Αρμονική Ανάλυση

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

ΣΕΜΦΕ – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, 2023

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Επαληθεύστε ότι η $f(x) = e^{inx}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \neq 0, \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός αποδείξτε ότι αν $m, n \geqslant 1$ τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } m \neq n \\ 1, & \text{αν } m = n, \end{cases}$$

και όμοια

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{αν; } m \neq n \\ 1, & \text{αν } m = n, \end{cases}$$

Τέλος, δείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx \, dx = 0 \quad \text{για κάθε } n, m.$$

[*Υπόδειξη:* Υπολογίστε τους $e^{inx}e^{-imx} + e^{inx}e^{imx}$ και $e^{inx}e^{-imx} - e^{inx}e^{imx}$.]

Υπόδειξη.

1.2. Αποδείξτε ότι αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία είναι λύση της εξίσωσης

$$f''(t) + c^2 f(t) = 0,$$

τότε υπάρχουν σταθερές a και b ώστε

$$f(t) = a\cos ct + b\sin ct.$$

Αυτό μπορεί να γίνει με παραγώγιση των συναρτήσεων $g(t) = f(t)\cos ct - c^{-1}f'(t)\sin ct$ και $h(t) = f(t)\sin ct + c^{-1}f'(t)\cos ct$.

Υπόδειξη. Παραγωγίζοντας τις $g(t) = f(t)\cos ct - c^{-1}f'(t)\sin ct$ και $h(t) = f(t)\sin ct + c^{-1}f'(t)\cos ct$ βλέπουμε ότι

$$g'(t) = f'(t)\cos ct - cf(t)\sin ct - \frac{1}{c}f''(t)\sin ct - f'(t)\cos ct = -\frac{1}{c}(c^2 f(t) + f''(t))\sin ct = 0,$$

άρα $g(t) \equiv a$ για κάποια σταθερά a. Ομοίως,

$$h'(t) = f'(t)\sin ct - cf(t)\cos ct - \frac{1}{c}f''(t)\cos ct - f'(t)\sin ct = -\frac{1}{c}(c^2 f(t) + f''(t))\cos ct = 0,$$

άρα $h(t) \equiv b$ για κάποια σταθερά b. Από τις

$$g(t) = f(t)\cos ct - c^{-1}f'(t)\sin ct \quad \text{και} \quad h(t) = f(t)\sin ct + c^{-1}f'(t)\cos ct$$

παίρνουμε

$$g(t)\cos ct = f(t)\cos^2 ct - c^{-1}f'(t)\sin ct\cdot\cos ct \quad \text{και} \quad h(t)\sin ct = f(t)\sin^2 ct + c^{-1}f'(t)\cos ct\cdot\sin ct.$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε ότι

$$f(t) = g(t)\cos ct + h(t)\sin ct = a\cos ct + b\sin ct.$$

1.3. Δείξτε ότι αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$a\cos ct + b\sin ct = A\cos(ct-\varphi),$$

όπου $A = \sqrt{a^2+b^2}$ και ο φ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{και} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a^2+b^2>0$ (αν $a^2+b^2=0$ τότε $a=b=A=0$ και οποιοσδήποτε $\varphi\in\mathbb{R}$ μας δίνει το ζητούμενο). Έχουμε

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

άρα υπάρχει $\varphi\in[0,2\pi)$ τέτοιος ώστε

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{και} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} A\cos(ct-\varphi) &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos ct\cdot\cos\varphi + \sin ct\cdot\sin\varphi) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos ct\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin ct\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= a\cos ct + b\sin ct. \end{aligned}$$

1.4. Έστω F μια συνάρτηση στο (a,b) με δύο συνεχείς παραγώγους. Αποδείξτε ότι αν τα x και $x+h$ ανήκουν στο (a,b), μπορούμε να γράψουμε

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2}F''(x) + h^2\varphi(h),$$

όπου $\varphi(h)\to 0$ καθώς το $h\to 0$. Συμπεράνατε από αυτό ότι

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \longrightarrow F''(x) \quad \text{καθώς το } h\to 0.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F'(y)\,dy.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor γράφουμε $F'(y) = F'(x) + (y-x)F''(x) + (y-x)\psi(y-x)$, όπου η ψ είναι συνεχής και $\psi(t) \to 0$ καθώς το $t \to 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} (F'(x) + (y-x)F''(x) + (y-x)\psi(y-x))\,dy \\ &= F'(x)h + F''(x)\int_x^{x+h} (y-x)\,dy + \int_x^{x+h} (y-x)\psi(y-x)\,dy \\ &= F'(x)h + F''(x)\int_0^h t\,dt + \int_0^h t\psi(t)\,dt \\ &= F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{2} + \psi(\xi_1)\frac{h^2}{2}, \end{aligned}$$

όπου $\xi_1 = \xi_1(h)$ με $|\xi_1| \leqslant |h|$ (με χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού). Ομοίως,

$$F(x-h) - F(x) = -F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{2} + \psi(\xi_2)\frac{h^2}{2},$$

όπου $\xi_2 = \xi_2(-h)$ με $|\xi_2| \leqslant |h|$. Έπεται ότι

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = F''(x) + \frac{\psi(\xi_1) + \psi(\xi_2)}{2} \longrightarrow F''(x)$$

καθώς το $h \to 0$, διότι $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t) = 0$ και $\xi_1(h), \xi_2(h) \to 0$ καθώς το $h \to 0$.

1.5. Δείξτε ότι η Λαπλασιανή

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από τον τύπο

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

Επίσης, αποδείξτε ότι

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right|^2.$$

Υπόδειξη.

1.6. Δείξτε ότι αν $n \in \mathbb{Z}$ τότε οι μόνες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$r^2F''(r) + rF'(r) - n^2F(r) = 0,$$

οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες όταν $r > 0$, δίνονται από γραμμικούς συνδυασμούς των r^n και r^{-n} όταν $n \neq 0$, και γραμμικούς συνδυασμούς των 1 και $\ln r$ όταν $n = 0$.

Υπόδειξη. Έστω F μια λύση της εξίσωσης. Ορίζουμε $g(r) = F(r)/r^n$. Τότε, η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $F(r) = g(r)r^n$. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση δύο φορές παίρνουμε

$$F'(r) = r^n g'(r) + nr^{n-1}g(r)$$

και

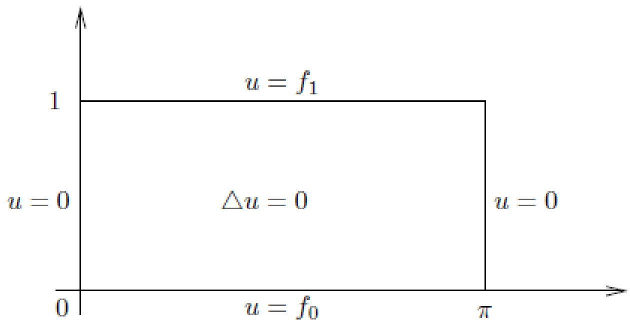
$$F''(r) = r^n g''(r) + 2nr^{n-1}g'(r) + n(n-1)r^{n-2}g(r).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 0 &= r^2F''(r) + rF'(r) - n^2F(r) = r^{n+2}g''(r) + 2nr^{n+1}g'(r) + n(n-1)r^n g(r) + r^{n+1}g'(r) + nr^n g(r) - n^2r^n g(r) \\ &= r^{n+2}g''(r) + (2n+1)r^{n+1}g'(r) = r^{n+1}(rg''(r) + (2n+1)g'(r)) \\ &= r^{n+1}((rg'(r))' + 2ng'(r)), \end{aligned}$$

δηλαδή
$$(rg'(r))' + 2ng'(r) = 0.$$
Έπεται ότι υπάρχει σταθερά c ώστε
$$rg'(r) + 2ng(r) \equiv c.$$
Λύνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση βλέπουμε ότι: αν $n \neq 0$ τότε η $g(r)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των r^{-2n} και 1, ενώ αν $n = 0$ τότε η $g(r)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\ln r$ και 1. Αφού $F(r) = g(r)r^n$, συμπεραίνουμε ότι αν $n \neq 0$ τότε η $F(r)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των r^{-n} και r^n, ενώ αν $n = 0$ τότε η $F(r)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\ln r$ και 1.

1.7. Θεωρήστε το πρόβλημα Dirichlet που περιγράφεται στο Σχήμα 1.10. Πιο συγκεκριμένα, ψάχνουμε μια λύση της εξίσωσης της θερμότητας σταθερής κατάστασης $\Delta u = 0$ στο ορθογώνιο $R = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, η οποία μηδενίζεται στις κατακόρυφες πλευρές του R και ικανοποιεί τις
$$u(x, 0) = f_0(x) \quad \text{και} \quad u(x, 1) = f_1(x),$$
όπου οι f_0 και f_1 είναι αρχικά δεδομένα που σταθεροποιούν την κατανομή θερμοκρασίας στις οριζόντιες πλευρές του ορθογωνίου.



Σχήμα 1.1: Το πρόβλημα Dirichlet σε ένα ορθογώνιο

Χρησιμοποιώντας χωρισμό μεταβλητών δείξτε ότι αν οι f_0 και f_1 έχουν αναπτύγματα Fourier
$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \quad \text{και} \quad f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx,$$
τότε
$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} A_k + \frac{\sinh ky}{\sinh k} B_k \right) \sin kx.$$
Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς του υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου:
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Υπόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ολοκλήρωμα Riemann

2.1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0,$$

και, αφού $m_k \leqslant M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (για τα επόμενα υποδιαστήματα), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\alpha = m_0 = M_0 = m_1 = M_1 = \cdots = m_k = M_k = \cdots = m_{n-1} = M_{n-1}.$$

Έπεται ότι $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή.

2.2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leqslant 0 \leqslant M_k$. Έπεται ότι

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f, P).$$

Άρα, $\sup_P L(f, P) \leqslant 0$ και $\inf_P U(f, P) \geqslant 0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f, P) \leqslant 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x)dx = \inf_P U(f, P) \geqslant 0.$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2.3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma,\delta] \subseteq [a,b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leqslant x \leqslant \delta\} \leqslant \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \lambda(b-a).$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Από την υπόθεση, για κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \leqslant \lambda$. Συνεπώς,

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(x_{k+1} - x_k) = \lambda(b-a).$$

Έπεται ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\} \leqslant \lambda(b-a).$$

2.4. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma,\delta] \subseteq [a,b]$ ώστε $f(x) \geqslant \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma,\delta]$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\} > 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ ώστε $m_k(x_{k+1}-x_k) > 0$, άρα $m_k = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} = \lambda > 0$. Τότε, για το μη τετριμμένο υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}] \subseteq [a,b]$ έχουμε $f(x) \geqslant \lambda$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

2.5. (α) Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό (αποδεικνύεται στις Σημειώσεις): Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a,b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c-\delta]$ και $[c+\delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Μας δίνεται φραγμένη συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής παντού εκτός από το σημείο $x_0 \in (a,b)$. Για κάθε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $x_0 \pm \delta \in (a,b)$ ισχύει ότι η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[a, x_0-\delta]$ και $[x_0+\delta, b]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, x_0-\delta]$ και $[x_0+\delta, b]$. Από τον ισχυρισμό έπεται ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqslant b$. Επιλέγουμε $y_1,\dots,y_{m-1}$ ώστε $x_k < y_k < x_{k+1}$ για κάθε $k = 1,\dots,m-1$. Παρατηρούμε ότι η f έχει ένα σημείο ασυνέχειας σε καθένα από τα διαστήματα $[a,y_1],[y_1,y_2],\dots,[y_{m-2},y_{m-1}]$ και $[y_{m-1},b]$. Από το (α) η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από αυτά τα διαδοχικά διαστήματα, και από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

2.6. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων $P^{(n)} = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1\right\}$ και την επιλογή σημείων $\Xi^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$. Αφού το πλάτος της διαμέρισης $P^{(n)}$ είναι $\|P^{(n)}\| = \frac{1}{n} \to 0$, από τον ορισμό του Riemann έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum\left(f, P^{(n)}, \Xi^{(n)}\right) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

(β) Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα του (α) για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$, παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$$

2.7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Έστω ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) > 0$. Λόγω συνέχειας, η f παίρνει θετικές τιμές σε μια (αρκετά μικρή) περιοχή του x_0, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a < x_0 < b$ (ότι $x_0 \neq a$ και $x_0 \neq b$).

Επιλέγουμε $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας: μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ (και αν χρειάζεται να το μικρύνουμε) ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και, για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[a,b]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \\ &\geqslant 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + 0 \geqslant 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0.\end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει προφανώς.

2.8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b - a$ (εξηγήστε γιατί). Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα, αποδείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a, b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

(ε) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b g(x)dx > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $U(f, P_1) - L(f, P_1) < b - a$. Περνώντας αν χρειαστεί σε εκλέπτυνση της P_1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλάτος της P_1 είναι μικρότερο από 1. Αφού

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < b - a = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k),$$

υπάρχει $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ώστε $M_k - m_k < 1$. Αν θέσουμε $a_1 = x_k$ και $b_1 = x_{k+1}$, βλέπουμε ότι $a_1 < b_1$, $a_1, b_1 \in [a, b]$, $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} = M_k - m_k < 1.$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ με μήκος μικρότερο από $1/2$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_2 \leqslant x \leqslant b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leqslant x \leqslant b_2\} < \frac{1}{2}.$$

Για να πετύχετε τον εγκλεισμό $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ ξεκινήστε από ένα υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a_1, b_1]$ με $a_1 < c < d < b_1$ (η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c, d]$). Βρείτε διαμέριση P_2 του $[c, d]$ με $U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{d-c}{2}$ και πλάτος μικρότερο από $1/2$ και συνεχίστε όπως πριν.

Επαγωγικά μπορείτε να βρείτε $[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ ώστε $b_n - a_n < 1/n$ και

$$\sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $x_0 \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, έχουμε $x_0 \in (a_n, b_n)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a_n, b_n)$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f στο x_0.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία συνέχειας στο $[a, b]$. Τότε, υπάρχει διάστημα $[c, d] \subset [a, b]$ στο οποίο η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο βήμα: η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε αυτό.

Για την ακρίβεια, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δείχνει κάτι ισχυρότερο: αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε *κάθε υποδιάστημα* του $[a, b]$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι *πυκνό* στο $[a, b]$.

(ε) Από τα προηγούμενα, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Αφού $f(x_0) > 0$, υπάρχει διάστημα $J \subseteq [a, b]$ με μήκος $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in J$ ισχύει $f(x) > f(x_0)/2$. Συνεχίστε όπως στην Άσκηση 2.7.

2.9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$\kappa(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι η κ είναι συνεχής στο $x \in [0,1]$ αν και μόνο αν $x \notin \mathbb{Q}$.

(β) Αποδείξτε ότι η κ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι αν ο $x \in (0,1]$ είναι ρητός, οπότε γράφεται στη μορφή $x = \frac{p}{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{N}$ με ΜΚΔ$(p,q) = 1$, τότε η κ είναι ασυνεχής στο σημείο x. Πράγματι, υπάρχει ακολουθία αρρήτων αριθμών $\alpha_n \in [0,1]$ με $\alpha_n \to x$. Τότε, $\kappa(\alpha_n) = 0 \to 0 \neq \frac{1}{q} = \kappa(x)$, και το συμπέρασμα έπεται από την αρχή της μεταφοράς.

Έστω τώρα ότι ο $x \in [0,1]$ είναι άρρητος και έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $M = M(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ και $A(\varepsilon) = \{y \in [0,1] : \kappa(y) \geqslant \varepsilon\}$. Αν ο y ανήκει στο $A(\varepsilon)$ τότε είναι ρητός ο οποίος γράφεται στη μορφή $x = \frac{p}{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant q$ και $\kappa(y) = \frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι το πολύ ίσο με το πλήθος των ζευγαριών (p,q) φυσικών αριθμών όπου $q \leqslant M$ και $p \leqslant q$. Επομένως, δεν ξεπερνάει τον $M(M+1)/2$. Δηλαδή, το $A(\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $A(\varepsilon) = \{y_1, \dots, y_m\}$ όπου $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

Αφού ο x είναι άρρητος, ο x δεν ανήκει στο $A(\varepsilon)$. Άρα, ο αριθμός $\delta = \min\{|x - y_1|, \dots, |x - y_m|\}$ είναι γνήσια θετικός. Έστω $z \in [0,1]$ με $|z - x| < \delta$. Τότε, $z \notin A(\varepsilon)$ άρα $\kappa(z) < \varepsilon$. Αφού $\kappa(x) = 0$, έπεται ότι $0 \leqslant \kappa(z) = \kappa(z) - \kappa(x) < \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η κ είναι συνεχής στο σημείο x.

Τέλος, δείξτε ότι η κ είναι συνεχής στο σημείο 0.

(β) Εύκολα ελέγχουμε ότι $L(\kappa, P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in [0,1] : \kappa(x) \geqslant \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $\kappa(x) \geqslant \varepsilon$ τότε $x = p/q$ και $\kappa(x) = 1/q \geqslant \varepsilon$ δηλαδή $q \leqslant 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1 + 2 + \cdots + [1/\varepsilon]$ – εξηγήστε γιατί)].

Έστω $z_1 < z_2 < \cdots < z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα υποδιαστήματα $[a_i, b_i]$ του $[0,1]$ που έχουν μήκη $b_i - a_i < \varepsilon/N$ και ικανοποιούν τα εξής: $a_1 > 0$, $a_i < z_i < b_i$ αν $i < N$ και $a_N < z_N \leqslant b_N$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon \leqslant 1$ τότε $z_N = 1$ οπότε πρέπει να επιλέξουμε $b_N = 1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon = \{0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leqslant 1\},$$

έχουμε

$$\begin{aligned} U(\kappa, P_\varepsilon) &\leqslant \varepsilon \cdot (a_1 - 0) + 1 \cdot (b_1 - a_1) + \varepsilon \cdot (a_2 - b_1) + \cdots + 1 \cdot (b_{N-1} - a_{N-1}) \\ &\qquad + \varepsilon \cdot (a_N - b_{N-1}) + 1 \cdot (b_N - a_N) + \varepsilon \cdot (1 - b_N) \\ &\leqslant \varepsilon \cdot \Big(a_1 + (a_2 - b_1) + \cdots + (a_N - b_{N-1}) + (1 - b_N)\Big) + \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(\kappa, P_\varepsilon) - L(\kappa, P_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann η κ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

2.10. Μπορούμε να κατασκευάσουμε Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις οι οποίες έχουν πυκνό σύνολο σημείων ασυνέχειας ως εξής.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x < 0$ και $f(x) = 1$ αν $x \geqslant 0$. Επιλέγουμε μια αριθμήσιμη πυκνή ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(x - r_n), \qquad x \in [0,1]$$

είναι ολοκληρώσιμη και είναι ασυνεχής σε όλα τα σημεία της ακολουθίας $\{r_n\}$.

[*Υπόδειξη:* Η F είναι μονότονη και φραγμένη.]

(β) Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} g(x - r_n),$$

όπου $g(x) = \sin(1/x)$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη, ασυνεχής σε κάθε $x = r_n$, και δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$.

[*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $3^{-k} > \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} 3^{-n}$.]

(γ) Το παράδειγμα που έδωσε ο Riemann ήταν η συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

όπου $(x) = x$ αν $x \in (-1/2, 1/2]$ και έπειτα επεκτείνουμε την (x) στο $\mathbb{R}$ περιοδικά, δηλαδή $(x+1) = (x)$. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η F είναι ασυνεχής στα σημεία $x = m/(2n)$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$, ο m είναι περιττός και $n \neq 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_k(x) = k^{-2}\chi_{[0,\infty)}(x - q_k)$. Παρατηρούμε ότι κάθε f_k είναι Riemann ολοκληρώσιμη και επειδή η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα έπεται ότι η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό είναι ο εξής: Αν $x \in [0,1]$ ορίζουμε $I_x = \{k \in \mathbb{N} : q_k \leqslant x\}$. Παρατηρήστε ότι αν $x < y$ τότε $I_x \subset I_y$, οπότε

$$F(x) = \sum_{k \in I_x} \frac{1}{k^2} < \sum_{k \in I_y} \frac{1}{k^2} = F(y)$$

που αποδεικνύει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα, άρα η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τώρα δείχνουμε ότι η F είναι ασυνεχής σε κάθε q_k. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν $x < q_k \leqslant y$, τότε $k \in I_y \setminus I_x$, άρα

$$F(y) - F(x) = \sum_{j \in I_y \setminus I_x} \frac{1}{j^2} > \frac{1}{k^2}.$$

Αυτό δείχνει ότι η F παρουσιάζει άλμα ασυνέχειας στο q_k. Ειδικότερα, μπορούμε αν δείξουμε ότι $F(q_k) - F(q_k-) = 1/k^2$. Για να το δείτε αυτό παρατηρήστε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ με $N > k$ υπάρχει $\delta = \delta_{N,k} > 0$ ώστε $(q_k - \delta, q_k) \cap \{q_n : n \geqslant 1\} \subset \{q_j : j > N\}$. Τότε, για $q_k - \delta < x < q_k$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{k^2} < F(q_k) - F(x) = \sum_{j : x < q_j \leqslant q_k} \frac{1}{j^2} \leqslant \frac{1}{k^2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{N}.$$

Καθώς, το N μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μεγάλο έχουμε το ζητούμενο.

(β) Θέτουμε $g_k(x) = g(x - q_k)$. Γνωρίζουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα που περιέχει το 0 από το κριτήριο του Riemann. Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} g_k$ ορίζει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω $k \in \mathbb{N}$, θα δείξουμε ότι η G είναι ασυνεχής στο q_k. Από την ανισότητα $|\sin u - \sin v| \leqslant |u - v|$ προκύπτει ότι

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \min\left\{2, \frac{|x-y|}{|xy|}\right\}$$

για $x, y \neq 0$. Έστω $0 < \delta < \min\{|q_j - q_k| : 1 \leqslant j < k\}$. Τότε, για $q_k - \delta < x < q_k < y < q_k + \delta$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
|G(x) - G(y)| &= \left|\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big)\right| \\
&\geqslant \left|\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big)\right| - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} \\
&= \left|\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big)\right| - \frac{1}{3^k}.
\end{aligned}$$

Έστω $0 < t < \delta$ (το οποίο θα καθοριστεί στη συνέχεια) και θεωρούμε $y = q_k + t$ και $x = q_k - t$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$|G(x) - G(y)| \geqslant \left|\sum_{j=1}^{k-1} 3^{-j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t}\right| - \frac{1}{3^k}.$$

Επίσης, $(x - q_j)(y - q_j) = (q_k - q_j)^2 - t^2$, οπότε για $0 < t < \delta/2$ είναι

$$|g(x-q_j) - g(y-q_j)| \leqslant \frac{|x-y|}{|x-q_j||y-q_j|} = \frac{2t}{(q_k-q_j)^2 - t^2} \leqslant \frac{2t}{\delta^2 - t^2} < \frac{4t}{\delta^2}.$$

για $1 \leqslant j < k$. Επομένως, το άθροισμα εκτιμάται:

$$(*) \qquad \left|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j} \cdot \frac{4t}{\delta^2} < \frac{2t}{\delta^2}.$$

Αν επιλέξουμε $t = t_m = (2\pi m + \pi/2)^{-1}$, για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ προκύπτει:

$$|G(x_m) - G(y_m)| \geqslant \frac{1}{3^k} - \frac{2t_m}{\delta^2} > \frac{1}{2 \cdot 3^k},$$

όπου $x_m = q_k - t_m$ και $y_m = q_k + t_m$. Αυτό αποδεικνύει ότι η G είναι ασυνεχής στον q_k.

Τέλος, δείχνουμε ότι η G δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0, 1]$. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί για κάθε $(a, b) \subset [0, 1]$ να βρούμε $a < x < y < b$ ώστε $G(x) < G(y)$ και $a < u < v < b$ ώστε $G(u) > G(v)$. Έστω λοιπόν $0 < a < b < 1$. Υπάρχει $q_k \in (a, b)$ και έστω $\delta > 0$ όπως πριν και επιπλέον $(q_k - \delta, q_k + \delta) \subset (a, b)$. Έστω $x = q_k - t, y = q_k + t$ με $0 < t < \delta/2$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}
G(x) - G(y) &= \sum_{j \neq k} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} \\
&\geqslant \sum_{j<k} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{3^k} \\
&\geqslant -\left|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j}\Big(g(x-q_j) - g(y-q_j)\Big)\right| - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{3^k} \\
&\geqslant -\frac{2t}{\delta^2} - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{3^k},
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την $(*)$. Για $t = t_m = (2\pi m + 3\pi/2)^{-1}$ έχουμε

$$G(x_m) - G(y_m) \geqslant \frac{1}{2 \cdot 3^k} > 0,$$

για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ όπως προηγουμένως. Για την αντίστροφη εκτίμηση, θεωρούμε $u = q_k - s$, $v = q_k + s$ με

$0 < s < \delta/2$:

$$\begin{aligned} G(u) - G(v) &= \sum_{j\neq k} \frac{1}{3^j}(g(u-q_j) - g(v-q_j)) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{s} \\ &\leqslant \left| \sum_{j<k} \frac{1}{3^j}(g(u-q_j) - g(v-q_j)) \right| - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{s} + \frac{1}{3^k} \\ &\leqslant \frac{2s}{\delta^2} - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{s} + \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $s = s_m = (2\pi m + \pi/2)^{-1}$, τότε για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ παίρνουμε:

$$G(u_m) - G(v_m) \leqslant \frac{2s_m}{\delta^2} - \frac{1}{3^k} < -\frac{1}{2\cdot 3^k} < 0.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης.

2.11. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $M = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b M^p dx\right)^{1/p} = M(b-a)^{1/p}$$

και $M(b-a)^{1/p} \to M$ όταν $p \to \infty$, άρα υπάρχει $p_1 \geqslant 1$ ώστε

$$\|f\|_p < M + \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad p \geqslant p_1.$$

Αφού η $|f|$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $|f(x_0)| = M$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a,b]$ με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $|f(x)| > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$. Επίσης, αφού $\delta^{1/p} \to 1$ όταν $p \to \infty$, υπάρχει $p_2 \geqslant 1$ ώστε: για κάθε $p \geqslant p_2$,

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \geqslant \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{1/p} > M - \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $p \geqslant p_0 = \max\{p_1, p_2\}$ έχουμε

$$|\,\|f\|_p - M| = \left|\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} - M\right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\|f\|_p \to M$.

Σημείωση. Χρησιμοποιώντας τα $\limsup \|f\|_p$ και $\liminf \|f\|_p$ μπορούμε να απλουστεύσουμε (κάπως) το επιχείρημα. Από την ανισότητα $\|f\|_p \leqslant M(b-a)^{1/p}$, που δείξαμε παραπάνω, και από την $M(b-a)^{1/p} \to M$ συμπεραίνουμε ότι $\limsup \|f\|_p \leqslant M$. Από την ανισότητα $\|f\|_p \geqslant \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{1/p}$, που δείξαμε παραπάνω, και από την $\delta^{1/p} \to 1$ συμπεραίνουμε ότι $\liminf \|f\|_p \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}$ για τυχόν $\varepsilon > 0$, συνεπώς, $\liminf \|f\|_p \geqslant M$. Έπεται ότι $\limsup \|f\|_p = \liminf \|f\|_p = M$, άρα $\|f\|_p \to M = \|f\|_\infty$.

2.12. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leqslant p < \infty$ ώστε

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = 0.$$
Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η ανισότητα Holder και η ανισότητα Minkowski ισχύουν για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Συμπεράνατε ότι η
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$
είναι *ημινόρμα* στον $\mathcal{R}[a,b]$, δηλαδή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του ορισμού της νόρμας εκτός από την «$\|x\| = 0 \implies x = 0$».

Υπόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $p = 1$, Η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \int_a^b M|f(x)|\,dx = M\int_a^b |f(x)|\,dx = 0,$$
το οποίο αποδεικνύει ότι
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = 0.$$
Έστω τώρα ότι $p > 1$. Από την ανισότητα Young, για κάθε $t > 0$ και κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε
$$t|f(x)g(x)| = |f(x)|\cdot t|g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{t^q}{q}|g(x)|^q,$$
όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Ολοκληρώνοντας στο $[a,b]$ παίρνουμε
$$t\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{t^q}{q}\int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{t^q}{q}\int_a^b |g(x)|^q dx,$$
άρα
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{t^{q-1}}{q}\int_a^b |g(x)|^q dx.$$
Παρατηρήστε ότι $q-1 > 0$, άρα $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{q-1} = 0$. Έπεται ότι
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{q-1}}{q}\int_a^b |g(x)|^q dx = 0,$$
δηλαδή
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = 0.$$
Η απόδειξη της ανισότητας Holder για $1 < p < \infty$ είναι τώρα όμοια με αυτήν για τις συνεχείς συναρτήσεις, εκτός από μια μικρή τροποποίηση. Υποθέτουμε πρώτα ότι
$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p\,dx = 1 \ \text{ και } \ \|g\|_q^q = \int_a^b |g(x)|^q\,dx = 1.$$
Από την ανισότητα Young, για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει ότι
$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$
Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα παίρνουμε
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q.$$

Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$. Αλλιώς, αν για παράδειγμα $\|f\|_p = 0$ ή $g \equiv 0$ τότε από το πρώτο μέρος της άσκησης έχουμε ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = 0$$

και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε (ομοίως αν $\|g\|_q = 0$). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{και} \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 1 \quad \text{και} \quad \int_a^b |g_1(x)|^q\,dx = \frac{1}{\|g\|_q^q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx = 1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_a^b |f_1(x)g_1(x)|\,dx \leqslant 1, \quad \text{δηλαδή,} \quad \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

όπως θέλαμε. Η ανισότητα Minkowski αποδεικνύεται με τη βοήθεια της ανισότητας Holder, ακριβώς όπως στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

3.1. Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n}<x\\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right), & \frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\end{cases}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n\to 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $x\leqslant 0$ τότε $f_n(x)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

(ii) Αν $x>0$ τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0}<x$. Συνεπώς, για κάθε $n\geqslant n_0$ έχουμε $x\notin\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, απ' όπου έπεται ότι η $(f_n(x))$ είναι τελικά σταθερή και ίση με 0. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι ότι $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $\|f_n-0\|_\infty=\|f_n\|_\infty\leqslant 1$ διότι $\sin^2(\pi/x)\leqslant 1$ και ισχύει ισότητα διότι, αν θέσουμε $x_n=\frac{2}{2n+1}$ τότε $x_n\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ και $\|f_n\|_\infty\geqslant|f_n(x_n)|=\sin^2\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$. Αφού $\|f_n\|_\infty=1\not\to 1$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

3.2. Έστω $f_n(x)=n^px(1-x^2)^n$, $x\in[0,1]$, με $p>0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p>0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n\to\int_0^1 f$;

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n\to f\equiv 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $x=0$ ή $x=1$ τότε $f_n(x)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

(ii) Αν $0<x<1$ τότε $0<1-x^2<1$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}n^px(1-x^2)^n=0$. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι ότι $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

Έχουμε $\|f_n-0\|_\infty=\max(f_n)$ διότι $f_n\geqslant 0$. Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}f_n'(x)&=n^p(1-x^2)^n-n^pxn(1-x^2)^{n-1}(2x)\\&=n^p(1-x^2)^{n-1}[1-x^2-2nx^2]=n^p(1-x^2)^{n-1}[1-(2n+1)x^2].\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|f_n-0\|_\infty=f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

Παρατηρούμε ότι $\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n\to\frac{1}{\sqrt{e}}$. Συνεπώς,

(i) Αν $0<p<\frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\to 0$ και $\|f_n-0\|_\infty\to 0$.

(ii) Αν $p>\frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\to+\infty$ και $\|f_n-0\|_\infty\to+\infty$.

(iii) Αν $p = \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\|f_n - 0\|_\infty \to \frac{1}{\sqrt{2e}} > 0$.

Έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα (δηλαδή, $\|f_n - 0\|_\infty \to 0$) αν και μόνο αν $0 < p < \frac{1}{2}$.

Για το τελευταίο ερώτημα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f_n (για κάθε τιμή της παραμέτρου p): θέτοντας $y = 1 - x^2$ βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 n^p x(1-x^2)^n dt = \int_0^1 \frac{n^p}{2} y^n dy = \frac{n^p}{2}\int_0^1 y^n dy = \frac{n^p}{2(n+1)}.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{n^p}{2(n+1)} \to 0$ αν και μόνο αν $0 < p < 1$. Άρα, $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$ αν $0 < p < 1$.

3.3. (α) Έστω I διάστημα, $f_n : I \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I. Αποδείξτε ότι $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο I.

(β) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ για $n = 1, 2, \ldots$ Αποδείξτε ότι η $(|f_n|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η (f_n) δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\big|\, |f_n(x)| - |f(x)| \,\big| \leqslant |f_n(x) - f(x)|$$

για κάθε $x \in I$, άρα

$$\|\, |f_n| - |f| \,\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Άρα, $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο X.

(β) Παρατηρούμε ότι $f_{2n}(x) = 1 + \frac{x}{n} \to 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f_{2n-1}(x) = -\left(1 + \frac{x}{n}\right) \to -1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς, η $(f_n(x))$ αποκλίνει για κάθε $x \in [0,1]$. Όμως,

$$|f_n(x)| = 1 + \frac{x}{n} \to f(x) = 1$$

στο $[0,1]$ και

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Δηλαδή, $|f_n| \to f \equiv 1$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

3.4. Έστω $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και $f_n' \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα το οποίο περιέχει το 0 η f_n' *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε κλειστό διάστημα το οποίο *δεν* περιέχει το 0 η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.

Υπόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^{n^2x^2} \geqslant 1$, άρα $0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n}$, με ισότητα αν $x = 0$. Συνεπώς, $f_n(x) \to 0$ κατά σημείο, και μάλιστα,

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0,$$

άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$|f_n'(x)| = 2|x|ne^{-n^2x^2} \to 0$$

διότι $e^{n^2x^2} \geqslant 1 + n^2x^2$ άρα $|f_n'(x)| < \frac{2|x|n}{1+n^2x^2} \to 0$. Δηλαδή, $f_n' \to f' \equiv 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

(α) Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που δεν περιέχει το 0. Εξετάζουμε την περίπτωση $0 < a < b$: παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [a,b]$,

$$|f_n'(x)| = 2xne^{-n^2x^2} \leqslant 2bne^{-n^2a^2}.$$

Συνεπώς,

$$\max_{x \in [a,b]} |f_n(x)| \leqslant 2bne^{-n^2a^2} < \frac{2bn}{n^2a^2} = \frac{2b}{a^2n} \to 0.$$

Έπεται ότι $f_n' \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ (η περίπτωση $a < b < 0$ εξετάζεται με ανάλογο τρόπο).

(β) Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχει το 0. Για μεγάλα n, τουλάχιστον ένας από τους $\pm\frac{1}{n}$ θα ανήκει στο $[a,b]$ (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\max_{x \in [a,b]} |f_n'(x)| \geqslant |f_n'(\pm 1/n)| = 2\frac{1}{n}ne^{-n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{e}.$$

Αυτό δείχνει ότι $f_n' \not\to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

3.5. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^{nx}.$$

Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f. Βρείτε το όριο των ολοκληρωμάτων

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Είναι η σύγκλιση της (f_n) στην f ομοιόμορφη;

Υπόδειξη. Αν $x=0$ τότε $f_n(0)=0\to 0$. Αν $0<x\leqslant 1$ τότε $0\leqslant (1-x)^x<1$, άρα

$$n^2x(1-x)^{nx} = xn^2[(1-x)^x]^n \to 0.$$

Συνεπώς, $f_n\to 0$ κατά σημείο στο $[0,1]$.

Για το ολοκλήρωμα της f_n παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x\mapsto (1-x)^x$ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$, άρα

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 n^2x(1-x)^{nx}dx \geqslant \int_{\frac{1}{2\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n^2x(1-x)^{nx}dx\\ &\geqslant \int_{\frac{1}{2\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\frac{1}{\sqrt{n}}}dx = \frac{n^2}{2\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\frac{1}{2\sqrt{n}}\\ &= \frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{4e}\to+\infty.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση της (f_n) στην $f\equiv 0$ δεν είναι ομοιόμορφη: θα είχαμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

ενώ τα ολοκληρώματα αριστερά τείνουν στο $+\infty$. Ένας άλλος τρόπος για να το δούμε, είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$\|f_n\|_\infty \geqslant f_n(1/n) = n^2\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\frac{1}{n}} = n-1\to+\infty.$$

3.6. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n\to f\equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Εξετάστε αν $f_n\to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha,\infty)$, $\alpha>0$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{n}x} > \frac{(\sqrt{n}x)^4}{24} = \frac{x^4n^2}{24}$ για κάθε $x>0$ (γενικότερα, αν $y>0$ και $k\in\mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$). Άρα,

$$0 < nxe^{-\sqrt{n}x} \leqslant \frac{24nx}{x^4n^2} = \frac{24}{x^3n}\to 0$$

για κάθε $x>0$. Επίσης, $f_n(0)=0\to 0$. Έτσι, έχουμε $f_n\to 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\|f_n\|_\infty \geqslant f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}e^{-1}\to+\infty$$

καθώς το $n\to\infty$. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Έστω $a > 0$. Όπως πριν, για κάθε $x \in [a, \infty)$ έχουμε

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leqslant \frac{24}{x^3 n} \leqslant \frac{24}{a^3 n},$$

άρα $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{24}{a^3 n} \to 0$ (στο $[a, \infty)$) και έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$.

3.7. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;

(ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

Υπόδειξη. (i) Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$. Για $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x + \frac{1}{n}} \to 1.$$

Άρα, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f(x) = 1$ αν $x > 0$ και $f(x) = 0$ αν $x = 0$.

(ii) Έστω $\alpha > 0$. Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, \alpha]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς ενώ η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$. Στο $[\alpha, \infty)$ έχουμε $f_n \to f \equiv 1$ κατά σημείο, και

$$|f_n(x) - 1| = \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| = \frac{1}{nx+1} \leqslant \frac{1}{n\alpha + 1}$$

για κάθε $x \geqslant \alpha$, άρα

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{\left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| : x \geqslant \alpha\right\} = \frac{1}{n\alpha+1} \to 0,$$

άρα $f_n \to f \equiv 1$ ομοιόμορφα.

3.8. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει απολύτως. Αποδείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^\infty a_k \sin(kx)$ και $\sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kx)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass: αν $f_k(x) = a_k \sin(kx)$ τότε

$$|f_k(x)| = |a_k \sin(kx)| \leqslant |a_k|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από την υπόθεση, η σειρά $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ συγκλίνει. Άρα, η $\sum_{k=1}^\infty f_k(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \sin(kx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Για την $\sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kx)$ δουλεύουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

3.9. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \infty)$ ή $(-\infty, -\alpha]$, όπου $\alpha > 0$.

Υπόδειξη. Αν $x = 0$ τότε $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2 0^2} = \sum_{k=1}^\infty 1 = +\infty$. Αν $x \neq 0$ τότε

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει.

Έστω $\alpha > 0$. Αν $f_k(x) = \frac{1}{1+k^2x^2}$ τότε, για κάθε $x \in [\alpha, \infty)$,

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2k^2} \leqslant \frac{1}{\alpha^2k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$. Όμοια για το διάστημα $(-\infty, -\alpha]$.

3.10. Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$f_k'(x) = \frac{1-kx^2}{k^\alpha(1+kx^2)^2}.$$

Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0,\infty)$ όταν $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Αφού η f_k είναι περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι

$$\|f_k\|_\infty = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Από την υπόθεση για το α έχουμε $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, άρα η σειρά

$$\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η

$$\sum_{k=1}^\infty f_k(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

3.11. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^\infty (1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$. Αντιθέτως, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k(1-x)$ συγκλινει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Υπόδειξη. (α) Για την $\sum_{k=0}^\infty (1-x)x^k$: υπολογίζουμε τα μερικά αθροίσματα: αν $x=1$ τότε $s_n(1)=0$, ενώ αν $0 \leqslant x < 1$ έχουμε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1} \to 1.$$

Άρα, $s_n(x) \to s(x)$, όπου $s(x)=0$ αν $x=1$ και $s(x)=1$ αν $0 \leqslant x < 1$. Η s είναι ασυνεχής στο σημείο $x=1$, άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(β) Για την $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k(1-x)$: όπως πριν,

$$s_n(x) = (1-x)\sum_{k=0}^n (-x)^k = (1-x)\frac{1-(-1)^{k+1}x^{n+1}}{1+x}.$$

Αν $0 \leqslant x < 1$ τότε $x^{n+1} \to 0$, άρα $s_n(x) \to \frac{1-x}{1+x}$. Αν $x=1$ τότε $s_n(1) = 0 \to 0 = \frac{1-1}{1+1}$. Συνεπώς, $s_n \to s$ κατά σημείο, όπου $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$s(x) = \sum_{k=0}^\infty (1-x)(-1)^k x^k = \frac{1-x}{1+x}.$$

Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε τη διαφορά

$$\left| s_n(x) - \frac{1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x}(-1)^n x^{n+1} \right| = \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1+x} \leqslant x^{n+1} - x^{n+2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto x^{n+1} - x^{n+2}$ (στο $[0,1]$) παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n+1}{n+2}$, η οποία είναι ίση με

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left[1 - \frac{n+1}{n+2}\right] < \frac{1}{n+2}.$$

Συνεπώς,

$$\|s_n - s\|_\infty \leqslant \max_{x\in[0,1]}(x^{n+1}-x^{n+2}) < \frac{1}{n+2} \to 0.$$

Έπεται ότι η σειρά $\frac{1-x}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

3.12. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$.

Υπόδειξη. Έστω $\alpha>0$. Γράφουμε $\sin\left(1+\frac{x}{k}\right) = \sin 1\cdot\cos(x/k)+\cos 1\cdot\sin(x/k)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$.

(α) Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$|f_k(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leqslant \frac{|x|}{k^{3/2}} \leqslant \frac{\alpha}{k^{3/2}}$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{k^{3/2}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$.

(β) Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k}}\left|1-\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{k}}\sin^2\left(\frac{x}{2k}\right) \leqslant \frac{x^2}{2k^{5/2}} \leqslant \frac{\alpha^2}{2k^{5/2}}$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2k^{5/2}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass, η $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$. Από την άλλη πλευρά, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει (από το κριτήριο του Leibniz) άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σαν σειρά (σταθερών!) συναρτήσεων στο $[-\alpha,\alpha]$. Προσθέτοντας, συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$.

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(1+\frac{x}{k}\right) = \sin 1\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{k}\right) + \cos 1\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$.

3.13. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως για καμία τιμή του x.

Υπόδειξη. Έστω $\alpha>0$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$ αν την δούμε σαν σειρά (σταθερών) συναρτήσεων.

Αν ορίσουμε $f_k(x) = (-1)^k\frac{x^2}{k^2}$, τότε

$$|f_k(x)| = \frac{x^2}{k^2} \leqslant \frac{\alpha^2}{k^2}$$

στο $[-\alpha,\alpha]$, και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{k^2}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$. Προσθέτοντας βλέπουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2}{k^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

Για την απόλυτη σύγκλιση παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2+k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}$ δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

3.14. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$$

συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$.

Υπόδειξη. Έστω $0<x<1$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, ελέγχουμε εύκολα ότι οι σειρές $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ και $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2k+2}$ συγκλίνουν. Το ίδιο ισχύει, προφανώς, αν $x=0$. Άρα, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει για κάθε $0\leqslant x<1$. Στην περίπτωση $x=1$ έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 < +\infty.$$

Δηλαδή, η $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει για κάθε $x\in[0,1]$.

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Τότε, η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$$

είναι συνεχής στο $[0,1]$. Γνωρίζουμε ότι: αν $|x|<1$ τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Συνεπώς, για κάθε $x\in[0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2k+2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2(k+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}\\
&= \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln(1+x).
\end{aligned}$$

Αφού $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x)$ στο $[0,1)$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x=1$, θα πρέπει να ισχύει

$$f(1) = \frac{\ln 2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Είναι όμως γνωστό ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2,$$
απ' όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

3.15. Ορίζουμε $I(x) = 0$ αν $x \leqslant 0$ και $I(x) = 1$ αν $x > 0$. Έστω (x_k) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων σε κάποιο διάστημα (a, b) και έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ απολύτως συγκλίνουσα σειρά. Αποδείξτε ότι η
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a, b) και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, b) \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Υπόδειξη. Αν θέσουμε $f_k(x) = c_k I(x - x_k)$ τότε $\|f_k\|_\infty = |c_k|$. Από την υπόθεση έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty$ και, από το κριτήριο του Weierstrass, η σειρά
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a, b).

Θέτουμε $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Αν $x_0 \notin A$ δείχνουμε ότι κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0: διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x_0 < x_k$ και $x_0 > x_k$. Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_0 + \delta < x_k$, και άρα, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f_k(x) = c_k I(x - x_k) = 0$. Αφού η f_k είναι σταθερή σε μια περιοχή του x_0, είναι συνεχής στο x_0. Όμοια, στη δεύτερη περίπτωση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_k < x_0 - \delta$, και άρα, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f_k(x) = c_k I(x - x_k) = c_k$. Αφού η f_k είναι σταθερή σε μια περιοχή του x_0, είναι συνεχής στο x_0. Τώρα, η $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού $s_n \to s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ομοιόμορφα στο (a, b), η $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$ είναι συνεχής στο x_0.

3.16. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, όπου
$$f_n(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad g_n(x) = x^n(1 - x).$$
(β) Εξετάστε για ποιά $x \geqslant 0$ συγκλίνουν οι σειρές
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$
Για ποιές τιμές του $\alpha > 0$ είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, \alpha]$;

Υπόδειξη. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$, όποτ $f(x) = 0$ αν $0 \leqslant x < 1$ και $f(1) = 1$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 1$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Για την g_n παρατηρούμε ότι $g_n'(x) = nx^{n-1} - (n + 1)x^n = x^{n-1}(n - (n + 1)x)$, άρα η g_n παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n}{n+1}$. Έπεται ότι
$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$
Αφού $\|g_n\|_\infty \to 0$, έχουμε $g_n \to 0$ ομοιόμορφα.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει αν $0 \leqslant x < 1$ και αποκλίνει αν $x \geqslant 1$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει αν $0 \leqslant x \leqslant 1$ και αποκλίνει αν $x > 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $0 < a < 1$. Πράγματι, αν $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ τότε $\|f_n\|_\infty = \frac{a^n}{n}$ στο $[0, a]$, και αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a \geqslant 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x = 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $0 < a \leqslant 1$. Πράγματι, αν $g_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ τότε $\|g_n\|_\infty = \frac{a^n}{n^2}$ στο $[0, a]$, και αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a > 1$ τότε η σειρά

$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x \in (1, a]$.

3.17. (α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leqslant \frac{|x|}{n^2},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$$

συγκλίνει (απολύτως) κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\alpha > 0$. Αν ορίσουμε $f_n(x) = \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leqslant \frac{|x|}{n^2} \leqslant \frac{|\alpha|}{n^2}$$

για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, άρα $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{|\alpha|}{n^2}$ στο $[-\alpha, \alpha]$. Αφού $\sum_{n=1}^\infty \frac{|\alpha|}{n^2} < \infty$, το κριτήριο του Weierstrass μας εξασφαλίζει ότι η $\sum_{n=1}^\infty \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$ και η $\sum_{n=1}^\infty \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$. Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο x.

Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3.18. (α) Έστω I διάστημα, $f_n, g_n, f, g : I \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ ώστε $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο I. Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_ng_n \to fg$ ομοιόμορφα στο I.

(β) Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η (f_ng_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f\|_\infty \leqslant M$ και $\|g\|_\infty \leqslant M$. Επίσης, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < 1$, και άρα, $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + M$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_ng_n - fg\|_\infty &\leqslant \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|g(f_n - f)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_n\|_\infty\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\|f_n - f\|_\infty \\ &\leqslant (1 + M)\|g_n - g\|_\infty + M\|f_n - f\|_\infty \to 0,\end{aligned}$$

δηλαδή $f_ng_n \to fg$ ομοιόμορφα στο I.

(β) Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και ορίζουμε $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, $f_n \to f$ ομοιόμορφα (έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Επίσης, ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \frac{1}{n}$. Τότε, $g_n \to 0$ ομοιόμορφα, διότι $\|g_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$.

Όμως, για την ακολουθία των συναρτήσεων $(f_ng_n)(x) = \frac{x}{n}$ έχουμε $f_ng_n \to 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα, αφού $\|f_ng_n - 0\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty$.

3.19. Έστω $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup\{|f_{n_0}(x) - f(x)| : x \in I\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in I$ με $|x - y| < \delta$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $x, y \in I$ με $|x - y| < \delta$, γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.20. Έστω $f, f_n : [a, b] \to [m, M]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Έστω $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Υπόδειξη. Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[m, M]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $t, s \in [m, M]$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|g(t) - g(s)| < \varepsilon$.

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \delta$. Τότε, θέτοντας $t = f_n(x)$ και $s = f(x)$ στην προηγούμενη σχέση, συμπεραίνουμε ότι: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$.

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| < \varepsilon$. Άρα, $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

3.21. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx \to \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Ισχύει πάντα το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

Υπόδειξη. Αφού οι f_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Ειδικότερα, $\|f\|_\infty < +\infty$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x)\, dt - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx \right| &= \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)\, dx + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\, dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx \right| \\ &\leqslant \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)\, dx \right| + \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} (f(x) - f_n(x))\, dx \right| \\ &\leqslant \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f(x)|\, dx + \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(x) - f_n(x)|\, dx \\ &\leqslant \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \|f\|_\infty dx + \int_0^{1-\frac{1}{n}} \|f - f_n\|_\infty dx \\ &\leqslant \frac{1}{n}\, \|f\|_\infty + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f - f_n\|_\infty \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n} + \|f - f_n\|_\infty \to 0, \end{aligned}$$

διότι $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο, το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα αν

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

τότε εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο, όμως,

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = 1 \not\to 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

3.22. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \to 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|\left(x + \frac{1}{n}\right) - x\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \delta$, άρα

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon$.

Αφού $\delta_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Έστω $n \geqslant n_0$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leqslant \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n} f(t)dt - f(x)\right| = \left|\frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n} (f(t) - f(x))\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\,dt \leqslant \frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n} \varepsilon\,dt \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Έπεται ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

3.23. Έστω I διάστημα και $f_n : I \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0 \in I$ και κάθε ακολουθία (x_n) στο I με $x_n \to x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_0)|.$$

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f έχουμε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ και από τη συνέχεια της f στο x_0 (και την υπόθεση ότι $x_n \to x$) έχουμε $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$. Έπεται ότι $|f_n(x_n) - f(x_0)| \to 0$.

3.24. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{1}{n}$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι *ασυνεχής σε κάθε* $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, άρα $f_n \to f \equiv 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ (και η $f \equiv 0$ είναι συνεχής συνάρτηση).

(β) Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ του $[a,b] \cap \mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = 1$ αν $x \in D_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin D_n$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, τα $q_1, \dots, q_n$, άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Επίσης, $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, όπου $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς (παρατηρήστε ότι: αν $x = q_m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geqslant m$, άρα $f_n(x) \to 1 = f(x)$). Τέλος, η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη (κάθε άνω άθροισμα της f είναι ίσο με $b - a$ και κάθε κάτω άθροισμα της f είναι ίσο με 0).

3.25. Αν $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (h_n) όπου $h_n = f_n \circ g_n$ (δηλ. $h_n(x) = f_n(g_n(x))$) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h = f \circ g$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι αφού οι f_n, g_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, οι f, g είναι συνεχείς. Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} |h(t) - h_n(t)| &= |f(g(t)) - f_n(g_n(t))| \leqslant |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |f(g_n(t)) - f_n(g_n(t))| \\ &= |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |(f - f_n)(g_n(t))| \leqslant |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $u, v \in [0,1]$ και $|u - v| < \delta$, τότε $|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon/2$ (αυτό γίνεται, γιατί η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Στη συνέχεια βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $\|g - g_n\|_\infty < \delta$ και $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ για κάθε $n \geqslant n_0$ (αυτό γίνεται, γιατί $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$). Τότε, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $|g(t) - g_n(t)| < \delta$, άρα

$$|h(t) - h_n(t)| \leqslant |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\|h - h_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Άρα, $h_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

3.26. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0,1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x \in [0,1]$. Τότε,

$$\begin{aligned} (*) \qquad |f(x)| &= |f(x) - f_{k_n}(x_{k_n})| \leqslant |f(x) - f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})| \\ &\leqslant |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

διότι $f(x_{k_n}) \to f(x)$ από την αρχή της μεταφοράς για τη συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x, και $\|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0$ λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης των f_n (άρα και των f_{k_n}) στην f.

Από την $(*)$ έπεται άμεσα ότι $f(x) = 0$, δηλαδή η f έχει ρίζα.

3.27. Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση f. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση: έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ διότι η f_n είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y).$$

Από την υπόθεση, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{m} < \delta$ και χωρίζουμε το $[a,b]$ σε m ίσα διαδοχικά διαστήματα, με τα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_m = b$$

όπου $x_k = a + \frac{k(b-a)}{m}$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Αφού $f_n \to f$ κατά σημείο, έχουμε $f_n(x_k) \to f(x_k)$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$,

$$|f(x_k) - f_n(x_k)| < \varepsilon.$$

Έστω $x \in [a,b]$ και $n \geqslant n_0$. Υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ώστε $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία των f, f_n παρατηρούμε ότι

$$f(x) - f_n(x) \leqslant f(x_{k+1}) - f_n(x_k) = [f(x_{k+1}) - f(x_k)] + [f(x_k) - f_n(x_k)] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

και

$$f(x) - f_n(x) \geqslant f(x_k) - f_n(x_{k+1}) = [f(x_k) - f(x_{k+1})] + [f(x_{k+1}) - f_n(x_{k+1})] > -\varepsilon - \varepsilon = -2\varepsilon.$$

Άρα,

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$$

για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

4.1. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\int_0^1 x^n f(x)\,dx=0$ για κάθε $n=0,1,2,\ldots$, αποδείξτε ότι $f\equiv 0$.
(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx=0$ για κάθε $n=0,1,2,\ldots$, αποδείξτε ότι $f\equiv 0$.

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n\to f$ ομοιόμορφα στο [0,1]. Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $fp_n\to f^2$ ομοιόμορφα. Άρα,

$$\int_0^1 (f(x))^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 p_n(x)f(x)\,dx.$$

Όμως, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το $\int_0^1 p_n(x)f(x)\,dx$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των $\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ τα οποία είναι ίσα με μηδέν από την υπόθεση. Άρα, $\int_0^1 p_n(x)f(x)\,dx=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, οπότε $\int_0^1 f^2=0$. Από την τελευταία σχέση έπεται ότι $f\equiv 0$ (εξηγήστε γιατί).
(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(\sqrt{x})$. Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h-p_n\|_\infty<\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $|p_n(x)-h(x)|<1/n$. Έπεται ότι

$$|p_n(x^2)-f(x)|=|p_n(x^2)-h(x^2)|<\frac{1}{n}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in[0,1]$. Θέτοντας $q_n(x)=p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n-f\|_\infty\leqslant 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση. Άρα, η (q_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Έπεται ότι $fq_n\to f^2$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Τότε,

$$\int_0^1 f(x)q_n(x)\,dx\to\int_0^1 (f(x))^2\,dx.$$

Από την υπόθεση έχουμε $\int_0^1 q_n(x)f(x)\,dx=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί), άρα έχουμε το συμπέρασμα.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω F η *άρτια επέκταση* της f στο $[-1,1]$ δηλαδή, $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ f(-x), & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}.$$

Τότε, η F είναι συνεχής. Επιπλέον είναι άρτια, οπότε ισχύει

$$\int_{-1}^1 x^{2n-1}F(x)\,dx=0$$

για $n = 1, 2, \ldots$ (εξηγήστε γιατί) και ακόμη

$$\int_{-1}^{1} x^{2n} F(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} x^{2n} F(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} x^{2n} f(x)\, dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ από την υπόθεση. Άρα, η F ικανοποιεί τις υποθέσεις του (α), οπότε είναι ταυτοτικά μηδέν. Ειδικότερα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

4.2. (α) Έστω $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(γ) Αν $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Υπόδειξη. (α) Αφού οι f, g είναι συνεχείς και $g(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $g(x) - f(x) \geqslant m$ για κάθε $x \in [0, 1]$ (εξηγήστε γιατί). Καθώς, η $\frac{f+g}{2}$ είναι συνεχής, από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|p - \frac{f+g}{2}\|_\infty < \frac{m}{2}$. Τότε, για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει ότι

$$f(x) \leqslant \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{m}{2} < p(x) < \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{m}{2} \leqslant g(x).$$

(β) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0, 1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Έστω $x \in (0, 1]$. Τότε, έχουμε

$$\int_{0}^{x} e^t\, dt < \int_{0}^{x} p(t)\, dt < 2\int_{0}^{x} e^{2t}\, dt$$

δηλαδή,

$$e^x < \int_{0}^{x} p(t)\, dt + 1 < e^{2x}$$

για κάθε $x \in (0, 1]$. Έπεται, ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x},$$

όπου $q(x) = \int_0^x p(t)\, dt + 1$. Παρατηρούμε ότι το q είναι πολυώνυμο, άρα έχουμε το ζητούμενο.

(γ) Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n ώστε

$$h(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < h(x) - \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Παρατηρούμε ότι η (p_n) είναι γνησίως αύξουσα εκ κατασκευής και ότι $|p_n(x) - h(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα $\|p_n - h\|_\infty \leqslant \frac{1}{n} \to 0$. Έπεται ότι η $p_n \to h$ ομοιόμορφα.

4.3. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in C^1([0, 1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_\infty < \varepsilon$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = \int_0^x q(t)\, dt + f(0)$. Τότε, ισχύει $p'(x) = q(x)$ και ακόμη αν $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$|p(x) - f(x)| = \left| \int_{0}^{x} q(t)\, dt - \int_{0}^{x} f'(t)\, dt \right| \leqslant \int_{0}^{x} |f'(t) - q(t)|\, dt \leqslant \varepsilon x \leqslant \varepsilon.$$

Άρα, $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

4.4. Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων *με ακέραιους συντελεστές*, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Υπόδειξη. Έστω $0 < a < b < 1$. Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[0,1]$ σε μια συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$ ως εξής: στο $[0,a]$ την ορίζουμε γραμμική με άκρα τα $(0,0)$ και $(a, f(a))$ και ομοίως στο $[b,1]$. Θεωρούμε την ακολουθία πολυωνύμων

$$P_n(g)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\rfloor x^k(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Τα $P_n(g)$ έχουν ακέραιους συντελεστές και έχουν την ιδιότητα $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ (άρα $P_n(g) \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, το οποίο είναι το ζητούμενο). Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\|P_n(g) - B_n(g)\|_\infty \to 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |B_n(g)(x) - P_n(g)(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} - \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\rfloor\right) x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\binom{n}{k} \geqslant n$ για $k = 1, 2, \dots, n-1$ και στην τελευταία ότι $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$. Άρα, $\|B_n(g) - P_n(g)\|_\infty \leqslant 1/n$ για κάθε $n \geqslant 2$. Έπεται ότι $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

4.5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \dots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $C[0,1]$. Πράγματι· αν (p_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_k[x]$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $(a_0^n), (a_1^n), \dots, (a_k^n)$ ώστε $p_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \cdots + a_k^n x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 1, 2, \dots$ Υποθέτουμε ότι $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία (a_i^n), $i = 0, 1, \dots, k$ συγκλίνει σε κάποιο $a_i \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$. Θεωρούμε $k+1$ σημεία $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ (τυχόντα, αλλά σταθερά) στο διάστημα $[0,1]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{cases} a_0^n + a_1^n t_0 + \cdots + a_k^n t_0^k = p_n(t_0) \\ a_0^n + a_1^n t_1 + \cdots + a_k^n t_1^k = p_n(t_1) \\ \quad\vdots \\ a_0^n + a_1^n t_k + \cdots + a_k^n t_k^k = p_n(t_k) \end{cases}.$$

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k+1) \times (k+1)$ με αγνώστους τα a_j^n, $j = 0, 1, \dots, k$. Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^k \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & t_k & \dots & t_k^k \end{vmatrix},$$

και γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k} (t_j - t_i)$$

και δεν μηδενίζεται, από την επιλογή των t_j. Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a_0^n, a_1^n, \dots, a_k^n)$, η οποία δίνεται ως $a_j^n = \frac{D_j}{D}$ για $j = 0, 1, \dots, k$. Κάθε D_j είναι *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των t_j^i και $p_n(t_j)$ για $i, j = 0, 1, \dots, k$ (δηλαδή ακολουθία ως προς n). Επειδή δε, $p_n(t_j) \to f(t_j)$ για $j = 0, 1, \dots, k$ έχουμε ότι κάθε $(a_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{D}\lim_{n\to\infty} D_j$. Παρατηρήστε ότι χρειαστήκαμε μόνο την κατά σημείο σύγκλιση της (p_n) στην f. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε υπάρχει (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\deg(p_{k_n}) \leqslant m$ για $n = 1, 2, \dots$. Τότε, η ακολουθία (p_{k_n}) περιέχεται στο κλειστό $\mathbb{R}_m[x]$ και συγκλίνει (ομοιόμορφα) στην f.

Άρα, η f είναι πολυώνυμο (βαθμού το πολύ m), άτοπο.

4.6. Αποδείξτε πλήρως ότι οι συναρτήσεις $1, \cos x, \ldots, \cos nx, \sin x, \ldots, \sin nx$ είναι ορθογώνιες.

Υπόδειξη. Για κάθε $k, m = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+m)x + \sin(m-k)x]\, dx = 0$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin sx\, dx = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{Z}$.

Αν $k \neq m$ τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-m)x + \cos(k+m)x]\, dx = 0$$

και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-m)x - \cos(k+m)x]\, dx = 0,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos sx\, dx = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Αν $k = 0$ και $m = 1, \ldots, n$ τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx\, dx = 0.$$

4.7. Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx\, dx.$$

Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\cos(-ky)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [-T(y)\cos ky]\, dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\cos ky\, dy = -\lambda_k.\end{aligned}$$

Από την $\lambda_k = -\lambda_k$ έπεται ότι $\lambda_k = 0$. Για $k = 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\, dy \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\, dy = -\lambda_0,\end{aligned}$$

άρα, $\lambda_0 = 0$.

(β) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx\, dx.$$

Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\sin(-ky)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T(y)(-\sin ky)]\,dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\sin ky\,dy = -\mu_k.\end{aligned}$$

Από την $\mu_k = -\mu_k$ έπεται ότι $\mu_k = 0$.

4.8. Αποδείξτε ότι: για κάθε $k \geqslant 1$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Έχουμε $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = p_1(\cos x)$, όπου $p_1(t) = 1 - t^2$, πολυώνυμο βαθμού 2.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_k(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p_k(\cos x)$. Τότε,

$$\sin^{2k+2} x = \sin^{2k} x \cdot \sin^2 x = p_k(\cos x)p_1(\cos x).$$

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο

$$p_{k+1}(t) = p_k(t)p_1(t) = p_k(t)(1 - t^2)$$

έχει βαθμό $2k + 2$ και $\sin^{2k+2} x = p_{k+1}(\cos x)$.

4.9. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases},$$

και συμπεράνατε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \ldots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \cdots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

Τότε, για κάθε $s = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x}\left(\sum_{j=1}^{n} t_j e^{ik_j x}\right)dx = \sum_{j=1}^{n} t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x}dx \\ &= 2\pi t_s, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j-k_s)x}dx = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$. Έπεται ότι $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένοι. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n$ ισχύει

$$t_1 e^{i\lambda_1 x} + t_2 e^{i\lambda_2 x} + \cdots + t_n e^{i\lambda_n x} \equiv 0.$$

Παραγωγίζοντας $n-1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x=0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\ \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots + \lambda_n t_n &= 0 \\ \lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 t_2 + \cdots + \lambda_n^2 t_n &= 0 \\ \cdots & \qquad\qquad \cdots \\ \lambda_1^{n-1} t_1 + \lambda_2^{n-1} t_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} t_n &= 0. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$.

4.10. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $p(x) = q(x)$ για κάθε x σε ένα $A \subseteq [0, 2\pi)$ με πληθάριθμο $|A| \geqslant 2n+1$, αποδείξτε ότι $a_k = b_k$ για κάθε $|k| \leqslant n$.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $r(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = 0$ για όλα τα x στο σύνολο των $2n+1$ διακεκριμένων πραγματικών αριθμών $\{y_1, \ldots, y_{2n+1}\} \subset [0, 2\pi)$, τότε $c_k = 0$ για κάθε $|k| \leqslant n$. Αυτό προκύπτει άμεσα αν δείξουμε ότι ο $(2n+1) \times (2n+1)$ πίνακας με (s,k) συντεταγμένη e^{iky_s}, όπου $|k| \leqslant n$ και $1 \leqslant s \leqslant 2n+1$, είναι αντιστρέψιμος. Αν θέσουμε $u_s = e^{iy_s}$, τότε οι u_s είναι διακεκριμένοι (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι όλοι οι y_s ανήκουν στο $[0, 2\pi)$ και είναι διακεκριμένοι, άρα οι e^{iy_s} είναι επίσης διακεκριμένοι) και ο παραπάνω πίνακας, μετά από μετάθεση των στηλών του, γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \ldots & u_1^{2n+1} \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \ldots & u_2^{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \\ 1 & u_{2n+1} & u_{2n+1}^2 & \ldots & u_{2n+1}^{2n+1} \end{pmatrix},$$

και γνωρίζουμε ότι η ορίζουσά του ισούται με

$$D = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1} (u_j - u_i)$$

και δεν μηδενίζεται. Έπεται ότι το σύστημα των εξισώσεων

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{iky_s} = \sum_{k=-n}^{n} c_k u_s^k = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

με αγνώστους c_k έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

4.11. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n. Αποδείξτε ότι το $p(x)$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές αν και μόνο αν για κάθε $|k| \leqslant n$ ισχύει $a_{-k} = \overline{a_k}$.

Υπόδειξη.

4.12. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικές f_e και f_o τέτοιες ώστε: η f_e είναι άρτια, η f_o είναι περιττή, και $f = f_e + f_o$.

(β) Έστω $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.

(γ) Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.

Υπόδειξη.

4.13. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-m}^{m} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $r(x) = p(x)q(x)$ αποδείξτε ότι το $r(x)$ είναι επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο και εκφράστε τους συντελεστές του συναρτήσει των συντελεστών a_k, b_k των $p(x)$ και $q(x)$.

Υπόδειξη.

4.14. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και $m \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $q(x) = p(x)e^{imx}$ είναι μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε τους συντελεστές του.

Υπόδειξη.

4.15. (α) Για κάθε $k \geqslant 1$ θέτουμε

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Αποδείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, αποδείξτε ότι

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $k > m$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} A_k(x) - A_m(x) &= \sum_{j=m+1}^{k} \sin(jx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \sin(x/2)\sin(jx) \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \left[\cos((j-1/2)x) - \cos((j+1/2)x)\right] \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \left[\cos((m+1/2)x) - \cos((k+1/2)x)\right]. \end{aligned}$$

Από την $|\cos t| \leqslant 1$ έπεται ότι

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{2}{2|\sin(x/2)|} = \frac{1}{\sin(x/2)},$$

διότι για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει ότι $\sin(x/2) > 0$

(β) Χρησιμοποιούμε άθροιση κατά μέρη: γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin(jx) &= \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j (A_j(x) - A_{j-1}(x)) \\ &= \lambda_k A_k(x) - \lambda_{m+1} A_m(x) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) A_j(x) \\ &= \lambda_k (A_k(x) - A_m(x)) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})(A_j(x) - A_m(x)), \end{aligned}$$

διότι

$$\lambda_{m+1} A_m(x) = \left[\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \right] A_m(x).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το (α) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m+1}^{k}\lambda_j\sin(jx)\right| &\leqslant \lambda_k|A_k(x)-A_m(x)|+\sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})|A_j(x)-A_m(x)|\\ &\leqslant \frac{1}{\sin(x/2)}\left(\lambda_k+\sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})\right)\\ &= \frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

4.16. Έστω $n\geqslant 1$ και $M>0$. Αν $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$ και $k\lambda_k\leqslant M$ για κάθε $k=1,\dots,n$, αποδείξτε ότι

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx\right|\leqslant(\pi+1)M$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<x<\pi$ διότι η συνάρτηση $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx$ είναι περιττή, 2π-περιοδική και μηδενίζεται στα σημεία $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin kx+\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx,$$

όπου $m=\min\{n,\lfloor\pi/x\rfloor\}$. Για το πρώτο άθροισμα έχουμε

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin(kx)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{M\sin kx}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{Mkx}{k}=Mmx\leqslant M\pi,$$

διότι $m=\lfloor\pi/x\rfloor\leqslant\pi/x$. Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 4.15 (β): έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx\right|\leqslant\frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)}\leqslant\frac{M}{(m+1)\sin(x/2)}\leqslant M,$$

διότι $m+1>\pi/x$, άρα

$$(m+1)\sin(x/2)\geqslant\frac{\pi}{x}\frac{2x}{2\pi}=1$$

από την $\sin y\geqslant\frac{2y}{\pi}$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$.

4.17. (α) Έστω $0<\delta<\pi$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$,

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\qquad\text{και}\qquad\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k\to 0$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty}t_k\cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty}t_k\sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0,2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta,2\pi-\delta]$, όπου $0<\delta<\pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,2\pi)$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $A_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$ ως εξής:

$$2\sin(x/2)A_n(x)=\sin(x/2)+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{x}{2}-kx\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+kx\right)\right]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ ισχύει ότι $\sin(x/2) > 0$, άρα

$$A_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin(x/2)}.$$

Αν $0 < \delta < \pi$ τότε για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ισχύει $\sin(x/2) \geqslant \sin(\delta/2)$. Επομένως, έχουμε

$$|A_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Για το άλλο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ και εργαζόμαστε ανάλογα.

(β) Για να δείξουμε την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy για σειρές πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Dirichlet: Αν (ε_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\varepsilon_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ σειρά πραγματικών αριθμών με φραγμένα μερικά αθροίσματα, δηλαδή υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $|u_1 + \cdots + u_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ συγκλίνει.

Τώρα, το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συγκλίνουσα είναι άμεση συνέπεια του (α) σε συνδυασμό με το κριτήριο Dirichlet. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n αρκεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n και ως προς $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Μια άλλη, πιο άμεση απόδειξη (η οποία όμως ακολουθεί την ίδια ιδέα) θα ήταν η εξής: Έστω $x \in (0, 2\pi)$ τυχόν αλλά σταθερό. Θεωρούμε την σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$. Παρατηρήστε από το (α) ότι $\cos kx = A_k(x) - A_{k-1}(x)$ με $A_0(x) \equiv \frac{1}{2}$. Τότε, αν $1 \leqslant n < m$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k (A_k(x) - A_{k-1}(x))\right| \\
&= \left|-t_{n+1}A_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})A_k(x) + t_m A_m(x)\right| \\
&\leqslant t_{n+1}|A_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})|A_k(x)| + t_m|A_m(x)| \\
&\leqslant 2t_{n+1} \max_{n+1 \leqslant k \leqslant m} |A_k(x)| \leqslant \frac{t_{n+1}}{\sin(x/2)},
\end{aligned}$$

από το (α). Καθώς, $t_k \to 0$ έπεται από το κριτήριο του Cauchy ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, τότε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| \leqslant \frac{t_n}{\sin(\delta/2)},$$

ομοιόμορφα ως προς x, επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Αφού έχουμε σειρά συνεχών συναρτήσεων, έπεται ότι άθροισμά της είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Επειδή το $\delta \in (0, \pi)$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συνεχής. Για την άλλη σειρά εργαζόμαστε ανάλογα.

4.18. (Λήμμα του Stečkin). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$T(x_0) = \|T\|_\infty = \max\{|T(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αποδείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ τότε

$$T(x_0 + t) \geqslant \|T\|_\infty \cos(nt).$$

Υπόδειξη.

4.19. (Ανισότητα του Bernstein). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Αποδείξτε ότι
$$\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Παίρνοντας αν χρειαστεί το $-T$ στη θέση του T, θεωρούμε x_0 τέτοιο ώστε
$$T'(x_0) = \|T'\|_\infty.$$

Από την προηγούμενη άσκηση, για κάθε $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ έχουμε
$$T'(x_0 + t) \geqslant \|T'\|_\infty \cos(nt).$$

Άρα,
$$\begin{aligned} T\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right) - T\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right) &= \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} T'(x_0 + t)dt \geqslant \|T'\|_\infty \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos(nt)dt \\ &= \|T'\|_\infty \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{n}\|T'\|_\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\begin{aligned} \|T'\|_\infty &\leqslant \frac{n}{2}\left(\left|T\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right)\right| + \left|T\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right)\right|\right) \\ &\leqslant \frac{n}{2} \cdot 2\|T\|_\infty = n\|T\|_\infty. \end{aligned}$$

4.20. Έστω $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το T παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο Q ώστε
$$T(x) = |Q(x)|^2$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $c_n \neq 0$. Παρατηρήστε ότι, από την Άσκηση 4.11, $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και ότι
$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\,dx > 0.$$

Θεωρούμε το μιγαδικό πολυώνυμο
$$P(z) = z^n \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = c_{-n} + c_{1-n}z + \cdots + c_n z^{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned} \overline{P(1/\overline{z})} &= \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k (\overline{z})^{-n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} z^{-n-k} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_{-k} z^{-n-k} = \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m-n} = z^{-2n} \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m+n} \\ &= z^{-2n} P(z). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $P(z) = 0$ αν και μόνο αν $P(1/\overline{z}) = 0$. Επίσης, $P(0) \neq 0$ και $P(w) \neq 0$ για κάθε $w \in \mathbb{T}$, διότι αν $w = e^{ix}$ τότε $P(w) = e^{inx}T(x) \neq 0$ από την υπόθεση ότι το T δεν μηδενίζεται. Άρα, οι ρίζες του P είναι n ζεύγη $z_k, 1/\overline{z_k}$ με

$0 < |z_k| < 1$ ($k = 1, \dots, n$). Δηλαδή, υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ ώστε

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right).$$

Θέτουμε $P_1(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} P_2(z) &:= \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right) = \frac{1}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} z \left(\overline{z_k} - \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z} - \overline{z_k} \right) \\ &= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}} - z_k \right)} \\ &= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \overline{P_1 \left(1/\overline{z} \right)}. \end{aligned}$$

Άρα, αν $|z| = 1$ έχουμε

$$|P_2(z)| = |\overline{P_2(z)}| = \left| \frac{(-1)^n \overline{z}^n}{z_1 \cdots z_n} P_1 \left(\frac{1}{\overline{z}} \right) \right| = \frac{(-1)^n |\overline{z}|^n}{|z_1 \cdots z_n|} |P_1 \left(1/\overline{z} \right)| = \frac{|P_1(z)|}{|z_1 \cdots z_n|}.$$

Τώρα γράφουμε

$$T(x) = |T(x)| = |e^{-inx} P(e^{ix})| = |a P_1(e^{ix}) P_2(e^{ix})| = |a| \cdot |P_1(e^{ix})| \cdot \frac{|P_1(e^{ix})|}{|z_1 \cdots z_n|},$$

και αν ορίσουμε

$$Q(x) = \left(\frac{|a|}{|z_1 \cdots z_n|} \right)^{1/2} P_1(e^{ix})$$

έχουμε

$$T(x) = |Q(x)|^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σειρές Fourier

5.1. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

Υπόδειξη. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y-2\pi)\,dy = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)\,dy = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx,$$

διότι $f(y-2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x - 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y+2\pi)\,dy = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)\,dy = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

διότι $f(y+2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + a$ παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,dy = \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,dy$$

από την 2π-περιοδικότητα της f, άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,dy &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,dy + \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,dy \\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,dy + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

5.2. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\|g\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|f\|_\infty$ και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon^2/9(\|f\|_\infty + 1),$$

οπότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| \cdot (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\, dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{9(\|f\|_\infty + 1)} \cdot 3\|f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} &\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} + 2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, λόγω της 2π-περιοδικότητας της $f - g$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει λοιπόν $t_0 > 0$ ώστε: αν $|t| < t_0$ τότε $|g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $|t| < t_0$ έχουμε

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9 \cdot 2\pi} dx\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon$$

για κάθε $|t| < t_0$. Άρα,

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = 0,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

5.3. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x + \pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Υπόδειξη. (α) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Έπεται ότι $b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = 0$ για κάθε $k \geqslant 1$, άρα η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-f(y))e^{-iky}dy = -\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Έπεται ότι $a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) = 0$ για κάθε $k \geqslant 1$, άρα η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αν ο k είναι περιττός.

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)e^{-ikx}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx \\ &= \widehat{f}(-k).\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}e^{-ikx}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5.4. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Το γράφημα της τ_a είναι μεταφορά του γραφήματος της f κατά a. Το σημείο $(x, f(x))$ μεταφέρεται στο $(x+a, \tau_a(x+a)) = (x+a, f(x))$. Έχουμε

$$\tau_a(x+2\pi) = f(x-a+2\pi) = f(x-a) = \tau_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η τ_a είναι 2π-περιοδική. Τέλος, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_a}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ikx}dx = e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ik(x-a)}dx \\ &= e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = e^{-ika}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

5.5. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Η g_m έχει περίοδο $2\pi/m$ (άρα και 2π) και το γράφημά της είναι το γράφημα της f συμπιεσμένο: σε ένα διάστημα μήκους 2π «επαναλαμβάνεται» m-φορές. Αν $m \mid k$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(y)e^{-iky/m}$ είναι 2π-περιοδική, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi m}^{\pi m} f(y)e^{-iky/m}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i(k/m)y}dy = \widehat{f}(k/m).\end{aligned}$$

Αν ο m δεν διαιρεί τον k, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(my)e^{-iky}$ είναι 2π-περιοδική γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my+2\pi)e^{-ik(y+2\pi/m)}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my)e^{-iky}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(my)e^{-iky}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\widehat{g_m}(k).\end{aligned}$$

Αφού ο m δεν διαιρεί τον k, έχουμε $e^{-i2k\pi/m} \neq 1$, άρα $\widehat{g_m}(k) = 0$.

5.6. Έστω $f, f_n \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| \leqslant \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) e^{-ikx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x) - f(x)) e^{-ikx} dx \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)| \, |e^{-ikx}| \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)| \, dx \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

5.7. Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Υπόδειξη. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x) \sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}
b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx \\
&= \left[-2 \frac{(\pi - x) \cos kx}{\pi k} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx \\
&= \frac{2\pi}{\pi k} + \left[\frac{2 \sin kx}{\pi k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{k}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f, x) \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

5.8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$S(f, x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi,\pi]$. Έχουμε $f(x)=(\pi-x)^2$ αν $0<x<\pi$ και $f(x)=f(x+2\pi)=(-\pi-x)^2=(\pi+x)^2$ αν $-\pi<x<0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x)=(\pi-x)^2=f(x)$$

για κάθε $0<x<\pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi,\pi]$. Συνεπώς,

$$b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=0$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε

$$\frac{a_0(f)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2dx=\left[\frac{-(\pi-x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi}=\frac{2\pi^3}{6\pi}=\frac{\pi^2}{3}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k\geqslant 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}
a_k(f)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos kx\,dx\\
&=\left[\frac{2(\pi-x)^2\sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(\pi-x)\sin kx}{k}\,dx\\
&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin kx}{k}\,dx\\
&=\left[-\frac{4(\pi-x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\\
&=\frac{4\pi}{\pi k^2}=\frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|+|b_k(f)|)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0)=\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{4}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

5.9. Έστω $0<\alpha\leqslant 1$ και έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M>0$ ώστε

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε k,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^\alpha} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^\alpha}.$$

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx-\pi)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,dx, \end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της f. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-\pi/k)]\cos(kx)\,dx,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-\pi/k)|\,|\cos(kx)|\,dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^\alpha dx = \frac{C}{k^\alpha},$$

όπου $C = M\pi^\alpha$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leqslant C/k^\alpha$.

5.10. Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και αποδείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0) = 0$. Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k} + \frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,dx \\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - \frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx \\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - i\frac{(-1)^k\pi}{k} + \frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{-ikx}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}(e^{ikx}-e^{-ikx})\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)x),\end{aligned}$$

διότι $(-1)^k-1=0$ αν ο k είναι άρτιος, και

$$2i[(-1)^k-1](e^{i(2k+1)x}-e^{-i(2k+1)x}) = -4i(2i\sin((2k+1)x)) = 8\sin((2k+1)x).$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \sum_{k\neq 0}\frac{2|(-1)^k-1|}{\pi k^3} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

5.11. Έστω $0<\delta<\pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x|\leqslant\delta\\ 0 & \text{αν } \delta\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και αποδείξτε ότι

$$f(x)=\frac{\delta}{2\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta}\cos kx.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)dx=\frac{\delta}{2\pi}.$$

Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)e^{-ikx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\cos(kx)\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{x\sin(kx)}{\delta k}-\frac{\cos(kx)}{\delta k^2}\right]_0^{\delta}\\ &= \frac{\sin(k\delta)}{\pi k}-\frac{\delta\sin(k\delta)}{\pi\delta k}+\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\\ &= \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}S(f,x) &\sim \frac{\delta}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}e^{ikx}=\frac{\delta}{2\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx})\\ &= \frac{\delta}{2\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\cos(kx).\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5.12. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
S(f,x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{(-1)^k-1}{\pi k^2} e^{ikx} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k-1]}{\pi k^2}\cos(kx) \\
&= \frac{\pi}{2} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).
\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2},$$

δηλαδή
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$
Τότε,
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$
απ᾽ όπου έπεται ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

5.13. Έστω $f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$.

(α) Αποδείξτε ότι
$$\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx=0.$$
(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Αποδείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,
$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\int_0^{2\pi}f(x+\frac{\pi}{n})\sin nx\,dx,$$
και συμπεράνατε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

Υπόδειξη. (α). Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής. Εφόσον, είναι και 2π-περιοδική θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\varepsilon>0$ τυχόν, υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε αν $|t|<\delta$ τότε $|f(x+t)-f(x)|\leqslant\varepsilon$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, αν $0<|t|<\delta$ τότε,
$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(t)|\,dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon\,dt=2\pi\varepsilon.$$
Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι συνεχής. Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$ και f_ε συνεχή 2π-περιοδική ώστε $\int_{-\pi}^{\pi}|f-f_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$. Τότε, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας παίρνουμε:
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f_\varepsilon(x+t)|\,dx\\&\quad+\int_{-\pi}^{\pi}|f_\varepsilon(x+t)-f_\varepsilon(x)|\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}|f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx\\&=2\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}|f_\varepsilon(x+t)-f_\varepsilon(x)|\,dx.\end{aligned}$$
Έπεται ότι,
$$\limsup_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx\leqslant 2\varepsilon+\limsup_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f_\varepsilon(x+t)-f_\varepsilon(x)|\,dx=2\varepsilon.$$
Καθώς, το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν το ζητούμενο έπεται.

(β) Με την αλλαγή μεταβλητής $x=y+\pi/n$ έχουμε:
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx&=\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}f\left(y+\tfrac{\pi}{n}\right)\sin(\pi+ny)\,dy\\&=-\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\tfrac{\pi}{n}\right)\sin(nx)\,dx.\end{aligned}$$
Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:
$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\tfrac{\pi}{n}\right)\right|\,dx.$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από το (α) για $t = \pi/n \to 0$.

5.14. (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ αποδείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)$ αποδείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Επεκτείνουμε την $f : [\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x\pi \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Επομένως, έχουμε $a_k(f) = 0$, αφού f περιττή και

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin kx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(k-1)x + \sin(k+1)x]\,dx. \end{aligned}$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $b_k = 0$ ενώ αν ο $k = 2s$ τότε

$$b_{2s}(f) = \frac{8}{\pi}\frac{s}{4s^2-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$S(f,x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Αφού η $f|_{(0,\pi)}$ είναι παραγωγίσιμη, έπεται (από το θεώρημα Dini) ότι αν $0 < x < \pi$ τότε

$$\cos x = f|_{(0,\pi)}(x) = S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Για το (β) δουλεύουμε ανάλογα.

5.15. Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\,e^{ikx}.$$

Αποδείξτε ότι η $S(f)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f,x)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη.

5.16. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \leqslant C\ln(1+n)\|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$s_n(f,x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(y)dy$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$|s_n(f,x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|\,|D_n(y)|\,dy \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)|\,dy.$$

Δηλαδή,

$$\|s_n(f)\|_\infty = \sup_x |s_n(f,x)| \leqslant L_n\|f\|_\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι $L_n \leqslant C\ln(1+n)$, όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n, άρα έπεται το ζητούμενο.

5.17. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\,dt = 1.$$

Αποδείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \longrightarrow f \ \text{ ομοιόμορφα.}$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)dt = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_n(t)dt = 2\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)dt \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

Έστω $0 < \delta < \pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leqslant \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$ για κάθε $t \in [\delta,\pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)dt \leqslant 2\pi\alpha_n\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leqslant 2n+1$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim_{n\to\infty}(2n+1)\vartheta^n = 0$ για $\vartheta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n = 2\int_0^{\pi}\cos^{2n}(t/2)dt = 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} y\,dy.$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0,\pi/2]$ και $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$. Συνεπώς, $\cos y \geqslant 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0,\pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geqslant 4\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{2y}{\pi}\right)^{2n} dy = 2\pi\int_0^1 (1-s)^{2n}ds = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leqslant 2n+1$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει ότι $f * Q_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε το εξής: η συνέλιξη μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης με ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο). Έτσι, έχουμε άλλη μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

5.18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g(x)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η g είναι 2π-περιοδική, και $g(x)=g(x+2\sqrt{2}\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi}g(x-2\sqrt{2}\pi)e^{-ik(x-2\sqrt{2}\pi)}dx\\&=e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi}g(x)e^{-ikx}dx=e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}dx\\&=e^{ik2\sqrt{2}\pi}\widehat{g}(k).\end{aligned}$$

Αν $k\neq 0$ έχουμε $e^{ik2\sqrt{2}\pi}\neq 1$, δηλαδή $\widehat{g}(k)=0$ για κάθε $k\neq 0$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε την $h(x)=g(x)-\widehat{g}(0)$ τότε βλέπουμε ότι $\widehat{h}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, άρα $h\equiv 0$. Έπεται ότι $g(x)=\widehat{g}(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι σταθερή. Άρα, και η f είναι σταθερή.

5.19. Έστω $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$s_n(f)*g=s_n(f*g)=f*s_n(g).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι $s_n(f)=(f*D_n)$ και ότι η πράξη $*$ της συνέλιξης είναι προσεταιριστική και μεταθετική:

$$s_n(f)*g=(f*D_n)*g=f*(D_n*g)=f*(g*D_n)=f*s_n(g).$$

Όμοια δείχνουμε και την άλλη ισότητα:

$$s_n(f)*g=(f*D_n)*g=f*(D_n*g)=f*(g*D_n)=(f*g)*D_n=s_n(f*g).$$

5.20. Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p>1$,

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n\|_p=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|^pdx\right)^{1/p}=+\infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p>1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p+1/q=1$. Για κάθε $0<\eta<\pi$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\eta=\chi_{[-\eta,\eta]}$. Από την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$(\eta/\pi)^{1/q}\|K_n\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_\eta(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\|K_n\|_p\geqslant\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)g_\eta(x)\,dx\right|.$$

Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες των καλών πυρήνων παίρνουμε

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)g_\eta(x)\,dx\right|=\left|1-\frac{1}{2\pi}\int_{\eta<|x|\leqslant\pi}K_n(x)\,dx\right|.$$

Έστω $M>0$. Υπάρχει $\eta\in(0,\pi)$ ώστε $(\pi/\eta)^{1/q}>2M$. Επιπλέον, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $n\geqslant n_0$ τότε

$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\eta<|x|\leqslant\pi} K_n(x)\,dx\right| < 1/2$ (εξηγήστε γιατί). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $n \geqslant n_0$ τότε

$$\|K_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $\|K_n\|_p \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

5.21. Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, ολοκληρώνουμε την απόδειξη ως εξής: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε τέτοιο ώστε $\|f - p_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p_\varepsilon(x)|\,|g(nx)|\,dx \\
&\qquad\quad + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_\varepsilon(x)g(nx)\,dx - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + |\widehat{p_\varepsilon}(0) - \widehat{f}(0)|\,|\widehat{g}(0)| \\
&\qquad\leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1\|g\|_\infty + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_\varepsilon(x)g(nx)\,dx - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + \|p_\varepsilon - f\|_1|\widehat{g}(0)| \\
&\qquad\leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|) + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_\varepsilon(x)g(nx)\,dx - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right|,
\end{aligned}$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| \leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| = 0.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, και λόγω γραμμικότητας του ζητούμενου ως προς f μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) = e^{ikx}$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Αν $k = 0$ είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(nx)\,dx &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} g(y)\,dy = \frac{1}{n}\cdot n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy = \widehat{g}(0)
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λόγω της περιοδικότητας της g. Μένει να δείξουμε ότι, για κάθε $k \neq 0$,

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}g(nx)\,dx = 0.$$

Παρόμοιο επιχείρημα με το αρχικό δείχνει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Σε αυτή την περίπτωση ελέγχουμε την $(*)$ με απλές πράξεις.

5.22. Έστω $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*) \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$ του ιδίου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r = f^{-1}(I_r)$, $r = 1, \ldots, m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ του $[-\pi, \pi]$, όπου $[b_s, b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s = \inf\{f(x) : b_s \leqslant x \leqslant b_{s+1}\}$, τότε $|f(x) - t_s| \leqslant \frac{1}{m}$ στο (b_s, b_{s+1}). Επίσης, $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα. Αν ορίσουμε $g_m(x) = \sum_{s=1}^{N} t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής $(*)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)| \leqslant M$, τότε από την $(**)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |k\widehat{f}(k)| &\leqslant |k\widehat{g_m}(k)| + |k||\widehat{f}(k) - \widehat{g_m}(k)| \\ &\leqslant M + |k| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant M + |k| \frac{1}{m} \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m \to \infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)| \leqslant M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$: αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{b_s}^{b_{s+1}} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi i k}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x) = \sum_{s=1}^{N} t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$,

$$2\pi i k \widehat{g}(k) = \sum_{s=1}^{N} t_s (e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}) = t_1 e^{-ib_1 x} - t_N e^{-ib_{N+1} x} + \sum_{s=2}^{N} e^{-ikb_s}(t_s - t_{s-1}).$$

Συνεπώς,

$$2\pi |k\widehat{g}(k)| \leqslant |t_1| + |t_N| + \sum_{k=2}^{N} (t_s - t_{s-1}) = |t_1| + |t_N| + (t_N - t_1) \leqslant 4\|f\|_\infty,$$

διότι $t_N - t_1 \leqslant \|f\|_\infty - (-\|f\|_\infty) = 2\|f\|_\infty$. Έπεται το ζητούμενο, με $M = 2\|f\|_\infty / \pi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Αθροισιμότητα σειρών Fourier

6.1. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \cdots + c_n$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Θέτοντας $s_0 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})r^k\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - r\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k\\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $s_n = c_1 + \cdots + c_n \to 0$. Επειδή η (s_k) είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_k| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|s_k| < \varepsilon$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| &\leqslant (1-r)\sum_{k=1}^{k_0} |s_k| r^k + (1-r)\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |s_k| r^k\\ &\leqslant (1-r)Mr\frac{1-r^{k_0}}{1-r} + \varepsilon(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} r^k\\ &\leqslant M(1-r^{k_0}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $r_0 \in (0,1)$ ώστε $M(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$, τότε για κάθε $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| < 2\varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to 0$ καθώς $r \to 1^-$.

Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας την $(*)$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(s_k-s)r^k + (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} sr^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(s_k-s)r^k + (1-r)s\cdot\frac{r}{1-r} \\ &\to 0+s=s.\end{aligned}$$

Για το (β): αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(**)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

Έχουμε ότι $\sigma_{k+1} = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_k}{k+1}$. Άρα, θέτοντας $\sigma_0 = 0$ έχουμε $s_k = (k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k$ για $k = 0,1,\ldots$. Τότε, χρησιμοποιώντας και την πρώτη ταυτότητα από το (α), έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k]r^k \\ &= (1-r)\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k\right] \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k-s)kr^k + (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} skr^k \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k-s)kr^k + rs,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1.$$

Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, έχουμε $\sigma_k - s \to 0$. Ειδικότερα, η $(\sigma_k - s)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $B > 0$ ώστε $|\sigma_k - s| \leqslant B$ για κάθε k. Αφού $\sigma_k - s \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε

$|\sigma_k - s| < \varepsilon$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k - s\right| &\leqslant (1-r)^2 \sum_{k=1}^{k_0} |\sigma_k - s| k r^k + (1-r)^2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\sigma_k - s| k r^k + |s - rs| \\ &\leqslant (1-r) k_0 B (1 - r^{k_0}) + \varepsilon r + (1-r)|s|.\end{aligned}$$

Έστω $r_0 \in (0,1)$ ώστε $Bk_0(1 - r_0^{k_0}) < \varepsilon$ και $(1-r_0)|s| < \varepsilon$. Τότε, αν $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon r + (1-r)|s| < 3\varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to s$ καθώς $r \to 1^-$.

6.2. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t \to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t \to x^+} f(t).$$

Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Cesàro αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = \lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x^-)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x^+)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η K_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f * K_n)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y)\, dy - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\, dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(y)\, [f(x-y) - f(x^-)]\, dy.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\, dy\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} K_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x^+)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} K_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} K_n(y)\, dy \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\, dy = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(y)\, (|f(x-y)| + |f(x^+)|\, dy \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(y)\, dy \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_n(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

6.3. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f,x) = \lim_{r\to 1^-}(f * P_r)(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y)-f(x^-)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y)-f(x^+)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η P_r είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}
(f * P_r)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y)\,dy - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy.
\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y)-f(x^+)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,dy\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,(|f(x-y)|+|f(x^+)|\,dy\\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,dy \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $r\to 1^-$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $r_0\in(0,1)$ ώστε, για κάθε $r_0\leqslant r<1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy\to 0$$

καθώς το $r\to 1^-$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy\to 0$$

καθώς το $r\to 1^-$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

6.4. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x)=K_n(x)\sin nx,$$

όπου K_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Αποδείξτε ότι: αν $p\in\mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$p'(x)=-2n(p*G_n)(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|p'(x)|\leqslant 2n\|p\|_\infty$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|p'\|_\infty\leqslant n\|p\|_\infty$ για κάθε $p\in\mathcal{T}_n$.

Υπόδειξη. Τα δύο μέλη της ισότητας $T'(x)=-2n(T*G_n)(x)$ είναι γραμμικά ως προς T, αρκεί λοιπόν να την επαληθεύσουμε για όλες τις συναρτήσεις $T_k(x)=e^{ikx}$, $|k|\leqslant n$. Έχουμε

$$T_k'(x)=ike^{ikx}$$

και

$$\begin{aligned}(T_k*G_n)(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_k(x-y)G_n(y)\,dy\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik(x-y)}K_n(y)\sin(ny)\,dy\\ &=\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik(x-y)}e^{isy}\sin(ny)\,dy\\ &=e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(s-k)y}\frac{e^{iny}-e^{-iny}}{2i}\,dy\\ &=\frac{1}{2i}e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{i(s-k+n)y}-e^{i(s-k-n)y}]\,dy.\end{aligned}$$

Έχουμε
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k+n)y}dy = 0$$
εκτός αν $s = k - n$ και
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k-n)y}dy = 0$$
εκτός αν $s = n + k$. Το πρώτο μπορεί να συμβεί μόνο αν $k > 0$ και το δεύτερο μόνο αν $k < 0$. Συνεπώς, αν $0 < k < n$ έχουμε
$$(T_k * G_n)(x) = \frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$
Αν $-n < k < -1$, έχουμε
$$(T_k * G_n)(x) = -\frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n+k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$
Σε κάθε περίπτωση, αν $k \neq 0$ παίρνουμε

$$(*) \qquad T_k'(x) = -2n(T_k * G_n)(x).$$

Αν πάλι $k = 0$, τα δύο μέλη της $(*)$ είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, έχουμε αποδείξει την $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n.

Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$\begin{aligned}|T'(x)| &= 2n|(T * G_n)(x)| \leqslant 2n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T(x-y)|\,|K_n(y)\sin ny|\,dy\\ &\leqslant 2n\|T\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)\,dy = 2n\|T\|_\infty.\end{aligned}$$

6.5. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2} = 0,$$
δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g_n := s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)$. Χρησιμοποιώντας την $\sigma_n = \frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n}$ και την υπόθεση, θα δείξουμε ότι $g_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε
$$\begin{aligned}|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)| &= \frac{|(s_0-s_n)+(s_1-s_n)+\cdots(s_{n-1}-s_n)|}{n}\\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|\\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}1\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|\\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k|a_k\cos kx + b_k\sin kx|.\end{aligned}$$
Αν χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη ανισότητα $|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε

βρίσκουμε:

$$\|s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$. Από το θεώρημα του Fejér ξέρουμε $\|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \to 0$. Από την τριγωνική ανισότητα

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \|\sigma_{n+1}(f) - s_n(f)\|_\infty$$

έπεται το ζητούμενο.

6.6. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι ο τελεστής $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \to \mathcal{R}(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér K_n, $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\|T(g)\|_1 = \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής και $\|T\| \leqslant \|f\|_1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\|K_n\|_1 = 1$, άρα

$$\|T\| \geqslant \|T(K_n)\|_1 = \|K_n * g\|_1 = \|\sigma_n(g)\|_1.$$

Αφού $\|\sigma_n(g) - g\|_1 \to 0$ (εξηγήστε γιατί), έχουμε $\|\sigma_n(g)\|_1 \to \|g\|_1$. Συνεπώς,

$$\|T\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(g)\|_1 = \|g\|_1.$$

6.7. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx} \quad \text{και} \quad s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Άρα,

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Αφού $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε k, έπεται ότι

$$\begin{aligned} |s_n(f,x)| &\leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)| + \sum_{k=-n}^{n}\frac{|k\widehat{f}(k)|}{n+1}|e^{ikx}| \leqslant \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \frac{(2n+1)A}{n+1} \\ &\leqslant \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + 2A. \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty = \|f * K_{n+1}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\|K_{n+1}\|_1 = \|f\|_\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

6.8. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Για κάθε $k \neq 0$ και $n \geqslant |k|$ έχουμε

$$(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = -\frac{|k|}{n}\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{n}{|k|}\,|(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k)| \leqslant \frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f) - f\|_1 \leqslant \frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f) - f\|_p.$$

Από την $n\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$ έπεται ότι

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{|k|} \cdot n\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to \frac{1}{|k|} \cdot 0 = 0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(k) = 0$. Έπεται ότι $f \equiv \widehat{f}(0)$ (όλοι οι συντελεστές Fourier της $f - \widehat{f}(0)$ είναι ίσοι με μηδέν, και $f - \widehat{f}(0) \in C(\mathbb{T})$).

6.9. Έστω (f_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(\widehat{g - g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - (\widehat{g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k)\widehat{f_n}(k) = \widehat{g}(k)(1 - \widehat{f_n}(k)).$$

Άρα,

$$|\widehat{g}(k)|\,|1 - \widehat{f_n}(k)| = |(\widehat{g - g * f_n})(k)| \leqslant \|g - g * f_n\|_1 \to 0.$$

Θεωρώντας την $g(x) = e^{ikx}$ (για την οποία $\widehat{g}(k) = 1$) παίρνουμε $|1 - \widehat{f_n}(k)| \to 0$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$.

6.10. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε το n-οστό μερικό άθροισμα Cesàro της f τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma_{2n-1}(f, 0) = \frac{1}{2n}\sum_{m=0}^{2n-1} s_m(f, 0) \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{m=n}^{2n-1} s_m(f, 0) \geqslant \frac{1}{2}s_n(f, 0),$$

διότι $s_m(f, 0) = a_0/2 + a_1 + \cdots + a_m$ και $a_k \geqslant 0$ για κάθε k, άρα $s_m(f, 0) \geqslant s_n(f, 0)$ για κάθε $m = n, n+1, \ldots, 2n-1$. Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι

$$|\sigma_{2n-1}(f, x)| \leqslant \|f * K_{2n-1}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|K_{2n-1}\|_1 = \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι άνω φραγμένα:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant 2s_n(f, 0) \leqslant 4\|f\|_\infty,$$

που αποδεικνύει τη σύγκλιση της σειράς.

6.11. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x - t) - f(x)| \leqslant A|t|^\alpha, \qquad |t| \leqslant \pi.$$

Αποδείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{\pi+1}{1-\alpha}\,\frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant 2\pi A\,\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $\alpha = 1$ (η περίπτωση $0 < \alpha < 1$ είναι παρόμοια). Αν $K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)}\right)^2$ ο πυρήνας του Fejér τότε μπορούμε να γράψουμε $\sigma_n(f)(x) = (f * K_n)(x)$. Επομένως, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f,x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t) - f(x)]K_n(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|K_n(t)\,dt \\
&\leqslant \frac{M}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t|}{|\sin(t/2)|}\,\frac{\sin^2(nt)}{|\sin(t/2)|}\,dt,
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη Lipschitz για την f και το ότι η $\{K_n\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων που παίρνει θετικές τιμές. Καθώς, η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{\sin(t/2)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\pi)$, παίρνουμε $|\frac{t}{\sin(t/2)}| \leqslant \pi$ για κάθε $|t| \leqslant \pi$. Έτσι, βρίσκουμε:

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right|\,dt,$$

διότι $|\sin nt| \leqslant 1$. Τέλος, αν μιμηθούμε την απόδειξη της

$$\|D_n\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt \leqslant C\ln n,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right|\,dt \leqslant C\ln n$$

και το συμπέρασμα έπεται. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(t/2) > t/\pi$ για $0 < t < \pi$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right|\,dt &\leqslant 2\pi\int_0^{\pi}\frac{|\sin(nt)|}{t}\,dt \\
&\leqslant 2\pi\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&\leqslant 2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&\leqslant 2\pi^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{k\pi}\,dt \\
&\leqslant 2\pi^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt \\
&\leqslant 2\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant c\ln n
\end{aligned}$$

για κάποια αριθμητική σταθερά $c > 0$. Έχουμε λοιπόν

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant c' M\frac{\ln n}{n}.$$

6.12. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $b_n = a_{n-1} - a_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) = a_0 < \infty.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} nb_{n+1} = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, K_n(x).$$

Αφού $K_n \geqslant 0$ και $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi$ για κάθε $n \geqslant 1$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{N} n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} b_n - Nb_{N+1} \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Τέλος, υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N}(k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=|k|}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \\
&= \sum_{n=|k|}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}) - |k| \sum_{n=|k|}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = |k|b_{|k|} + \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n - |k|b_{|k|} \\
&= \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n = a_{|k|}.
\end{aligned}$$

6.13. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $F(t) = (-i)\int_0^t f(s)ds$. Η F είναι 2π-περιοδική, διότι $\widehat{f}(0) = 0$ από την υπόθεση, άρα $F(2\pi) = 0 = F(0)$. Έχουμε

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\frac{e^{-ikx}}{k}dx = \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

για κάθε $k \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\sigma_{n+1}(F,0) = \widehat{F}(0) + \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} \to F(0).$$

Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\widehat{f}(k)}{k} - \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k)$ και $\widehat{f}(0) = 0$. Όμως, $\widehat{f}(k) \to 0$ άρα

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k) \to 0.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Τότε, $\widehat{2if}(k) = a_k$. Οι συντελεστές Fourier της $g = 2if$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του (α), άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty.$$

6.14. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι

$$|s_n(f,x)| \leqslant 5M$$

για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$.

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k b_k.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $|\sigma_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty \leqslant M$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$|\sigma_n(f,x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| K_n(t)\, dt \leqslant M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = M.$$

Επιπλέον, είναι $\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{k}{n+1}) b_k \sin kx$. Οπότε, για $x_n = \pi/(4n)$ και $2n$ αντί n παίρνουμε

$$M \geqslant \sigma_{2n+1}(f,x_n) = \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{2n+1}\right) b_k \sin(kx_n) \geqslant \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) b_k \frac{k}{2n},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\sin x > (2/\pi)x$ για $0 < x < \pi/2$ και το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Συνεπώς, είναι

$$2nM \geqslant \sum_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{2n+1}\right) k b_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} k b_k,$$

χρησιμοποιώντας ακόμη μια φορά το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\sum_{k=1}^{n} k b_k \leqslant 4nM.$$

Συνδυάζοντας με τα παραπάνω βρίσκουμε:

$$|s_n(f,x)| \leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} kb_k \leqslant M + \frac{4nM}{n+1} < 5M,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

6.15. (α) Αποδείξτε ότι αν η σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον σ και $nc_n \to 0$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει στον σ.

(β) Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε την Cesàro αθροισιμότητα με την Abel αθροισιμότητα. [*Υπόδειξη:* Εκτιμήστε τη διαφορά μεταξύ $\sum_{n=1}^{N} c_n$ και $\sum_{n=1}^{N} c_n r^n$, όπου $r = 1 - \frac{1}{N}$.]

Υπόδειξη.

6.16. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $|k\widehat{f}(k)| \to 0$ όταν $|k| \to \infty$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ τότε $s_n(f,x) \to f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τότε $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα.

Υπόδειξη.

6.17. Αν $P_r(\vartheta)$ είναι ο πυρήνας του Poisson, αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(r,\vartheta) = \frac{\partial P_r}{\partial \vartheta}$$

ικανοποιεί τα ακόλουθα: Δu στον δίσκο, και $\lim_{r\to 1^-} u(r,\vartheta) = 0$ για κάθε ϑ. Όμως, η u δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0.

Υπόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

L^2-σύγκλιση σειρών Fourier

7.1. Αποδείξτε ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\ell_2(\mathbb{Z})$. Γράφουμε $x_n = (x_n(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$,

$$(*) \qquad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$|x_n(k) - x_s(k)| \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η ακολουθία $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{C}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{C}$, υπάρχουν $x(k) \in \mathbb{C}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε $x = (x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ και $\|x_n - x\|_2 \to 0$.

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$: από την $(*)$ έχουμε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$,

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Επίσης,

$$\lim_{s\to\infty} \left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2},$$

άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$(**) \qquad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για $n = n_0$ έχουμε ότι $x - x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ και, αφού $x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Επιπλέον, η $(**)$ δείχνει ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\|x - x_n\|_2 \leqslant \varepsilon,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$.

7.2. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με τη νόρμα

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

(i) Αποδείξτε ότι, αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\|f\|_2 = 0$, τότε $f(x) = 0$ σε κάθε σημείο x στο οποίο η f είναι συνεχής.

(ii) Αντίστροφα, αποδείξτε ότι αν η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία στα οποία είναι συνεχής, τότε $\|f\|_2 = 0$.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [0, 2\pi]$ και ότι $f(x_0) \neq 0$. Τότε, $|f(x_0)| > 0$ και από τη συνέχεια της f στο x_0 έπεται ότι υπάρχει διάστημα $I = [a, b] \subset [0, 2\pi]$ ώστε $x_0 \in I$ και $|f(x)| \geqslant |f(x_0)|/2$ για κάθε $x \in I$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\|f\|^2 &= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_I |f(x)|^2 dx + \int_{[0,2\pi]\setminus I} |f(x)|^2 dx \\ &\geqslant \int_I |f(x)|^2 dx \geqslant \frac{(b-a)|f(x_0)|^2}{4} > 0. \end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $\|f\| = 0$.

(β) Έστω ότι $\|f\| > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = |f(x)|^2$. Τότε, $\int_0^{2\pi} g(x)\,dx > 0$. Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi\}$ του $[0, 2\pi]$ ώστε

$$L(g, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(g)(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

Έπεται ότι $m_k(g) = \inf\{g(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} > 0$ για κάποιο $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Όμως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας z στο $[x_k, x_{k+1}]$ (γνωστή άσκηση). Από την υπόθεση έχουμε $f(z) = 0$, άρα $g(z) = |f(z)|^2 = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $g(z) \geqslant m_k(g) > 0$.

7.3. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0, 2\pi]$ με μήκη $|I_n| \leqslant \frac{2\pi}{n}$, τέτοια ώστε η $f_n(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $I_1 = [0, \pi]$, $I_2 = \left[\pi, \pi + \frac{2\pi}{3}\right]$, $I_3 = \left[\pi + \frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4} < 1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2 > 4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2} \frac{1}{n} > 1$. Καλύπτουμε τότε το $[0, 2\pi]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα $I_4, I_5, \ldots, I_{n_2}$ για τα οποία έχουμε ότι $|I_k| \leqslant \frac{2\pi}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων I_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $|I_n| \leqslant \frac{2\pi}{n}$, οποιαδήποτε δύο διαδοχικά από τα I_n έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, και $\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} I_i = [0, 2\pi]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε σημείο $x \in [0, 1]$ ανήκει σε άπειρα από τα I_n, αλλά όχι σε όλα τελικά τα I_n, επομένως η $f_n(x)$ δεν συγκλίνει.

Από την άλλη πλευρά,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = \frac{|I_n|}{2\pi} \leqslant \frac{1}{n} \to 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0.$$

7.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ με

$$f(t) = \begin{cases} \ln(1/t) & \text{αν } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά. Αποδείξτε ότι η f δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία 2π-περιοδικών συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου

$$f_n(t) = \begin{cases} \ln(1/t) & \text{αν } \frac{1}{n} < t < 2\pi \\ 0 & \text{αν } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathcal{R}(\mathbb{T})$, αλλά δεν υπάρχει $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_2 = 0$.

Υπόδειξη. Η f δεν είναι φραγμένη: παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln(1/t) = +\infty$. Άρα, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη. Είναι φραγμένη από την τιμή της στο $1/n$, δηλαδή $\|f_n\|_\infty = \ln n$. Επίσης,

$$\int_0^{2\pi} f_n(t)dt = -\int_{1/n}^{2\pi} \ln t\, dt = \big[-t\ln t + t\big]_{1/n}^{2\pi}.$$

Η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία: αν $m > n$ τότε

$$\begin{aligned} 2\pi\|f_n - f_m\|^2 &= \int_{1/m}^{1/n} \ln^2 t\, dt = [t\ln^2 t]_{1/m}^{1/n} - 2\int_{1/m}^{1/n} \ln t\, dt \\ &= \frac{\ln^2 n}{n} - \frac{\ln^2 m}{m} - 2[t\ln t - t]_{1/m}^{1/n} \\ &= \frac{\ln^2 n}{n} - \frac{\ln^2 m}{m} + \frac{2\ln n}{n} - \frac{2\ln m}{m} + \frac{2}{n} - \frac{2}{m} \to 0 \end{aligned}$$

όταν $n, m \to +\infty$. Έστω ότι υπάρχει $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$. Τότε, για κάθε $b \in (0, 2\pi)$ και για κάθε $n > 1/b$,

$$\int_b^{2\pi} |g(t) - \ln(1/t)|^2 dt = \int_b^{2\pi} |g(t) - f_n(t)|^2 dt \leqslant 2\pi\|g - f_n\|^2 \to 0,$$

δηλαδή

$$\int_b^{2\pi} |g(t) - \ln(1/t)|^2 dt = 0.$$

Από την Άσκηση 7.2(α), για κάθε $b \in (0, 2\pi)$ και για κάθε $t \in (b, 2\pi)$ στο οποίο η g είναι συνεχής ισχύει $g(t) = \ln(1/t)$. Άρα, για κάθε $t \in (0, 2\pi)$ στο οποίο η g είναι συνεχής ισχύει $g(t) = \ln(1/t)$. Όμως, η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα έχει σημείο συνέχειας σε κάθε υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$. Παίρνοντας διαστήματα της μορφής $[0, 1/k]$, βρίσκουμε ακολουθία (t_k) στο $[0, 2\pi]$ με $t_k \to 0$ και $g(t_k) = \ln(1/t_k) \to +\infty$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί η g, ως ολοκληρώσιμη συνάρτηση, πρέπει να είναι φραγμένη.

7.5. Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ με

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{αν } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{αν } k \leqslant 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη.

7.6. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0,\pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7.7. Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη.

7.8. Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

(i) Αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(iii) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

Υπόδειξη. (α) Για $k = 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathbf{1}\, dx = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{a} \cos(kx)\, dx \\ &= \left[\frac{\sin(kx)}{\pi k} \right]_0^a = \frac{\sin(ka)}{\pi k}.\end{aligned}$$

(β) Αν $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα

$$f(x) = S(f, x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Θέτοντας $x = 0$ στην ισότητα του (β) έχουμε

$$1 = f(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} = \frac{a}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{\pi k},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\pi} \right) = \frac{\pi - a}{2}.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Parseval: έχουμε $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ για κάθε k, άρα

$$\|f\|_2^2 = |\widehat{f}(0)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{a^2}{\pi^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{\pi^2 k^2}.$$

Αφού

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathbf{1}^2 dx = \frac{a}{\pi},$$

τελικά έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2} \right) = \frac{\pi a}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

7.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(i) Αποδείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(ii) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S(f)$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f,x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και κατόπιν supremum πάνω απ' όλα τα $x \in \mathbb{R}$, καταλήγουμε στην

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f': $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k}\right)\\ &\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(f')|^2\right)^{1/2}\right]\\ &\leqslant \sqrt{2/n}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γενονός ότι

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

και την στοιχειώδη ανισότητα $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a+b}$. Επομένως,

$$\sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2\right)^{1/2}.$$

Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2)$ συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται.

7.10. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Εξετάστε αν $\lim_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(iii) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

Υπόδειξη. Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(k)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|\widehat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

Έπεται το (β) (και από αυτό, το (α)): αφού η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\lim_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0.$$

Για το (γ), από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)|\right)^2 &= \left(\sum_{k\neq 0}(k|\widehat{f}(k)|)\frac{1}{k}\right)^2\\ &\leqslant \left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0}k^2|\widehat{f}(k)|^2\right) < +\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

7.11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' αποδείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Από την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \|f\|_2^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2\\ &= \sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k\neq 0}\frac{|\widehat{f'}(k)|^2}{k^2}\\ &\leqslant \sum_{k\neq 0}|\widehat{f'}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx.\end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0$$

από την 2π-περιοδικότητα της f. Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα αν

$$f(x) = \widehat{f}(1)e^{ix} + \widehat{f}(-1)e^{-ix}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

7.12. (α) Έστω $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt=0$. Αποδείξτε ότι

$$\left|\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\,dt\right|^2\leqslant\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\int_0^{2\pi}|g'(t)|^2dt.$$

(β) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a)=f(b)=0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b|f(t)|^2dt\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b|f'(t)|^2dt.$$

Υπόδειξη. (α) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left|\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\,dt\right|^2\leqslant\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\int_0^{2\pi}|g(t)|^2dt.$$

Αφού $\int_0^{2\pi}g(t)dt=0$, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\int_0^{2\pi}|g(t)|^2dt\leqslant\int_0^{2\pi}|g'(t)|^2dt,$$

και έπεται το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $[a,b]=[0,\pi]$. Αφού $f(0)=f(\pi)=0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0$, θέτοντας $f(x)=-f(-x)$ για $x\in[-\pi,0]$. Η επέκταση της f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi,k\pi+\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το (α) με $g=f$, παίρνουμε

$$\left|\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt\right|^2\leqslant\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt.$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η f είναι περιττή, συμπεραίνουμε ότι

$$(*)\qquad\int_0^{\pi}|f(t)|^2\,dt\leqslant\int_0^{\pi}|f'(t)|^2dt.$$

Αν το $[a,b]$ είναι τυχόν, θεωρούμε την $F:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ με $F(x)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}x\right)$. Τότε, η $(*)$ ισχύει για την F, δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left|f\left(a+\frac{b-a}{\pi}x\right)\right|^2dx &= \int_0^{\pi}|F(x)|^2\,dx\leqslant\int_0^{\pi}|F'(x)|^2dx\\ &= \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left|f'\left(a+\frac{b-a}{\pi}x\right)\right|^2dx.\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t=a+\frac{b-a}{\pi}x$, παίρνουμε

$$\int_a^b|f(t)|^2\,dt\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b|f'(t)|^2dt.$$

7.13. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0.$$

Υποθέτουμε ότι $|f(x)|\geqslant|f''(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τι μπορείτε να πείτε για την f;

Υπόδειξη.

7.14. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g_t}(k)|^2.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της g_t: είναι

$$\widehat{g_t}(k) = \widehat{f(x+t)}(k) - \widehat{f(x-t)}(k) = e^{ikt}\widehat{f}(k) - e^{-ikt}\widehat{f}(k) = (2i\sin kt)\widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 dx \\ &\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} K^2(2t)^2 dx = K^2t^2.\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $t = \pi/2^{p+1}$ έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leqslant \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geqslant \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}},$$

δηλαδή
$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. Χρησιμοποιώντας το (β) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \frac{K\pi}{\sqrt{2}2^p} = \frac{K\pi}{\sqrt{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^p} < +\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1} |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

7.15. Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Holder
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^{\alpha}$$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 7.14. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$ και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, βλέπουμε ότι
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Holder παίρνουμε
$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 dx \\ &\leqslant \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} K^2 (2t)^{2\alpha} dx = K^2 t^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, έχουμε
$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leqslant \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geqslant \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε
$$\frac{1}{2} \sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}},$$

δηλαδή
$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{2K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\frac{\sqrt{2}K\pi^{\alpha}}{2^{\alpha p+\alpha}} = \frac{\sqrt{2}K\pi^{\alpha}}{2^{\alpha}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right)^p} < +\infty,\end{aligned}$$

διότι $2^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} > 1$ αφού $\alpha - \frac{1}{2} > 0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1}|\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

7.16. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \pi - x$ και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά. Έχουμε $\widehat{g}(0) = 0$ και $\widehat{g}(k) = \frac{(-i)}{k}$ για κάθε $k \neq 0$. Επίσης $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i}{k}(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i}{k}(-i)b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.\end{aligned}$$

7.17. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx.$$

Υπόδειξη.

7.18. Αποδείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά δεν είναι η σειρά Fourier κάποιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. Έστω $x \in [0, 2\pi]$. Αν $x \neq 0, 2\pi$, έχουμε δει ότι

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

δηλαδή,

$$\left|\sum_{k=2}^{n}\sin(kx)\right| \leqslant |\sin x| + \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}\sin(kx)$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Το ίδιο ισχύει αν $x = 0$ ή $x = 2\pi$, διότι, σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε $\sin(kx) = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$. Αφού η ακολουθία $\left(\frac{1}{\ln k}\right)_{k\geqslant 2}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, από το κριτήριο του Dirichlet συμπεραίνουμε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $S(f,x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\ln k}$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $\widehat{f}(k) = -\frac{ib_k(f)}{2} = -\frac{i}{2\ln k}$ αν $k \geqslant 2$, $\widehat{f}(k) = -\frac{ib_k(f)}{2} = \frac{i}{2\ln(-k)}$ αν $k \geqslant 2$ και $\widehat{f}(k) = 0$ αλλιώς. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4\ln^2 k}.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k} = +\infty$.

7.19. Έστω $\{\varepsilon_k\}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_k \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| \geqslant \varepsilon_k.$$

Υπόδειξη. Αφού $\varepsilon_k \to 0$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (ε_{s_k}) της (ε_k) ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} < +\infty.$$

Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass ελέγχουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση. Αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}$, τότε

$$|\widehat{f}(s_k)| = \widehat{f}(s_k) = \varepsilon_{s_k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε $|\widehat{f}(k)| \geqslant \varepsilon_k$.

7.20. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και έστω $k \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Holder $|f(x+h) - f(x)| \leqslant C|h|^{\alpha}$ για κάποιον $0 < \alpha \leqslant 1$, κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε x, h. Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|k|^{\alpha}|\widehat{f}(k)| \leqslant M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν $0 < \alpha < 1$, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

ικανοποιεί τη συνθήκη Holder του (β), και

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{αν } k = 2^s,\, s \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη.

7.21. Ο *συζυγής πυρήνας του Dirichlet* ορίζεται από την

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{|k|\leqslant n} \mathrm{sign}(x) e^{ikx},$$

όπου $\mathrm{sign}(x)$ είναι το πρόσημο του x.

(i) Αποδείξτε ότι

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

και ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(x)|\, dx \leqslant c \ln n$$

για κάθε $n \geqslant 2$.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τότε

$$(f * \tilde{D}_n)(0) \leqslant C \ln n$$

για κάθε $n \geqslant 2$.

(iii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $0 < \alpha < 1$, η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}$$

συγκλίνει για κάθε x, αλλά δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. (i) Για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \sum_{k=1}^{n} \sin kx \\
&= \frac{i}{\sin(x/2)} \sum_{k=1}^{n} [\cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x] \\
&= i\frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Για κάθε x γράφουμε

$$\tilde{D}_n(x) = i\frac{\cos(x/2) - 1}{\sin(x/2)} + i\frac{1 - \cos(n+1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \frac{\cos(x/2)-1}{\sin(x/2)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$ και το ίδιο ισχύει για την $x \mapsto \frac{1-\cos[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)} = 2\frac{\sin^2[(n+1/2)x/2]}{\sin(x/2)}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{D}_n\|_1 &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1-\cos x}{\sin(x/2)} \right| dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)x/2)|}{|\sin(x/2)|}\, dx \\
&\leqslant c_1 + 4\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)x/2)|}{\sin(x/2)}\, dx \\
&\leqslant c_1 + 8\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin((n+1/2)x)|}{\sin x}\, dx.
\end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορούμε να δείξουμε όπως στον πυρήνα του Dirichlet ότι φράσσεται από $c_2 \ln n$ και το ζητούμενο έπεται.

(ii) Έπεται άμεσα από το (i) αν γράψουμε:

$$|(f * \tilde{D}_n)(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(0-t)||\tilde{D}_n(t)|\,dt \leqslant \|f\|_\infty \|\tilde{D}_n\|_1.$$

(iii) Η σύγκλιση της σειράς έπεται από το κριτήριο του Dirichlet. Αν ήταν σειρά Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης θα είχαμε από το (β) ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = O(\ln n),$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \geqslant \frac{1}{1-a} n^{1-a}.$$

7.22. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Υπόδειξη.

7.23. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

[*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $\varphi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\varphi\|_\infty = \pi$.]

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $\varphi : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ με $\varphi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{k+1}$ για κάθε $k \geqslant 0$ και $\|\varphi\|_\infty = \pi$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\,|y_m| \widehat{\varphi}(n+m) \\
&= \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\,|y_m| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-i(n+m)t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n| e^{-int} \right) \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m| e^{-imt} \right) \varphi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, αν ορίσουμε $\alpha_N(t) = \sum_{n=0}^{N} |x_n| e^{-int}$ και $\beta_N(t) = \sum_{m=0}^{N} |y_m| e^{-imt}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_n(t)\beta_n(t)\varphi(t) dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha_N(t)|\,|\beta_N(t)|\,\|\varphi\|_\infty dt \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty \|\alpha_N\|_2 \|\beta_N\|_2
\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού

$$\|\alpha_N\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \quad \text{και} \quad \|\beta_N\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2},$$

παίρνουμε

$$\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \|\varphi\|_\infty \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Αφού $\|\varphi\|_\infty = \pi$, έπεται ότι

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Ειδικότερα, έχουμε το ζητούμενο.