Κεφάλαιο 2
Μαθηματική Επαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μια μέθοδο για να αποδεικνύουμε θεωρήματα, η οποία ονομάζεται *μαθηματική επαγωγή*. Στοχεύοντας στην εξοικειώση με την μέθοδο θα παραθέσουμε αρκετά παραδείγματα αποδείξεων που την χρησιμοποιούν. Η μαθηματική επαγωγή ωστόσο είναι κατά βάση μια διατύπωση για σύνολα φυσικών αριθμών. Χρησιμοποιούμε άτυπα τη λέξη *σύνολο* και εννοούμε κάθε συλλογή αντικειμένων, όπου κάθε «αντικείμενο» ονομάζεται *στοιχείο* του συνόλου. (Για περισσότερα σχετικά με τα σύνολα, βλέπε Κεφάλαιο 10.) Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Η Μαθηματική Επαγωγή παρέχει μια εναλλακτική περιγραφή αυτού του συνόλου.

2.1 Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Το πρώτο παράδειγμα με το οποίο συνήθως εξηγείται η μαθηματική επαγωγή είναι το ακόλουθο. Υποθέτουμε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, θέλουμε να αποδείξουμε την ισχύ του ακόλουθου τύπου για το άθροισμα των πρώτων n φυσικών αριθμών:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει για κάθε n είναι ο ακόλουθος. Πρώτον, ο τύπος ισχύει για $n = 1$, γιατί τότε το αριστερό μέλος είναι απλά 1 και το δεξί μέλος είναι $\frac{1\cdot(1+1)}{2}$, που ισούται με 1. Για να αποδείξουμε ότι ο τύπος ισχύει για κάθε n, θα εξασφαλίσουμε ότι αν ο τύπος ισχύει για έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό, τότε θα ισχύει και για τον επόμενο φυσικό αριθμό. Με άλλα λόγια, θα αποδείξουμε ότι αν ο τύπος ισχύει για $n = k$, τότε ισχύει και για $n = k + 1$. (Αυτό το πέρασμα από το k στο $k + 1$ ονομάζεται συχνά «επαγωγικό βήμα».) Αν αποδείξουμε αυτό το γεγονός, τότε, αφού γνωρίζουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n = 1$, έπεται ότι ισχύει και για τον επόμενο φυσικό αριθμό, τον 2. Στη συνέχεια, αφού ισχύει για $n = 2$, θα ισχύει και για τον φυσικό αριθμό που έπεται του 2, που είναι ο 3. Αφού ισχύει για τον 3, θα ισχύει για τον 4, και στη συνέχεια για τον 5, τον 6, και ούτω καθεξής. Επομένως, συνάγουμε ότι ο τύπος ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

Επομένως, για να αποδείξουμε τον γενικό τύπο, πρέπει να δείξουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n = k + 1$ οποτεδήποτε ισχύει για $n = k$. Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, όπου k είναι ένας δεδομένος φυσικός αριθμός. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

Θέλουμε τώρα από την παραπάνω ισότητα να εξάγουμε τον τύπο για $n = k + 1$. Θα το κάνουμε αυτό ως εξής. Υποθέτοντας τον παραπάνω τύπο, προσθέτουμε $k + 1$ και στα δύο μέλη οπότε παίρνουμε

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)$$

Θα δούμε ότι ένας μικρός αλγεβρικός χειρισμός του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης, θα παράξει τον ζητούμενο τύπο για $n = k + 1$. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{2(k + 1)}{2} \\
&= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} \\
&= \frac{(k + 2)(k + 1)}{2} \\
&= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \\
&= \frac{(k + 1)\big((k + 1) + 1\big)}{2}
\end{aligned}$$

Επομένως, $1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) + k + (k + 1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$. Αυτή η ισότητα είναι ίδια με αυτή που θα παίρναμε από τον τύπο, αν θέταμε όπου n τον $k + 1$. Επομένως έχουμε αποδείξει το επαγωγικό βήμα, οπότε συμπεραίνουμε ότι ο τύπος ισχύει για κάθε n.

Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, η οποία χρησιμοποιήθηκε σιωπηρά στην παραπάνω απόδειξη, είναι στην πραγματικότητα μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Υποθέτουμε ότι ένα σύνολο S φυσικών αριθμών έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

Α. *Ο αριθμός 1 ανήκει στο S.*

Β. *Οποτεδήποτε ένας φυσικός αριθμός ανήκει στο S, ο επόμενος φυσικός αριθμός ανήκει επίσης στο S.*

Η δεύτερη ιδιότητα μπορεί να διατυπωθεί λίγο αυστηρότερα: Αν k είναι ένας φυσικός αριθμός και ο k ανήκει στο S, τότε ο $k+1$ ανήκει στο S.

Τι μπορούμε να πούμε για ένα σύνολο S που έχει τις δύο αυτές ιδιότητες; Αφού ο 1 ανήκει στο S (από την ιδιότητα Α), έπεται από την ιδιότητα Β ότι ο 2 ανήκει στο S. Αφού ο 2 ανήκει στο S, έπεται από την ιδιότητα Β ότι ο 3 ανήκει στο S. Αφού ο 3 ανήκει στο S, ο 4 ανήκει στο S. Τότε ο 5 είναι στο S, ο 6 είναι στο S, ο 7 είναι στο S και ούτω καθεξής. Μοιάζει φανερό ότι το S πρέπει να περιέχει κάθε φυσικό αριθμό. Δηλαδή, το μοναδικό σύνολο φυσικών αριθμών με τις παραπάνω δύο ιδιότητες είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών. Διατυπώνουμε το παραπάνω τυπικά:

Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής 2.1.1. *Αν S είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο φυσικών αριθμών με τις ιδιότητες*

Α. Ο 1 ανήκει στο S και
Β. ο $k+1$ ανήκει στο S, οποτεδήποτε ο k είναι ένας αριθμός στο S,

τότε το S το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

Το επειχήρημα παραπάνω αποτελεί μία ένδειξη γιατί η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής είναι αληθής. Μία πιο αυστηρή απόδειξη μπορεί να βασιστεί στο ακόλουθο περισσότερο προφανές γεγονός, το οποίο υποθέτουμε ως αξίωμα.

Η Αρχή της Καλής Διάταξης 2.1.2. *Κάθε σύνολο φυσικών αριθμών που περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο περιέχει ελάχιστο στοιχείο.*

Μπορούμε να αποδείξουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής από την Αρχή της Καλής Διάταξης ως εξής. Υποθέτουμε ότι η Αρχή της Καλής Διάταξης ισχύει για όλα τα σύνολα φυσικών αριθμών. Έστω S ένα τυχόν σύνολο φυσικών αριθμών και υποθέτουμε ότι το S έχει τις ιδιότητες Α και Β της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής. Για να αποδείξουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, πρέπει να αποδείξουμε ότι το μοναδικό τέτοιο σύνολο S είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών. Αυτό θα γίνει δείχνοντας ότι είναι αδύνατο να υπάρχει φυσικός αριθμός ο οποίος να μην ανήκει στο S. Υποθέτουμε ότι το S δεν περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς. Τότε, ας συμβολίσουμε με T το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που δεν ανήκουν στο S. Η υπόθεση ότι το S δεν είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι το T έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο. Σε αυτή την περίπτωση, από την αρχή της καλής διάταξης συνεπάγεται ότι το T θα έχει ελάχιστο στοιχείο. Θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο.

Υποθέτουμε ότι το t είναι το ελάχιστο στοιχείο του T. Αφού ο 1 είναι στο S, ο 1 δεν είναι στο T. Επομένως ο t είναι μεγαλύτερος του 1. Έπεται ότι ο $t-1$ είναι φυσικός αριθμός. Αφού ο $t-1$ είναι μικρότερος από τον ελάχιστο αριθμό του T, που είναι ο t, ο $t-1$ δεν μπορεί να ανήκει στο T. Αφού το σύνολο T περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που δεν είναι στο S, συνεπάγεται ότι ο $t-1$ είναι στο S. Αυτό, όμως, οδηγεί στην ακόλουθη αντίφαση. Αφού το S έχει την ιδιότητα Β, ο $(t-1)+1$ πρέπει να είναι επίσης στο S. Αλλά αυτός είναι ο t, ο οποίος είναι στο T και επομένως όχι στο S. Συμπεραίνουμε πως η υπόθεση ότι υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του T δεν είναι συνεπής με τις ιδιότητες του S. Επομένως, δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του T και άρα, από την καλή διάταξη, δεν υπάρχει στοιχείο στο T. Αυτό αποδεικνύει ότι το S είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζουμε σε παραδείγματα την παραπάνω αρχή, όπως σε αυτό που είδαμε παραπάνω, είναι θέτοντας S να είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών για το οποίο ισχύει ο τύπος. Τότε, το σύνολο S είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, αν και μόνο αν, ο τύπος ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

Υπάρχουν πολύ παρόμοιες αποδείξεις για παρεμφερείς τύπους.

Θεώρημα 2.1.3. *Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει*

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Απόδειξη. Έστω S το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών για τους οποίους ισχύει ο τύπος. Θα αποδείξουμε ότι το S περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς, δείχνοντας ότι το S έχει τις ιδιότητες Α και Β.

Για την ιδιότητα Α, έχουμε να ελέγξουμε ότι $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$. Αυτό ισχύει, επομένως το S ικανοποιεί την ιδιότητα Α. Για να επαληθεύσουμε την ιδιότητα Β, έστω ότι ο k ανήκει στο S. Πρέπει να δείξουμε ότι ο $k+1$ ανήκει στο S. Αφού ο k ανήκει στο S, ο τύπος ισχύει για k, δηλαδή:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ισότητα, μπορούμε να αποδείξουμε την αντίστοιχη για $k+1$ ως εξής. Προσθέτοντας $(k+1)^2$ και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, παίρνουμε

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

Τώρα, κάνουμε κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς στο δεξί μέλος για να δούμε ότι όντως είναι αυτό που θέλουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)\Big(k(2k+1) + 6(k+1)\Big)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\Big((2k^2+k) + (6k+6)\Big)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ισότητα είναι ο τύπος στην περίπτωση που $n = k+1$, οπότε ο $k+1$ ανήκει στο S. Επομένως, από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το S είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών. $\square$

Ενίοτε θέλουμε να αποδείξουμε μισ πρόταση με επαγωγή, που όμως δεν είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς, αλλά μόνο για αυτούς που είναι μεγαλύτεροι από έναν δοσμένο φυσικό αριθμό. Μία ελαφρώς γενικότερη αρχή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η ακόλουθη.

Η Γενικευμένη Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής 2.1.4. *Έστω m ένας φυσικός αριθμός και S ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις ιδιότητες*

A. Το m ανήκει S και
B. το $k+1$ ανήκει στο S, οποτεδήποτε ο k είναι στο S και είναι μεγαλύτερος ή ίσος του m.

Τότε το S περιέχει κάθε φυσικό αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του m.

Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής είναι ειδική περίπτωση της γενικευμένης αρχής για $m = 1$. Σύμφωνα με την γενικευμένη αρχή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ξεκινώντας από έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό, όχι μόνο τον 1.

Για παράδειγμα, θέτουμε το ερώτημα: Ποιος είναι μεγαλύτερος; Ο $n!$ ή ο 2^n; (Υπενθυμίζουμε ότι ο $n!$ είναι το γινόμενο των φυσικών αριθμών από τον 1 έως τον n.) Για $n = 1$, 2 και 3, βλέπουμε ότι

$$1! = 1 < 2^1 = 2$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2 < 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 < 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Αλλά όταν $n = 4$, η ανισότητα αντιστρέφεται, αφού

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Όταν $n = 5$,

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 > 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Αν το σκεφτούμε για λίγο, είναι ξεκάθαρο γιατί ο $n!$ είναι πολύ μεγαλύτερος του 2^n. Και στις δύο εκφράσεις, πολλαπλασιάζουμε n αριθμούς, αλλά για τον 2^n πολλαπλασιάζουμε μόνο με το 2, ενώ οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε για να χτίσουμε το $n!$ γίνονται όλο και μεγαλύτεροι. Ενώ δεν είναι αληθές ότι $n! > 2^n$ για κάθε φυσικό αριθμό (αφού δεν ισχύει όταν ο n είναι 1, 2 ή 3), μπορούμε, όπως θα δείξουμε αμέσως παρακάτω, να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική μορφή της μαθηματικής επαγωγής για να αποδείξουμε ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 4.

Θεώρημα 2.1.5. *Ισχύει ότι* $n! > 2^n$ *για* $n \geq 4$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την Γενικευμένη Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής με $m = 4$. Έστω S το σύνολο των φυσικών αριθμών για τους οποίους το θεώρημα είναι αληθές. Όπως είδαμε παραπάνω, $4! > 2^4$. Επομένως, ο 4 ανήκει στο S. Συνεπώς, η ιδιότητα A ικανοποιείται. Για την ιδιότητα B, υποθέτουμε ότι $k \geq 4$ και ότι ο k ανήκει στο S, δηλαδή $k! > 2^k$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $(k+1)! > 2^{k+1}$. Πολλαπλασιάζοντας με $k+1$ και τα δύο μέλη της ανισότητας, που έχουμε υποθέσει ότι ισχύει για k, παίρνουμε

$$(k+1)(k!) > (k+1) \cdot 2^k$$

Το αριστερό μέλος είναι ίσο με $(k+1)!$. Επομένως έχουμε την ανισότητα

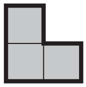
$$(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k$$

Αφού $k \geq 4$, ισχύει ότι $k+1 > 2$. Επομένως, το δεξί μέλος της ανισότητας, το $(k+1) \cdot 2^k$, είναι μεγαλύτερο από το $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Συνδυάζοντας αυτή με την παραπάνω ανισότητα, παίρνουμε

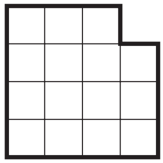
$$(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k > 2^{k+1}$$

Συνεπώς, ο $k+1$ ανήκει στο S, που επαληθεύει την ιδιότητα B. Από την Γενικευμένη Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το S περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς $n \geq 4$. □

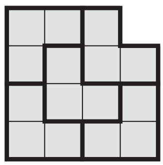
Το ακόλουθο είναι ένα παράδειγμα όπου η μαθηματική επαγωγή είναι χρήσιμη για την απόδειξη ενός γεωμετρικού αποτελέσματος. Θα χρησιμοποιήσουμε την λέξη «τριόμινο» για να περιγράψουμε ένα αντικείμενο σχήματος L, που αποτελείται από τρία τετράγωνα ίδιου μεγέθους. Με άλλα λόγια, ένα τριόμινο έχει τη μορφή:
Ένας άλλος τρόπος για να σκεπτόμαστε ένα τριόμινο είναι ότι πρόκειται για το γεωμετρικό σχήμα που προκύπτει παίρνοντας ένα τετράγωνο που αποτελείται από τέσσερα μικρότερα τετράγωνα και αφαιρώντας ένα από τα μικρότερα τετράγωνα.



Θα εξετάσουμε ποια γεωμετρικά σχήματα μπορούν να καλυφθούν με τριόμινο που έχουν ίδιο μέγεθος και δεν αλληλοεπικαλύπτονται. Το πρώτο παράδειγμα αφορά ένα τετράγωνο αποτελούμενο από 16 μικρότερα τετράγωνα (δηλαδή, ένα τετράγωνο που είναι 4 επί 4) στο οποίο αφαιρούμε ένα μικρό τετράγωνο από τα γωνιακά:



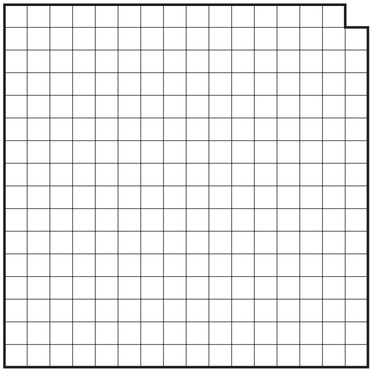
Είναι δυνατόν να καλυφθεί με μη αλληλοεπικαλυπτόμενα τριόμινο (καθένα από τα οποία αποτελείται από τρία μικρά τετράγωνα ίδιου μεγέθους με των μικρών τετραγώνων του σχήματος) το σχήμα που απέμεινε; Μπορεί:



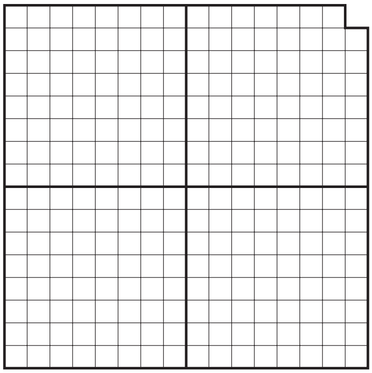
Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή για να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.1.6. *Για κάθε φυσικό αριθμό n, θεωρούμε ένα τετράγωνο που αποτελείται από 2^{2n} μικρότερα τετράγωνα. (Με άλλα λόγια, ένα $2^n \times 2^n$ τετράγωνο.) Αν αφαιρεθεί ένα από τα μικρότερα γωνιακά τετράγωνα, τότε το σχήμα που προκύπτει μπορεί να καλυφθεί πλήρως από μη επικαλυπτόμενα τριόμινο (αποτελούμενα από τρία μικρά τετράγωνα ίδιου μεγέθους με των μικρών τετραγώνων του σχήματος).*

Απόδειξη. Για να κάνουμε την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή, παρατηρούμε πρώτα ότι το θεώρημα ισχύει προφανώς για $n = 1$· το σχήμα που δημιουργείται όταν αφαιρέσουμε ένα μικρό γωνιακό τετράγωνο είναι τριόμινο, άρα μπορεί να καλυφθεί με ένα τριόμινο. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $n = k$. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι αν ένα μικρό γωνιακό τετράγωνο αφαιρεθεί από οποιοδήποτε $2^k \times 2^k$ τετράγωνο που αποτελείται από 2^{2k} μικρότερα τετράγωνα, τότε το σχήμα που δημιουργείται μπορεί να καλυφθεί με τριόμινο. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για $n = k+1$. Πράγματι, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ τετράγωνο και αφαιρούμε ένα γωνιακό τετράγωνο για να πάρουμε το ακόλουθο σχήμα:

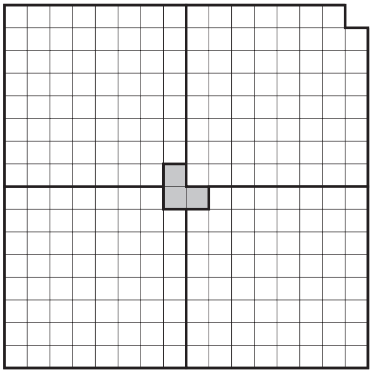


Το σχήμα αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε τέσσερα «μεσαίου μεγέθους» τετράγωνα, τρία από τα οποία είναι $2^k \times 2^k$ και ένα που είναι $2^k \times 2^k$ με ένα γωνιακό τετράγωνο να έχει αφαιρεθεί, ως εξής:



Τώρα, τοποθετούμε ένα τριόμινο στο μέσον της περιοχής, όπως φαίνεται παρακάτω.

Εξαιτίας του τριόμινο στο μέσον, τα τέσσερα «μεσαίου μεγέθους» τετράγωνα που απομένει να καλυφθούν έχουν ένα γωνιακό τετράγωνο καλυμμένο ή αφαιρημένο. Από την επαγωγική υπόθεση, τα υπόλοιπα από καθένα από τα τέσσερα «μεσαίου μεγέθους» τετράγωνα



μπορούν να καλυφθούν με τριόμινο. Αυτό οδηγεί σε μία κάλυψη ολόκληρου του $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ τετραγώνου, οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. $\square$

2.2 Η Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής

Είναι συχνά πολύ χρήσιμη μία παραλλαγή της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής. Η βάση για αυτή την παραλλαγή είναι ένας λίγο διαφορετικός χαρακτηρισμός του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών.

Η Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής 2.2.1. *Έστω S ένα σύνολο με στοιχεία φυσικούς αριθμούς που ικανοποιεί τις ιδιότητες*

Α. Ο 1 ανήκει στο S και

Β. αν ο k είναι ένας φυσικός αριθμός και όλοι οι φυσικοί αριθμοί από 1 μέχρι k ανήκουν στο S, συνεπάγεται ότι ο $k+1$ ανήκει στο S.

Τότε το S είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

Οι αυστηρές και μη αυστηρές αποδείξεις της Αρχής της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής είναι ουσιαστικά ίδιες με τις αποδείξεις της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής. Πρώτα θα δούμε την μη αυστηρή απόδειξη. Αν S είναι τυχόν σύνολο, με στοιχεία φυσικούς αριθμούς, και ικανοποιεί τις ιδιότητες Α και Β της Αρχής της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής, τότε το 1 ανήκει στο S. Αφού το 1 ανήκει στο S, έπεται από την ιδιότητα Β ότι το 2 ανήκει στο S. Αφού τα 1 και 2 ανήκουν στο S, έπεται από την ιδιότητα Β ότι το 3 ανήκει στο S. Αφού τα 1, 2, 3 ανήκουν στο S, το 4 ανήκει στο S και ούτω καθεξής. Προτείνουμε να γράψετε τις λεπτομέρειες της αυστηρής απόδειξης της Αρχής της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής χρησιμοποιώντας την Αρχή της Καλής Διάταξης.

Όπως συμβαίνει και με την κλασική εκδοχή της επαγωγής, η Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής μπορεί να γενικευθεί ξεκινώντας από οποιονδήποτε φυσικό αριθμό, όχι μόνο τον 1.

Η Γενικευμένη Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής 2.2.2. *Έστω m ένας φυσικός αριθμός και S ένα σύνολο με στοιχεία φυσικούς αριθμούς που ικανοποιεί τις ιδιότητες*

A. Ο m ανήκει στο S και

B. αν ο k είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του m και όλοι οι φυσικοί αριθμοί από τον m μέχρι τον k ανήκουν στο S, συνεπάγεται ότι ο $k+1$ ανήκει στο S.

Τότε το S περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του m.

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις στις οποίες είναι δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε απευθείας την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, αλλά είναι εύκολο να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η λεπτομερής απόδειξη του λήμματος (Λήμμα 1.1.4), το οποίο χρειάστηκε για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός.

Λήμμα 2.2.3. *Κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 έχει έναν πρώτο διαιρέτη.*

Η ακόλουθη διατύπωση συνεπάγεται το παραπάνω λήμμα. Σημειώνουμε ότι κάνουμε τη σύμβαση ότι κάθε πρώτος αριθμός είναι «γινόμενο πρώτων», όπου το γινόμενο έχει μόνο έναν παράγοντα.

Θεώρημα 2.2.4. *Κάθε φυσικός αριθμός, εκτός του 1, είναι γινόμενο πρώτων αριθμών.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αυτό το θεώρημα χρησιμοποιώντας την Γενικευμένη Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής επαγωγής, ξεκινώντας από τον αριθμό 2. Έστω S το σύνολο όλων των αριθμών n που είναι γινόμενα πρώτων. Είναι φανερό ότι ο 2 ανήκει στο S, αφού ο 2 είναι πρώτος. Υποθέτουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός από το 2 μέχρι το k ανήκει στο S. Για να χρησιμοποιήσουμε την Γενικευμένη Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής, πρέπει να αποδείξουμε ότι ο $k+1$ ανήκει στο S.

Ο αριθμός $k+1$ δεν μπορεί να είναι ο 1. Πρέπει επομένως να αποδείξουμε ότι είτε είναι πρώτος ή είναι γινόμενο πρώτων. Αν ο $k+1$ είναι πρώτος, έχουμε το ζητούμενο. Αν ο $k+1$ δεν είναι πρώτος, τότε $k+1 = xy$ όπου καθένας από τους x και y είναι φυσικός αριθμός γνήσια μεταξύ του 1 και του $k+1$. Επομένως οι x και y είναι και οι δύο το πολύ k, άρα, από την επαγωγική υπόθεση, οι x και y ανήκουν στο S. Αυτό σημαίνει ότι καθένας από τους x και y είναι είτε πρώτος ή γινόμενο πρώτων. Συνεπώς, ο xy μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων, γράφοντας το γινόμενο των πρώτων που συνθέτουν τον x (ή τον ίδιο τον x αν ο x είναι πρώτος) επί το γινόμενο των πρώτων που συνθέτουν τον y (ή τον ίδιο τον

y αν ο y είναι πρώτος). Επομένως, από την Γενικευμένη Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής, ξεκινώντας από τον αριθμό 2, το S περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2. □

Τώρα, θα περιγράψουμε ένα ενδιαφέρον θεώρημα που είναι λίγο δυσκολότερο στην κατανόηση. (Αν αυτό το θεώρημα σας φανεί πολύ δύσκολο, μπορείτε να το προσπεράσετε, καθώς δεν θα χρησιμοποιηθεί κάπου στη συνέχεια. Θα μπορούσατε να επιστρέψετε σε αυτό κάποια στιγμή αργότερα.)

Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας την περίπτωση $n = 5$. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία στοίβα με 5 πέτρες. Θα θεωρήσουμε το άθροισμα μιας ακολουθίας αριθμών που προκύπτει ως εξής. Ξεκινούμε διαιρώντας τη στοίβα σε δύο μικρότερες, μία στοίβα με 3 πέτρες και μία στοίβα με 2 πέτρες. Ορίζουμε τον πρώτο όρο του αθροίσματος να είναι ο $3 \cdot 2 = 6$. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία με τη στοίβα που έχει 3 πέτρες: την διαιρούμε σε μία στοίβα με δύο πέτρες και σε μία στοίβα που αποτελείται από 1 πέτρα και προσθέτουμε $2 \cdot 1 = 2$ στο άθροισμα. Η στοίβα με τις 2 πέτρες μπορεί να διαιρεθεί σε 2 στοίβες που η καθεμία έχει 1 πέτρα. Προσθέτουμε $1 \cdot 1 = 1$ στο άθροισμα. Τώρα, επιστρέφουμε στη στοίβα με τις 2 πέτρες που προέκυψε από την πρώτη διαίρεση. Αυτή η στοίβα μπορεί να διαιρεθεί σε δύο στοίβες που η καθεμία έχει 1 πέτρα και έτσι προσθέτουμε $1 \cdot 1 = 1$ στο άθροισμα. Το συνολικό άθροισμα είναι 10.

Ας δημιουργήσουμε ένα άλλο άθροισμα με παρόμοια λογική αλλά ξεκινώντας διαφορετικά. Διαιρούμε την αρχική στοίβα, που έχει 5 πέτρες, σε μία στοίβα με 4 πέτρες και σε μία στοίβα με 1 πέτρα. Ο πρώτος όρος του αθροίσματος θα $4 \cdot 1 = 4$. Διαιρούμε τη στοίβα με τις 4 πέτρες σε δύο στοίβες στοίβες με 2 πέτρες η καθεμία και προσθέτουμε $2 \cdot 2 = 4$ στο άθροισμα. Η πρώτη στοίβα με τις 2 πέτρες μπορεί να διαιρεθεί σε δύο στοίβες από 1 πέτρα η καθεμία, άρα προσθέτουμε $1 \cdot 1 = 1$ στο άθροισμα. Ομοίως, διαιρούμε τη δεύτερη στοίβα που είχε 2 πέτρες σε δύο στοίβες από 1 πέτρα η καθεμία και προσθέτουμε $1 \cdot 1 = 1$ στο άθροισμα. Το άθροισμα που παίρνουμε με αυτό τον τρόπο είναι επίσης 10.

Είναι τυχαίο ότι βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα, 10, για τα αθροίσματα που πήραμε με δύο διαφορετικούς τρόπους;

Θεώρημα 2.2.5. *Για τυχόντα φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του 1, θεωρούμε μια στοίβα με n πέτρες. Δημιουργούμε ένα άθροισμα ως εξής: Διαιρούμε την δοθείσα στοίβα σε δύο μικρότερες. Ορίζουμε τον πρώτο όρο του αθροίσματος να είναι το γινόμενο του πλήθους των στοιχείων που έχει καθεμία από τις δύο νέες στοίβες. Στη συνέχεια επιλέγουμε μία από τις δύο αυτές στοίβες και τη διαιρούμε σε δύο μικρότερες (εκτός αν περιέχει μόνο μία πέτρα) και ορίζουμε τον δεύτερο όρο του αθροίσματος να είναι το γινόμενο του πλήθους στοιχείων σε αυτές τις στοίβες. Κάνουμε το ίδιο και για την άλλη μικρότερη στοίβα. Συνεχίζουμε διαιρώντας τις στοίβες, πολλαπλασιάζοντας το πλήθος των στοιχείων τους και προσθέτοντας όρους στο άθροισμα με όλους τους δυνατούς τρόπους. Ανεξαρτήτως της ακολουθίας των διαιρέσεων σε υποστοίβες, το συνολικό άθροισμα είναι $n(n-1)/2$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αυτό το θεώρημα χρησιμοποιώντας την Γενικευμένη Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής, ξεκινώντας από το $n = 2$. Δοθείσης στήλης με 2 πέτρες, υπάρχει μόνο ένας τρόπος να την διαιρέσουμε σε δύο στοίβες από 1 πέτρα η καθεμία. Αφού $1 \cdot 1 = 1$, το άθροισμα είναι ίσο με 1 σε αυτή την περίπτωση. Παρατηρούμε ότι $1 = 2(2-1)/2$, επομένως ο τύπος ισχύει για $n = 2$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο τύπος ισχύει για όλα τα $n = 2, 3, 4, \ldots, k$. Θεωρούμε μια στοίβα με $k + 1$ πέτρες και παρατηρούμε ότι ο $k + 1$ είναι τουλάχιστον 3. Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία διαιρέσεων, το τελικό άθροισμα θα είναι $(k + 1)(k + 1 - 1)/2 = k(k + 1)/2$.

Ξεκινάμε με μία οποιαδήποτε διαίρεση της στοίβας σε δύο υποστοίβες και ονομάζουμε x και y το πλήθος από τις πέτρες στις δύο υποστοίβες, αντίστοιχα. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που $x = 1$. Τότε ο πρώτος όρος του αθροίσματος θα είναι $1 \cdot y = y$. Αφού $x = 1$ και $x + y = k + 1$, ξέρουμε ότι $y = k$. Η διαδικασία συνεχίζεται διαιρώντας τη στοίβα που έχει y πέτρες. Από την επαγωγική υπόθεση (αφού $y = k$, που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2), το άθροισμα που προκύπτει, ολοκληρώνοντας τη διαδικασία στη στοίβα με τις y πέτρες, είναι $y(y - 1)/2$. Επομένως, το συνολικό άθροισμα της αρχικής στοίβας, με $k + 1$ πέτρες, σε αυτή την περίπτωση είναι

$$y + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{2y + (y^2 - y)}{2} = \frac{y^2 + y}{2} = \frac{y(y+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Αν $y = 1$, μπορούμε να κάνουμε την ίδια απόδειξη, εναλλάσσοντας απλά τους ρόλους των x και y στην προηγούμενη παράγραφο.

Η τελευταία και πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν ούτε ο x ούτε ο y είναι ίσοι με 1. Σε αυτή την περίπτωση, ο x και ο y είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2 και μικρότεροι του k. Τότε, ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι xy. Συνεχίζοντας τη διαδικασία θα πάρουμε τελικά ένα άθροισμα που ισούται με xy συν το άθροισμα για τη στοίβα που έχει x πέτρες, συν το άθροισμα για τη στοίβα με y πέτρες. Επομένως, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, το άθροισμα για την αρχική στοίβα με $k + 1$ πέτρες θα είναι $xy + x(x-1)/2 + y(y-1)/2$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτό το άθροισμα είναι ίσο με $k(k + 1)/2$.

Υπενθυμίζουμε ότι $k + 1 = x + y$, άρα $x = k + 1 - y$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία γράφουμε

$$
\begin{aligned}
xy + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} \\
&= \frac{2(k+1-y)y}{2} + \frac{(k+1-y)(k-y)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} \\
&= \frac{2ky+2y-2y^2}{2} + \frac{k^2+k-ky-ky-y+y^2}{2} + \frac{y^2-y}{2} \\
&= \frac{k^2+k}{2} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}
$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Τα Μαθηματικά είναι η πιο ακριβής επιστήμη. Ωστόσο, οι άνθρωποι δεν είναι τόσο ακριβείς· πρέπει να είναι προσεκτικοί ώστε να μην κάνουν λάθη. Δείτε αν μπορείτε να καταλάβετε γιατί είναι προβληματική η «απόδειξη» της ακόλουθης ψευδούς πρότασης.

Ψευδές Αποτέλεσμα. Όλοι οι άνθρωποι έχουν την ίδια ηλικία.

«Απόδειξη». Το ακόλουθο επιχείρημα μοιάζει με πρώτη ματιά να είναι μία απόδειξη της παραπάνω πρότασης. Ξεκινάμε αναδιατυπώνοντάς την ως εξής: Για κάθε φυσικό αριθμό n, κάθε σύνολο από n άτομα αποτελείται από άτομα της ίδιας ηλικίας. Τότε, ο ισχυρισμός ότι «όλοι οι άνθρωποι έχουν την ίδια ηλικία» προκύπτει από την περίπτωση που ο αριθμός n είναι ο παρών πληθυσμός της γης. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Η περίπτωση όπου $n = 1$ είναι προφανώς αληθής αφού ένα σύνολο που περιέχει 1 άτομο περιέχει άτομα της ίδιας ηλικίας. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι κάθε σύνολο από k άτομα περιέχει άτομα της ίδιας ηλικίας. Έστω S ένα τυχόν σύνολο που περιέχει $k + 1$ άτομα. Πρέπει να αποδείξουμε ότι όλα τα άτομα στο S είναι της ίδιας ηλικίας.

Διατάσσουμε τα άτομα του S ως εξής:

$$S = \{P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}\}$$

Θεωρούμε το υποσύνολο L του S που περιέχει τα πρώτα k άτομα του S, δηλαδή,

$$L = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$$

Όμοια, έστω R το υποσύνολο που αποτελείται από τα τελευταία k στοιχεία του S, δηλαδή

$$R = \{P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}\}$$

Τα σύνολα L και R περιέχουν το καθένα από k άτομα, άρα από την επαγωγική υπόθεση, καθένα περιέχει άτομα της ίδιας ηλικίας. Ειδικότερα, όλα τα άτομα του L έχουν την ίδια ηλικία με το άτομο P_2. Επίσης, όλα τα άτομα στο R έχουν την ίδια ηλικία με το άτομο P_2.

Αλλά κάθε άτομο στο αρχικό σύνολο S είναι είτε στο L ή στο R, άρα όλα τα άτομα στο S έχουν την ίδια ηλικία με το άτομο P_2. Επομένως, το S αποτελείται από άτομα της ίδιας ηλικίας, και το ζητούμενο προκύπτει από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.

Τι συνέβη; Ισχύει πράγματι ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν την ίδια ηλικία; Προφανώς όχι. Είναι ατελής η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής; Ή υπάρχει κάποιο σφάλμα στην παραπάνω «απόδειξη»;

Είναι σαφές ότι υπάρχει κάποιο σφάλμα στην παραπάνω «απόδειξη». Παρακαλούμε να μην συνεχίσετε την ανάγνωση για κάποια λίγα λεπτά αλλά να προσπαθήσετε να εντοπίσετε το λάθος.

Επιμένουμε. Πριν συνεχίσετε την ανάγνωση, προσπαθήστε λίγο περισσότερο για να δείτε αν μπορείτε να βρείτε το λάθος.

Αν δεν καταφέρατε να βρείτε το σφάλμα, ίσως μία υπόδειξη θα βοηθήσει. Η απόδειξη της περίπτωσης $n = 1$ είναι προφανώς σωστή, αφού ένα σύνολο με ένα άτομο περιέχει ένα άτομο με μία οποιαδήποτε ηλικία. Τι γίνεται όμως με το επαγωγικό βήμα πηγαίνοντας από το k στο $k+1$; Για να είναι σωστό, θα πρέπει να ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό k. Για να συμπεράνουμε ότι μία πρόταση είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς, δοθέντος ότι ισχύει για $n = 1$, απαιτεί ότι η αλήθεια της πρότασης για $n = k+1$ έπεται από την αλήθεια της πρότασης για $n = k$, *για κάθε φυσικό αριθμό* k. Στην πραγματικότητα, υπάρχει ένας k για τον οποίο η παραπάνω εξαγωγή της περίπτωσης $n = k+1$ από την περίπτωση $n = k$ δεν είναι αληθής. Μπορείτε να βρείτε αυτή την τιμή του k;

Το λάθος είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε το επαγωγικό βήμα όταν $k = 1$, δηλαδή τι γίνεται όταν πάμε από το 1 στο 2. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο S έχει την μορφή $S = \{P_1, P_2\}$. Τότε, $L = \{P_1\}$ και $R = \{P_2\}$.

Το σύνολο L αποτελείται από άτομα της ίδιας ηλικίας και το ίδιο συμβαίνει και στο σύνολο R. Όμως δεν υπάρχει άτομο που να είναι και στα δύο σύνολα. Επομένως, δεν μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι όλοι στο S έχουν την ίδια ηλικία. Αυτό δείχνει ότι η παραπάνω «απόδειξη» του επαγωγικού βήματος δεν ισχύει όταν $k = 1$. Στην πραγματικότητα, το ακόλουθο είναι αληθές.

Αληθές Αποτέλεσμα. Αν σε ένα δοσμένο σύνολο ατόμων, κάθε ζεύγος ατόμων έχει την ίδια ηλικία, τότε όλα τα άτομα του συνόλου έχουν την ίδια ηλικία.

Απόδειξη. Έστω S το δοθέν σύνολο των ατόμων και γράφουμε $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Για κάθε i από 2 μέχρι n, το ζεύγος $\{P_1, P_i\}$ περιέχει άτομα της ίδιας ηλικίας, από την επαγωγική υπόθεση. Έτσι τα άτομα P_i και P_1 έχουν την ίδια ηλικία για κάθε i, άρα κάθε άτομο στο S έχει την ίδια ηλικία με το άτομο P_1. Επομένως, όλοι στο S έχουν την ίδια ηλικία. □

2.3 Προβλήματα

Βασικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

3. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

4. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Ενδιαφέροντα Προβλήματα

5. Να αποδείξετε την ακόλουθη πρόταση με επαγωγή: Για κάθε φυσικό αριθμό n, κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα. (Ένα *υποσύνολο* ενός δοθέντος συνόλου είναι ένα σύνολο που όλα τα στοιχεία του είναι στοιχεία του δοθέντος συνόλου. Παρατηρούμε ότι το *κενό σύνολο*, δηλαδή το σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία, είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Δείτε και την Παράγραφο 10.1 για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα σύνολα.)
6. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

7. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι ο 3 διαιρεί τον $n^3 + 2n$, για κάθε φυσικό αριθμό n.
8. Να αποδείξετε ότι $3^n > n^2$, για κάθε φυσικό αριθμό n.
9. Χρησιμοποιήστε επαγωγή για να αποδείξετε ότι $2^n > n^2$, για κάθε φυσικό $n > 4$.
10. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n > 1$ και κάθε πραγματικό αριθμό r διαφορετικό του 1, ισχύει:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Απαιτητικά Προβλήματα

11. Να αποδείξετε την Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής χρησιμοποιώντας την αρχή της Καλής Διάταξης.
12. Να αποδείξετε την αρχή της Καλής Διάταξης χρησιμοποιώντας Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής.
13. Μία εκδοχή ενός παιχνιδιού που ονομάζεται *Nim* παίζεται ως εξής: Υπάρχουν δύο παίκτες και δύο στοίβες αποτελούμενες από το ίδιο πλήθος αντικείμενων· σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε ότι τα αντικείμενα είναι κέρματα. Σε κάθε κίνηση, ένας παίκτης αφαιρεί κάποιο πλήθος κερμάτων είτε από τη μία στοίβα είτε από την άλλη. Οι παίκτες συνεχίζουν να παίζουν εναλλάξ μέχρι να αφαιρεθεί και το τελευταίο κέρμα. Νικητής είναι ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο κέρμα.
    Να αποδείξετε ότι αν ο δεύτερος παίκτης αφαιρεί πάντα το ίδιο πλήθος κερμάτων με την αμέσως προηγούμενη κίνηση του πρώτου παίκτη, και το κάνει αυτό από την στοίβα που δεν επέλεξε στην προηγούμενη κίνηση ο πρώτος (κάνοντας έτσι τις δύο στοίβες να έχουν ίσο πλήθος κερμάτων μετά την κίνησή του), τότε ο δεύτερος παίκτης θα νικήσει.
14. Ορίζουμε τον n-οστό *αριθμό Fermat*, F_n, ως $F_n = 2^{2^n} + 1$ για $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Έτσι έχουμε ότι $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$.
    (α) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι $F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} + 2 = F_n$, για $n \geq 1$.
    (α) Χρησιμοποιήστε τον τύπο από το (α) για να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι, δείχνοντας ότι δεν υπάρχουν δύο αριθμοί Fermat που να έχουν κοινό πρώτο παράγοντα. [Υπόδειξη: Για κάθε F_n, έστω p_n ένας πρώτος διαιρέτης του F_n. Να αποδείξετε ότι $p_{n_1} \neq p_{n_2}$ αν $n_1 \neq n_2$.]
15. Η ακολουθία των *αριθμών Fibonacci* ορίζεται ως εξής: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ και για $n > 2$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Να αποδείξετε ότι

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

    για κάθε φυσικό αριθμό n.
    [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και ο $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ επαληθεύουν και οι δύο την εξίσωση $1 + x = x^2$.]
16. Να αποδείξετε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 2.1.6:

Θεώρημα. *Για κάθε φυσικό αριθμό* n*, θεωρούμε ένα τετράγωνο που αποτελείται από* 2^{2n} *μικρότερα τετράγωνα, δηλαδή ένα* $2^n \times 2^n$ *τετράγωνο. Αν ένα οποιοδήποτε από τα μικρότερα τετράγωνα αφαιρεθεί από το μεγάλο τετράγωνο (όχι απαραίτητα από κάποια γωνία), τότε το σχήμα που προκύπτει μπορεί να καλυφθεί πλήρως με τριόμινα (καθένα από τα οποία αποτελείται από τρία μικρά τετράγωνα του ίδιου μεγέθους με τα μικρά τετράγωνα του σχήματος) έτσι ώστε τα τριόμινο να μην αλληλοεπικαλύπτονται.*