (x,y)\in A$$

με $f(-1,1)=1$ και

$$f_x(-1,1)=-\frac{F_x(-1,1,1)}{F_z(-1,1,1)}=-1\ ,\quad f_y(-1,1)=-\frac{F_y(-1,1,1)}{F_z(-1,1,1)}=1\ \Rightarrow\ \nabla f(-1,1)=(-1,1)\ .$$

Η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της $f(x,y)$ στο $(-1,1)$ δίνεται από

$$\mathbf{u}=\frac{\nabla f(-1,1)}{\|\nabla f(-1,1)\|}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ .$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Γραμμικές απεικονίσεις

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καλείται *γραμμική* αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

(i) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, και

(ii) $T(\lambda \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$,

Α΄.1 Γραμμικές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$

Ισχύει ο επόμενος χαρακτηρισμός των γραμμικών απεικονίσεων απο το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση Α΄.1.1. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Τότε η T είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$T(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \quad \textit{ή ισοδύναμα} \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$$

Απόδειξη. Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε $a_1 = T(\mathbf{e}_1), \ldots, a_n = T(\mathbf{e}_n)$ όπου $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Αν $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$, έχουμε

$$T(\mathbf{x}) = T(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n T(x_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i T(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}.$$

Αντίστροφα αν $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ τότε απο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου προκύπτει εύκολα ότι η T είναι γραμμική. □

Παράδειγμα Α΄.1.2. Η προβολή $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στην i-συντεταγμένη, $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, είναι γραμμικές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$ και γράφεται ως $\pi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}$ όπου $\mathbf{e}_i$ είναι το i-διάνυσμα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα Α΄.1.3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια μη μηδενική γραμμική συνάρτηση. Τι απεικονίζουν γεωμετρικά (α) το γράφημα της T και (β) τα ισοσταθμικά σύνολα της T;

Λύση: Απο την Πρόταση Α΄.1.1 έχουμε ότι $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ για κάποιο $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
(α) Το γράφημα της T είναι το σύνολο

$$Gr(T) = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\}$$

που αναπαριστά τον γραμμικό υποχώρο διάστασης n του $\mathbb{R}^{n+1}$ (δηλαδή ένα ***υπερεπίπεδο*** του $\mathbb{R}^{n+1}$) με εξίσωση $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = 0$.

(β) Είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο τιμών μιας μη μηδενικής γραμμικής απεικόνισης απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$. (Πράγματι έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $f(\mathbf{x}) = c_0 \neq 0$. Τότε για κάθε $c \in \mathbb{R}$, $y = T\left(\frac{c}{c_0} \cdot \mathbf{x}\right)$). Αν c είναι λοιπόν ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός τότε

$$I(T, c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c\}$$

που αναπαριστά ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ (που είναι παράλληλο προς τον γραμμικό υποχώρο διάστασης $n-1$ του $\mathbb{R}^n$ με εξίσωση $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$).

Α΄.2 Γραμμικές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την Πρόταση Α΄.1.1 για γραμμικές απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Πρόταση Α΄.2.1. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η T είναι γραμμική.

(2) Υπάρχουν $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε η T έχει την μορφή

$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}) \tag{Α΄.2.1}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (1) ⇒ (2): Έστω $T = (T_1, \ldots, T_m)$ η ανάλυση της T με $T_i = \pi_i \circ T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, όπου $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η i-προβολή του $\mathbb{R}^m$ (δείτε την απόδειξη της Πρότασης 2.1). Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει κάθε π_i είναι γραμμική συνάρτηση. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Άρα κάθε f_i είναι γραμμική συνάρτηση απο τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}$ και συνεπώς απο την Πρόταση Α΄.1.1 για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ με $T_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}$ για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

(2) ⇒ (1): Απο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}), \ldots, \mathbf{a}_m \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_m \mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} T(\lambda \mathbf{x}) &= (\mathbf{a}_1 \cdot (\lambda \mathbf{x}), \ldots, \mathbf{a}_m \cdot (\lambda \mathbf{x})) \\ &= (\lambda(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}), \ldots, \lambda(\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x})) \\ &= \lambda(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Α΄.3 Αναπαράσταση γραμμικής απεικόνισης με πίνακα.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνήθως ταυτίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ με τον πίνακα στήλη

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots x_n]^T$$

Χρησιμοποιώντας την ταύτιση των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ με πίνακες στήλες, απο την Πρόταση Α΄.2.1 παίρνουμε και την επόμενη γνωστή πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας σχετικά με τις γραμμικές απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Πρόταση Α΄.3.1. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η T είναι γραμμική.

(2) Υπάρχει $m \times n$ πίνακας A τέτοιος ώστε

(Α΄.3.1)
$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot [x_1 \dots x_n]^T.$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Απο την Πρόταση Α΄.2.1 έχουμε ότι υπάρχουν $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε η T έχει την μορφή

(Α΄.3.2)
$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x})$$

Ταυτίζοντας όπως αναφέραμε κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ με τον πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix} =$ $[y_1 \dots y_m]^T$, η (Α΄.3.2) παίρνει την μορφή

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Προκύπτει εύκολα απο τις τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων ότι αν η T έχει την μορφή της (Α΄.3.1) τότε $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ και $T(\lambda \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$. □

Πρόταση Α′.3.2. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική και έστω $A = (a_{ij})$ ο $m \times n$ πίνακας που αναπαριστά την T, δηλαδή*

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ . & ... & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \tag{Α′.3.3}$$

(1) Αν $T = (T_1, \dots, T_m)$ η ανάλυση της T σε συνιστώσες συναρτήσεις τότε για κάθε $i = 1, \dots, m$, η i-γραμμή του πίνακα A, είναι ο πίνακας που αναπαριστά την T_i, δηλαδή

$$T_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

(2) Αν $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$, η j-στήλη του A είναι η εικόνα μέσω της T του διανύσματος $\mathbf{e}_j$, δηλαδή

$$T(\mathbf{e}_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. (1) Από την (Α′.3.3) και τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε ότι

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + \dots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + \dots & +a_{2n}x_n \\ . & ... & . \\ a_{m1}x_1 & + \dots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} \tag{Α′.3.4}$$

Απο την άλλη μεριά επειδή $T = (T_1, \dots, T_m)$ έχουμε $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \dots, T_m(\mathbf{x}))$ ή σε μορφή στήλης

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} T_1(x_1, & \dots & , x_n) \\ & \dots & \\ T_m(x_1, & \dots & , x_n) \end{bmatrix} \tag{Α′.3.5}$$

Συγκρίνοντας τις (Α′.3.4) και (Α′.3.5) παίρνουμε ότι

$$T_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

(2) Όπως εύκολα ελέγχεται, ο πολλαπλασιασμός ενός $m \times n$ πίνακα A με τον $n \times 1$ πίνακα που έχει 0 σε όλες τις θέσεις εκτός απο την j-θέση όπου έχει 1, είναι η j-στήλη του A:

$$T(\mathbf{e}_j) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

□