

ΠΡΟΟΔΟΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ 14/12/2023

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 ΩΡΑ και 30'

Θέμα 1. (3,2 μον.) Επιλέξτε το σωστό συμπέρασμα στις επόμενες προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο τέτοιο ώστε κάθε $M > 1$ είναι άνω φράγμα του A . Τότε (α) $\sup A \leq 1$ (β) $\sup A = 1$ (γ) $\sup A > 1$.
- (β) Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a_{2n} \cdot a_{3n} \rightarrow \frac{9}{16}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε (α) $a_n \rightarrow -\frac{3}{4}$ (β) $a_n \rightarrow \frac{3}{4}$ (γ) Δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το ποιο είναι το όριο της (a_n) .
- (γ) Έστω (a_n) ακολουθία στο $[0, 1]$. Τότε (α) η (a_n) είναι συγκλίνουσα (β) η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (γ) η (a_n) μπορεί και να μην έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (δ) Έστω $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε (α) όλα τα $x_0 \in \mathbb{Z}$ είναι σημεία ασυνέχειας της f (β) όλα τα $x_0 \in \mathbb{Z}$ είναι σημεία συνέχειας της f (γ) γενικά υπάρχουν και σημεία συνέχειας και σημεία ασυνέχειας της f .

Απάντηση:

- (α) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (α). Ένας τρόπος να το εξηγήσουμε αυτό είναι να αποκλείσουμε την περίπτωση $\sup A > 1$. Πράγματι, αν $\sup A > 1$ τότε κάθε $M \in (1, \sup A)$, παρόλο που είναι γνήσια μεγαλύτερο του 1 δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα του A ως γνήσια μικρότερο του $\sup A$. Επίσης δεν ισχύει αναγκαστικά ότι $\sup A = 1$. Για παράδειγμα το σύνολο $A = (-\infty, \frac{1}{2})$ ικανοποιεί την υπόθεση ότι κάθε $M > 1$ είναι άνω φράγμα του A αλλά $\sup A = \frac{1}{2}$.
- (β) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (β). Πράγματι, έστω $a = \lim a_n$. Τότε $\lim a_{2n} = \lim a_{3n} = a$ επειδή οι ακολουθίες (a_{2n}) και (a_{3n}) είναι υπακολουθίες της (a_n) και άρα συγκλίνουν στο ίδιο όριο με την (a_n) . Από αλγεβρικές ιδιότητες ορίων έχουμε $\lim (a_{2n} \cdot a_{3n}) = \lim a_{2n} \cdot \lim a_{3n} = a^2$ και άρα $a^2 = 9/16$. Συνεπώς $a = \pm 3/4$. Επειδή $a_n > 0$ έπεται ότι $a = \lim a_n \geq 0$ και τελικά $a = 3/4$.

- (γ) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (β) και αυτό προκύπτει από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass που λέει ότι *κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υποακολουθία*.
- (δ) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (β). Πράγματι, γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματική συνάρτηση είναι συνεχής στα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Εποειδή κάθε σημείο του $\mathbb{Z}$ είναι απομονωμένο του σημείου (διότι για $\delta = 1/2$ έχουμε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Z} = \{x_0\}$) έπεται ότι οποιαδήποτε $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Θέμα 2. (α) (1 μον.) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και άνω φραγμένα. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Κάθε άνω φράγμα του B είναι και άνω φράγμα του A .

(ii) $\sup A \leq \sup B$.

(β) (1,5 μον.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία στοιχείων του A που συγκλίνει στο $\sup A$.

(γ) (1,5 μον.) Έστω $a_1 > 0$ και $a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

Απάντηση:

(α) (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι κάθε άνω φράγμα του B είναι και άνω φράγμα του A . Άρα το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A . Οπότε $\sup A \leq \sup B$ διότι το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι $\sup A \leq \sup B$. Έστω M άνω φράγμα του B . Τότε $\sup B \leq M$ διότι το $\sup B$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του B . Άρα $\sup A \leq \sup B \leq M$ οπότε $\sup A \leq M$. Επειδή $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$ έπεται ότι $a \leq M$ για κάθε $a \in A$ και άρα το M είναι άνω φράγμα του A .

(β) Έστω $s = \sup A$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup A$, έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ με

$$s - \epsilon < a \leq s$$

Άρα για $\epsilon = 1$ υπάρχει $a_1 \in A$ με $s - 1 < a_1 \leq s$. Ομοίως για $\epsilon = 1/2$ υπάρχει $a_2 \in A$ με $s - 1/2 < a_2 \leq s$, για $\epsilon = 1/3$ υπάρχει $a_3 \in A$ με $s - 1/3 < a_3 \leq s$ κ.ο.κ.

Με τον τρόπο αυτόν κατασκευάζουμε μια ακολουθία (a_n) στο A με την ιδιότητα

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $a_n \rightarrow s$.

(γ) Εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι $a_n > 0$ και άρα η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα αφού $a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n} < \frac{a_n}{3} < a_n$. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη (από το μηδέν), είναι συγκλίνουσα. Έστω $a = \lim a_n$. Επειδή η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) έχουμε

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n}{3 + a_n} = \frac{a}{3 + a}$$

Άρα $3a + a^2 = a \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a + 2) = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $a = -2$. Επειδή $a_n > 0 \Rightarrow a = \lim a_n \geq 0$ οπότε $a = 0$.

Θέμα 3. (α) (1,5 μον.) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι παντού ασυνεχής (να αποδείξετε πλήρως τους ισχυρισμούς σας).

(β) (2 μον.) Έστω $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ συνεχής και αύξουσα συνάρτηση. Έστω $x_0 \in [a, b]$ και έστω ότι $x_0 < f(x_0)$. Θέτουμε $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... και γενικά $x_n = f(x_{n-1})$, για κάθε $n \geq 1$. Δείξτε τα εξής.

(i) Η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε ένα σημείο $\xi_0 \in [a, b]$.

(ii) Το ξ_0 είναι σταθερό σημείο της f δηλαδή $f(\xi_0) = \xi_0$.

Απάντηση: (α) Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η γνωστή συνάρτηση Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Η f είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο. Πράγματι, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την Πυκνότητα ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία (x_n)

από ρητούς και μια ακολουθία (x'_n) από άρρητους με $\lim x_n = \lim x'_n = x_0$. Είναι $f(x_n) = 1$ και $f(x'_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim f(x'_n)$. Συνεπώς από την Αρχή Μεταφοράς η f είναι ασυνεχής στο x_0 . Επειδή το x_0 ήταν ένα τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$ έχουμε ότι η f είναι παντού ασυνεχής.

(β) (i) Έχουμε $x_0 < x_1$ και γενικά αν $x_{n-1} \leq x_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε $f(x_{n-1}) \leq f(x_n)$ (αφού f αύξουσα) και άρα $x_n \leq x_{n+1}$. Συνεπώς η (x_n) είναι αύξουσα. Επιπλέον $f(x) \in [a, b]$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα $x_n \in [a, b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (x_n) είναι μονότονη και φραγμένη ακολουθία και συνεπώς είναι συγκλίνουσα σε κάποιο $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή $a \leq x_n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $a \leq \lim x_n \leq b$. Άρα $x_n \rightarrow \xi_0$ με $\xi_0 \in [a, b]$.

(ii) Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim x_n = \xi_0$, από Αρχή Μεταφοράς έχουμε

$$\lim f(x_n) = f(\xi_0)$$

Αλλά $f(x_n) = x_{n+1}$ και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\lim x_{n+1} = f(\xi_0)$$

Όμως η (x_{n+1}) είναι υπακολουθία της (x_n) και άρα θα πρέπει

$$\lim x_{n+1} = \xi_0$$

και συνεπώς από μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι

$$\xi_0 = f(\xi_0)$$