Μία Εισαγωγή στην Αρμονική Ανάλυση

Γιάννης Κ. Σαραντόπουλος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολη Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &
Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

24 Ιουλίου 2020

Περιεχόμενα

Συμβολισμός και Ορολογία

- $\mathbb{R}$– το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{R}_+$– το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
- $\overline{\mathbb{R}}$— **το επεκταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών**. Είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο οποίο έχουμε προσθέσει δύο στοιχεία, το ∞ (ή $+\infty$) και το $-\infty$. Δηλαδή $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, ή , όπως συνήθως γράφεται, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.
- $\mathbb{Z}$– το σύνολο των ακεραίων
- $\mathbb{N}$– το σύνολο των θετικών ακεραίων
- $\mathbb{Q}$– το σύνολο των ρητών
- $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$– χώρος με εσωτερικό γινόμενο
- $M^{\perp}$– ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός υποχώρου M
- T^{*}– συζυγής ενός τελεστή T
- $\widehat{x}(\alpha) := \langle x, u_\alpha\rangle$– συντελεστές Fourier του $x \in H$, όπου $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
- $\operatorname{card}(A)$– πληθάριθμος ενός συνόλου A.
- r_n– n-οστή συνάρτηση Rademacher.
- $\mathbb{T}$– ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
- $\widehat{f}(n)$– n-οστός συντελεστής Fourier της $f \in L_1(\mathbb{T})$.
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{int}$– εκθετική (ή μιγαδική) μορφή της σειράς Fourier της f.
- $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikt}$– μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f.

- $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$– τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier της f.
- $\mathcal{T}_n := \left\{P : P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}\right\}$– χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ n.
- D_n–πυρήνας Dirichlet.
- K_n– πυρήνας Fejér.
- P_r–πυρήνας Poisson.
- $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$– αριθμητικός μέσος των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της f.
- $(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\ dt$– συνέλιξη των $f, g \in L_1(\mathbb{T})$.
- $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\ dt$– συνέλιξη των $f, g \in L_1(\mathbb{R})$.
- $f_\tau(t) := f(t-\tau), \quad t \in \mathbb{T}$.

Κεφάλαιο 1

Χώροι Hilbert και Ορθοκανονικά Συστήματα

1.1 Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο και Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.1 *Ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος H λέγεται* **χώρος με εσωτερικό γινόμενο** *αν σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων x και y του H αντιστοιχεί ένας μιγαδικός αριθμός $\langle x, y\rangle$,* **το εσωτερικό γινόμενο των** x **και** y, *έτσι ώστε*

(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(ii) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, *όπου* $x, y, z \in H$.

(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, *όπου* $x, y, z \in H$ *και* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$, *για κάθε* $x \in H$.

(v) $\langle x, x\rangle = 0$ *αν και μόνο αν* $x = 0$.

Παρατηρήσεις 1.1 *1. Από την (iii) έπεται ότι* $\langle 0, y\rangle = 0$, *για κάθε* $y \in H$.

2. Από τις (ii) και (iii) προκύπτει ότι για κάθε $y \in H$ *η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \varphi: \ & H \to \mathbb{C} \\ & x \mapsto \langle \alpha x, y\rangle \end{aligned}$$

είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό.

3. Επίσης είναι προφανές ότι

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle \quad \text{και} \quad \langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle .$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

ορίζει μια νόρμα στο χώρο H.

Πρόταση 1.1 *(α′) (**Ανισότητα Cauchy-Schwarz**) Για κάθε $x, y \in H$ είναι*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{1.1}$$

και η ισότητα ισχύει στην (1.1) αν και μόνο αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

*(β′) (**Τριγωνική ανισότητα**) Είναι*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1.2}$$

και η ισότητα ισχύει στην (1.2) αν και μόνο αν $y = 0$ ή $x = cy$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

(α′) Για $y = 0$ η (1.1) ισχύει. Αν $y \neq 0$, παίρνουμε $\alpha = \langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle$ οπότε

$$\begin{aligned}
\langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle &= \langle x, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + \alpha \overline{\alpha} \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\
&= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} .
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$$

και αυτό αποδεικνύει την (1.1). Η ισότητα ισχύει στην (1.1) αν και μόνο αν $x - \alpha y = 0 \Leftrightarrow x = \alpha y$, δηλαδή τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(β′) Είναι

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 && \text{(λόγω της (1.1))} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Επίσης, από την απόδειξη της ανισότητας προκύπτει ότι η ισότητα θα ισχύει στην (1.2) *αν και μόνο αν*

$$\Re\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\| .$$

Όμως η παραπάνω σχέση ισχύει αν και μόνο $y = 0$ *ή* $x = cy$ *με* $c = |c| \geq 0$.

■

Πόρισμα 1.2 *Έστω* $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} .$$

Τότε ο $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *είναι ένας χώρος με νόρμα.*

Παρατήρηση 1.1 *Επειδή* $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$, *για κάθε* $x, y, z \in H$, *αν ορίσουμε την απόσταση μεταξύ των* x *και* y *με*

$$d\,(x, y) := \|x-y\| ,$$

εύκολα φαίνεται ότι ο H *είναι ένας μετρικός χώρος.*

Ορισμός 1.2 *Αν ο χώρος* $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *είναι πλήρης, δηλαδή χώρος Banach, τότε ο* H *λέγεται* **χώρος Hilbert**.

Υπενθυμίζεται ότι ο χώρος H είναι πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy του H συγκλίνει στον H.

Εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω ταυτότητες σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 1.3 *Έστω* $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω* $x, y \in H$.

1. $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 . \qquad \text{(Ιδιότητα του παραλληλογράμμου)}$$

2. *Αν ο* H *είναι* **πραγματικός χώρος**, *τότε*

$$\langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 ,$$

ενώ αν ο H *είναι* **μιγαδικός χώρος**, *τότε*

$$\langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2 .$$

Οι παραπάνω ταυτότητες λέγονται και ταυτότητες πόλωσης (polarization identities).

Παρατήρηση 1.2 *Αν $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, επαγωγικά αποδεικνύεται η παρακάτω ταυτότητα (γενίκευση της ιδιότητας του παραλληλόγραμμου):*

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 , \quad \text{όπου } x_1, \ldots, x_n \in H .$$

Στην παράγραφο 2.2.1 θα ορίσουμε τις συναρτήσεις Rademacher και θα αποδείξουμε ότι αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου $L_2([0,1], m)$, όπου m είναι μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Αν χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις Rademacher, ο παραπάνω τύπος παίρνει την μορφή

$$\int_0^1 \|r_1(t)x_1 + r_2(t)x_2 + \cdots + r_n(t)x_n\|^2 dt = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 .$$

Η ιδιότητα του παραλληλόγραμμου χαρακτηρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 1.4 (Jordan–von Neumann [38]) *Έστω $(H, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Αν για κάθε $x, y \in H$*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 ,$$

τότε υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ στον H τέτοιο ώστε

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2} , \quad x \in H .$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο H είναι *πραγματικός διανυσματικός χώρος*. Οριζουμε τη συνάρτηση $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ με

$$\langle x, y \rangle := \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 , \quad \text{όπου } x, y \in H. \tag{1.3}$$

Επειδή $\langle x, x \rangle = \|(x+x)/2\|^2 = \|x\|^2$, είναι $\langle x, x \rangle \geq 0$ με $\langle x, x \rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$. Επίσης έχουμε

$$\langle y, x \rangle = \left\| \frac{y+x}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{y-x}{2} \right\|^2 = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \langle x, y \rangle .$$

Αν $x, y, z \in H$, από την υπόθεση είναι

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 = \|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2$$

και

$$2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2 = \|x+y-2z\|^2 + \|x-\|^2 .$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε

$$2\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + 2\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) = \|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2$$

και ισοδύναμα

$$\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \frac{1}{2} \langle x+y, 2z \rangle .$$

Ειδικά αν $y = 0$ έχουμε

$$\langle x, z\rangle = \frac{1}{2}\langle x, 2z\rangle\,.$$

Επομένως,

$$\langle u+v, z\rangle = \frac{1}{2}\langle u+v, 2z\rangle = \langle u, z\rangle + \langle v, z\rangle\,, \quad \text{για κάθε } u, v, z \in H.$$

Απομένει να δείξουμε ότι για κάθε και κάθε $x, y \in H$ και κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle\,.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\langle nx, y\rangle = \langle \underbrace{x + \cdots + x}_{n}, y\rangle = \langle x, y\rangle + \cdots + \langle x, y\rangle = n\langle x, y\rangle\,.$$

Επειδή από τον ορισμό (1.3) είναι $\langle -nx, y\rangle = -n\langle x, y\rangle$, έχουμε αποδείξει ότι για κάθε ακέραιο αριθμό n είναι

$$\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle\,.$$

Αν ο ακέραιος αριθμός n είναι διάφορος του μηδενός, τότε

$$n\langle x/n, y\rangle = \langle nx/n\ , y\rangle = \langle x, y\rangle$$

και κατά συνέπεια

$$\langle x/n, y\rangle = (1/n)\,\langle x, y\rangle\,.$$

Επομένως, για κάθε ρητό αριθμό r

$$\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle\,.$$

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών (r_n), τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Επειδή από τον ορισμό της $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ είναι

$$\langle r_n x, y\rangle - \langle \alpha x, y\rangle = \langle r_n x - \alpha x, y\rangle = \left\|\frac{r_n x - \alpha x + y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{r_n x - \alpha x - y}{2}\right\|^2$$

και η νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση, έχουμε ότι

$$\langle \alpha x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle r_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} r_n\langle x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle\,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το θεώρημα όταν ο χώρος είναι πραγματικός.

Αν ο H είναι *μιγαδικός χώρος με νόρμα*, θέτουμε

$$\langle x\,, y\rangle := \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

όπου το $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ ορίζεται από την (1.3). Δηλαδή, για κάθε $x, y \in H$

$$\langle x, y\rangle := \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2\,.$$

Όπως έχουμε αποδείξει, το $\langle \cdot\,,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον H πάνω στον $\mathbb{R}$. Επειδή

$$\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}} = \left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2 \quad \text{και} \quad \langle ix, iy\rangle_{\mathbb{R}} = \left\|\frac{ix+iy}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{ix-iy}{2}\right\|^2 ,$$

έχουμε ότι

$$\langle x, ix\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \quad \text{και} \quad \langle ix, iy\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} .$$

Τότε

$$\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} = \|x\|^2 .$$

Είναι $\langle x, x\rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$. Επίσης, για κάθε $x, y \in H$

$$\langle y, x\rangle = \langle y, x\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle y, ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle iy, -x\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}} = \overline{\langle x, y\rangle} .$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle , \quad x, y, z \in H .$$

Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in H$ και κάθε $a \in \mathbb{C}$ είναι

$$\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle .$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle ix, y\rangle &= \langle ix, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle ix, iy\rangle_{\mathbb{R}} \\
&= \langle ix, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} \\
&= i\left[\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle ix, y\rangle_{\mathbb{R}}\right] \\
&= i\left[\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle -x, iy\rangle_{\mathbb{R}}\right] \\
&= i\left[\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}}\right] \\
&= i\langle x, y\rangle .
\end{aligned}$$

Επομένως, αν $a = \alpha + i\beta$ έχουμε

$$\langle ax, y\rangle = \langle (\alpha+i\beta)\,x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle + \langle i\beta x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + i\beta\langle x, y\rangle = (\alpha+i\beta)\,\langle x, y\rangle = a\langle x, y\rangle .$$

Άρα, ο μιγαδικός χώρος H είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. ■

Επειδή η ιδιότητα του παραλληλόγραμμου χαρακτηρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο, άμεση συνέπεια είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1.5 *Έστω $(H, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα. Ο H είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν κάθε διδιάστατος υπόχωρος του H είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο.*

Για μια συστηματική μελέτη των χαρακτηρισμών των χώρων με εσωτερικό γινόμενο παραπέμπουμε στα συγγράμματα [3] και [12].

Παραδείγματα 1.1 *1. Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ με εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k, \text{ όπου } x = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

είναι ένας χώρος Hilbert. Παρόμοια ο $\mathbb{R}^n$ είναι ένας χώρος Hilbert.

2. Ο χώρος

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_n) :\ x_n \in \mathbb{C}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

είναι ένας χώρος Hilbert με

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n\,, \quad \text{όπου } x = (x_n),\ y = (y_n).$$

3. Αν $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου με ένα θετικό μέτρο μ, ως γνωστόν

$$L_p(\mu) = L_p(X, \mathfrak{M}, \mu)\ , \quad 1 \le p \le \infty\,,$$

είναι ο χώρος Banach των κλάσεων ισοδυναμιών των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$, όπου

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty\,, \quad 1 \le p \le \infty$$

και

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \ge 0 :\ \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) = 0\} < \infty\,.$$

Η άπειρη νόρμα $\|f\|_\infty$ λέγεται essential supremum της f και γράφουμε

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|\ .$$

Αν $1/p + 1/q = 1$, $1 \le p \le \infty$ και αν $f \in L_p(\mu)$ και $g \in L_q(\mu)$, τότε $fg \in L_1(\mu)$ και

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\ . \qquad \text{(ανισότητα Hölder)}$$

Ο $L_2(\mu)$ είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle := \int_X f\overline{g}\, d\mu\,.$$

Επειδή $f, g \in L_2(\mu)$, θα είναι

$$\|f\,\overline{g}\|_1 = \|fg\|_1 \le \|f\|_2 \|g\|_2\ .$$

Επομένως, το εσωτερικό γινόμενο είναι καλά ορισμένο.

4. *Έστω H ο χώρος των ακολουθιών $x = (x_n)$ που είναι τελικά μηδενικές, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Ο H είναι υπόχωρος του ℓ_2. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) του H, με*

$$x_n := \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right).$$

Η ακολουθία συγκλίνει στον ℓ_2 με όριο το

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right)$$

το οποίο δεν έχει μηδενικούς όρους, δηλαδή δεν ανήκει στον H. Επομένως ο H δεν είναι χώρος Hilbert.

Παράδειγμα 1.1 *Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο χώρο Hilbert $L_2(X, \mathfrak{M}, \mu)$, με $\|f_n - f_{n+1}\|_2 < 2^{-n}$. Τότε, υπάρχει $f \in L_2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ τέτοιο ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ σχεδόν παντού στο } X \text{ και } \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Απόδειξη. *Έστω $E \in \mathfrak{M}$ με $\mu(E) < \infty$. Τότε,*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n - f_{n+1}|\, d\mu &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) \|f_n - f_{n+1}\|_2 && \text{(ανισότητα Hölder)}\\ &\leq \mu(E) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\\ &= \mu(E) < \infty.\end{aligned}$$

Επομένως, από το θεώρημα Beppo-Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_{n+1}(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο E. Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_{n+1}(x)) = f_1(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

το $\lim_{n\to\infty} f_n(x) := g_E(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο E και μάλιστα $\int_E |g_E|\, d\mu < \infty$.
Αν $A_n = \{x \in X : f_n(x) \neq 0\}$, τότε $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, όπου $B_k = \left\{x \in X : |f_n(x)|^2 > 1/k\right\}$. Είναι

$$\mu(B_k) \leq k \int_X |f_n|^2\, d\mu < \infty.$$

Έστω $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Επειδή το A είναι σ-πεπερασμένο, $A := \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ για κάποια μετρήσιμα σύνολα E_m ξένα ανά δύο με $\mu(E_m) < \infty$. Από τα προηγούμενα, σε κάθε E_m αντιστοιχεί μία μετρήσιμη συνάρτηση g_{E_m} και $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{E_m}(x)$ σχεδόν παντού στο X. Αν $f := \sum_{m=1}^{\infty} g_{E_m}$, έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν παντού στο X.
Επειδή από την υπόθεση η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy στο χώρο Hilbert $L_2(X, \mathfrak{M}, \mu)$, υπάρχει $h \in L_2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ με $\lim_{n\to\infty} \|f_n - h\|_2 = 0$. Τότε θα πρέπει να είναι $h = f$ σχεδόν παντού στο X. Δηλαδή, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$. ■

Για τη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης, καθώς επίσης και για μία εισαγωγή στη θεωρία χώρων Hilbert, παραπέμπουμε στα συγγράμματα [61, 67] .

Πρόταση 1.6 *Έστω H ένας χώρος Hilbert και έστω $y \in H$. Οι συναρτήσεις*

$$x \mapsto \langle x, y\rangle\,, \quad x \mapsto \langle y, x\rangle \quad \textit{και} \quad x \mapsto \|x\|$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς στον H.

Απόδειξη. *Έστω $x_1, x_2 \in H$. Επειδή*

$$|\langle x_1, y\rangle - \langle x_2, y\rangle| = |\langle x_1 - x_2, y\rangle| \leq \|x_1 - x_2\|\,\|y\|$$

η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y\rangle$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρόμοια η συνάρτηση $x \mapsto \langle y, x\rangle$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τέλος, επειδή

$$|\|x_1\| - \|x_2\|| \leq \|x_1 - x_2\|$$

και η συνάρτηση $x \mapsto \|x\|$ θα είναι ομοιόμορφα συνεχής. ■

Ένα υποσύνολο E του διανυσματικού χώρου V λέγεται **κυρτό**, αν για κάθε $x, y \in E$ και $0 < t < 1$ το σημείο $z = (1-t)x + ty \in E$. Επομένως, το E είναι κυρτό αν περιέχει τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν όλα τα δυνατά ζεύγη σημείων του συνόλου E.

Προφανώς κάθε υπόχωρος του V είναι κυρτός. Επίσης αν το E είναι κυρτό, τότε και το $E+x := \{y + x : y \in E\}$ είναι κυρτό.

Αν $(H\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, θα λέμε ότι το $x \in H$ **είναι ορθογώνιο** του $y \in H$, συμβολίζουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$. Προφανώς η σχέση $\perp$ είναι συμμετρική. Αν

$$x^{\perp} := \{y \in H : \langle x, y\rangle = 0\}$$

ο $x^{\perp}$ είναι υπόχωρος του H. Είναι

$$x^{\perp} = \ker\varphi\,, \quad \text{όπου } \varphi(y) = \langle x, y\rangle.$$

Επειδή η φ είναι συνεχής συνάρτηση (Πρόταση 1.6), ο $x^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του H. Αν M είναι υπόχωρος του H, το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του M ορίζεται ως εξής

$$M^{\perp} := \{y \in H : x \perp y\,, \text{ για κάθε } x \in M\}\ .$$

Επειδή

$$M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}\,,$$

ο $M^{\perp}$ είναι η τομή κλειστών υπόχωρων του H και επομένως είναι κλειστός υπόχωρος. Είναι $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Πράγματι, αν $x \in M$ και $x \in M^{\perp}$, τότε $\langle x, x\rangle = 0$ και επομένως $x = 0$.

Σημείωση. Αν M είναι υπόχωρος (αντ. κυρτό σύνολο) του H, τότε και η κλειστότητα $\overline{M}$ είναι υπόχωρος (αντ. κυρτό σύνολο) του H. Το $\overline{M}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο του H που περιέχει το M. Ισοδύναμα, $\overline{M} = M \cup M'$, όπου M' είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του M. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $x \in \overline{M}$, αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του M με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Πρόταση 1.7 *Έστω $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε $x \perp y$, $x, y \in H$, αν και μόνο αν*

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|\,, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη. *Αν $y = 0$ η απόδειξη είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $y \neq 0$. Επειδή*

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re\lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2\,,$$

αν $x \perp y$ τότε

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2$$

και επομένως $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ και } y \neq 0\,.$$

Αν πάρουμε $\lambda = -\langle x, y\rangle/\|y\|^2$, τότε

$$\|x\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\,.$$

Επομένως, $|\langle x, y\rangle|^2 \leq 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\langle x, y\rangle = 0$. Άρα, $x \perp y$. ■

Πρόταση 1.8 *Έστω H χώρος Hilbert και έστω $M \neq \emptyset$ ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο του H. Αν $x \in H$, τότε υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\delta = \inf_{y\in M} \|x - y\| = d\,(x, M) = \|x - y_0\|\,,$$

όπου $d\,(x, M)$ είναι η απόσταση από το x στο M.

Απόδειξη. *Επειδή $\delta = \inf_{y\in M} \|x - y\|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\delta \leq \|x - y_n\| < \delta + \frac{1}{n}\,.$$

Επομένως, αν $\delta_n := \|x - y_n\|$ θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \delta\,.$$

Θα αποδείξουμε ότι η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, επειδή $(y_n + y_m)/2 \in M$ (το M είναι κυρτό σύνολο), αν $v_n := y_n - x$ τότε $\|v_n\| = \delta_n$ και

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\,\|(y_n + y_m)/2 - x\| \geq 2\delta\,.$$

Επομένως, από την ιδιότητα του παραλληλογράμμου έχουμε

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2\left(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2\right) \le -(2\delta)^2 + 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right) .$$

Όμως $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \delta$, $\lim_{m\to\infty}\delta_m = \delta$ *και αυτό συνεπάγεται ότι* $\lim_{m,n\to\infty}\|y_n - y_m\| = 0$, *δηλαδή η* (y_n) *είναι ακολουθία Cauchy.*

Επειδή το M *είναι κλειστό σύνολο, είναι* $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \in M$ *(δηλαδή* $\lim_{n\to\infty}\|y_n - y_0\| = 0$*). Από την Πρόταση 1.6 η νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση και επομένως*

$$\|x - y_0\| = \lim_{n\to\infty}\|x - y_n\| = \lim_{n\to\infty}\delta_n = \delta .$$

Σημείωση. Για να αποδείξουμε ότι $\|x - y_0\| = \delta$ *μπορούμε να εργασθούμε και ως εξής :*

$$\delta \le \|x - y_0\| = \|(x - y_n) + (y_n - y_0)\| \le \|x - y_n\| + \|y_n - y_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta \ .$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το y_0 *είναι το μοναδικό στοιχείο του* M *τέτοιο ώστε* $\|x - y_0\| = \delta$*. Έστω*

$$\|x - y_0\| = \|x - z\| = \delta , \quad \text{όπου } y_0, z \in M.$$

Επειδή $(y_0 + z)/2 \in M$*, έχουμε*

$$\begin{aligned}
\delta^2 &\le \|x - (y_0 + z)/2\|^2 \\
&= \|(x - y_0)/2 + (x - z)/2\|^2 \\
&= \|x - y_0\|^2/2 + \|x - z\|^2/2 - \|(y_0 - z)/2\|^2 && \text{(ιδιότητα του παραλληλογράμμου)} \\
&= \delta^2 - \|(y_0 - z)/2\|^2 .
\end{aligned}$$

Επομένως $y_0 = z$*, δηλαδή το* y_0 *είναι μοναδικό στο* M*.* ■

Το μοναδικό $y_0 \in M$, τέτοιο ώστε $d(x, M) = \|x - y_0\|$ είναι μία βέλτιστη προσέγγιση του x από το M.

Θεώρημα 1.9 (Θεώρημα Προβολής) *Έστω* M *είναι ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert* H*.*

(α΄) Κάθε $x \in H$ *έχει μοναδική ανάλυση της μορφής*

$$x = Px + Qx , \quad \text{όπου } Px \in M \text{ και } Qx \in M^{\perp}.$$

Δηλαδή είναι

$$H = M \oplus M^{\perp} .$$

(β΄) Το Px *είναι το σημείο του* M *που βρίσκεται πλησιέστερα στο* x *και το* Qx *είναι το σημείο του* $M^{\perp}$ *που βρίσκεται πλησιέστερα στο* x*.*

(γ′) Οι απεικονίσεις

$$P : H \to M \quad \textit{και} \quad Q : H \to M^{\perp} \textit{ είναι γραμμικές} .$$

(δ′)

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Q\|^2 .$$

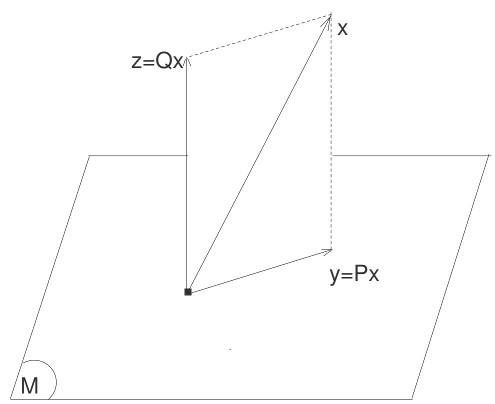
<u>*Σημείωση*</u>. Το συμπέρεσμα της a' είναι ότι οι M και $M^{\perp}$ είναι κλειστοί υπόχωροι του H τέτοιοι ώστε

$$M \cap M^{\perp} = \{0\} \quad \text{και } H = M + M^{\perp} .$$

Ο χώρος $M^{\perp}$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του M και οι P, Q είναι οι *ορθογώνιες προβολές* του H πάνω στα M και $M^{\perp}$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί

$$Px = \operatorname{proj}_M x \quad \text{και} \quad Qx = \operatorname{proj}_{M^{\perp}} x$$

για τις προβολές του x πάνω στο M και $M^{\perp}$ αντίστοιχα.



Απόδειξη.

Για την απόδειξή της μοναδικότητας υποθέτουμε ότι

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 , \quad \text{όπου } x_1, x_2 \in M \text{ και } y_1, y_2 \in M^{\perp} .$$

Τότε $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, με $x_1 - x_2 \in M$ και $y_2 - y_1 \in M^{\perp}$. Όμως $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ οπότε $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$. Ορίζουμε το

$$Qx := x - y_0 , \quad \text{όπου } \|x - y_0\| = \min_{y \in M} \|x - y\| \qquad \text{(Πρόταση 1.8)}$$

και θέτουμε

$$Px := x - Qx = y_0 \in M .$$

Έστω $y \in M$. Τότε $\lambda y \in M$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, οπότε

$$\|Qx\| \le \|Qx + \lambda y\| .$$

Επομένως, από την Πρόταση 1.7 το $Qx \in M^{\perp}$.

Έστω το $y \in M^{\perp}$. Τότε $Qx - y \perp Px$ και κατά συνέπεια

$$\|x-y\|^2 = \|Qx - y + Px\|^2 = \|Qx-y\|^2 + \|Px\|^2 \ .$$

Επομένως, το $\|x-y\|$ γίνεται ελάχιστο όταν $y = Qx$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει τις (α′) και (β′).

Αν $x, y \in H$,

$$ax + by = P(ax+by) + Q(ax+by) \ , \quad x = Px + Qx \quad \text{και} \quad y = Py + Qy \, .$$

Επομένως,

$$P(ax+by) - aPx - bPy = aQx + bQy - Q(ax+by) \ .$$

Επειδή $P(ax+by) - aPx - bPy \in M$ και $aQx + bQy - Q(ax+by) \in M^{\perp}$, θα πρέπει να είναι

$$P(ax+by) = aPx + bPy \, , \quad Q(ax+by) = aQx + bQy$$

και αυτό αποδεικνύει τη (γ′). Τέλος, επειδή $Px \perp Qx$, είναι

$$\|x\|^2 = \|Px + Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \ .$$

■

Πόρισμα 1.10 *Αν M είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, $M \neq H$, τότε υπάρχει $y \in H$, $y \neq 0$, τέτοιο ώστε $y \perp M$.*

Απόδειξη. *Έστω $x \in H$, $x \notin M$. Αν $y := Qx$, τότε $Px \in M$ και επομένως $x \neq Px$. Άρα,*

$$y = x - Px \neq 0 \, , \quad \text{με } y \perp M.$$

■

Παράδειγμα 1.2 *Έστω γ_n ακολουθία συναρτήσεων στο $[-r, r]$, $0 < r < 1$, με*

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{n-x} \, , \quad n = 1, 2, \ldots \, .$$

Αν $\Gamma = \operatorname{span}\left\{\gamma_n(x) = \frac{1}{n-x} : n \in \mathbb{N}\right\}$, το Γ είναι σύνολο πυκνό στο χώρο Hilbert ℓ_2.

Απόδειξη. *Αν $a = (a_n) \in \ell_2$, $a_n \in \mathbb{R}$ και $b_z = (1/(n-z))$, ορίζουμε τη μιγαδική συνάρτηση f_a στον ανοικτό δίσκο $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, με*

$$f_a(z) := \langle b_z, a \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-z} \, .$$

Επειδή για κάθε $p = 1, 2, \ldots$ και κάθε $z \in D(0, r)$ είναι

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k-z}\right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|a_k|}{|k-z|} \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{|k-z|^2}\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k-1)^2}\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi^2}{6} \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

από το κριτήριο Cauchy η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/(n-z))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο δίσκο $D(0, r)$. Επομένως η συνάρτηση f_a είναι αναλυτική(ολόμορφη) στο δίσκο $D(0, r)$.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο Γ δεν είναι πυκνό στον ℓ_2. Τότε, υπάρχει $a = (a_n) \in \ell_2$, $a \neq 0$, τέτοιο ώστε $f_a(x) := \langle b_x, a\rangle = 0$ στο διάστημα $[-r, r]$, $0 < r < 1$. Από την αρχή ταυτοτισμού (γνωστό αποτέλεσμα της μιγαδικής ανάλυσης) έπεται ότι

$$f_a(z) := \langle b_z, a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-z} = 0, \quad \text{για κάθε } z \in D(0, r),\ 0 < r < 1.$$

Όμως

$$f_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(1 - z/n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{n^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k+1}}\right) z^k,$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k+1}} = 0, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Επομένως,

$$a_1 = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \qquad \text{(γιατί;)}$$

δηλαδή $a_1 = 0$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ και κατά συνέπεια $a = 0$ που είναι άτοπο. Άρα, το σύνολο Γ είναι πυκνό στον ℓ_2. ■

Έστω $A = [\langle x_j, x_k\rangle]$, $j, k = 1, \ldots, n$, ο πίνακας Gram των διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_n$ είναι ενός χώρου Hilbert H. Η ορίζουσα

$$G = G(x_1, \ldots, x_n) = \det A = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix},$$

ορίστηκε από τον J. P. Gram [29] και λέγεται *ορίζουσα Gram* των $x_1, \ldots, x_n$. Είναι $G \neq 0$ αν και μόνο αν τα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι, έστω τα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, συνεπάγεται ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Επειδή

$$\sum_{i=1}^n a_i \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i x_i, x_j \right\rangle = \langle 0, x_j \rangle = 0\,, \quad 1 \leq j \leq n\,,$$

θα πρέπει να είναι $G \neq 0$.

Αντίστροφα, αν τα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, ένα από τα διανύσματα, έστω το x_j, είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων διανυσμάτων. Τότε, η j στήλη της G είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων στηλών και επομένως $G = 0$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα, που είναι εφαρμογή του Θεωρήματος Προβολής, χρησιμοποιείται για την απόδειξη του Θεωρήματος Müntz στο κεφάλαιο 3. Το Θεώρημα Müntz είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα της προσεγγιστικής θεωρίας.

Λήμμα 1.11 (Λήμμα του Gram) *Έστω $M = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ όπου τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός χώρου Hilbert H. Η απόσταση $d = d(x, M) = \|x - \operatorname{proj}_M x\|$ ενός διανύσματος $x \in H$ από το M δίνεται από τον τύπο*

$$d = \left\{ \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right\}^{1/2},$$

όπου $G^+ := G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ είναι η ορίζουσα Gram των $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$.

Απόδειξη. *Από το Θεώρημα Προβολής για κάθε $x \in G$ υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $z \in H$ τα οποία ορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις εξισώσεις*

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle z, x_j \rangle = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,, \\ x = z + \sum_{i=1}^n a_i x_i\,. \end{array} \right\}$$

Επειδή $d^2 = \langle z, z \rangle = \langle x, z \rangle$, τα $a_1, \ldots, a_n$ και το d^2 είναι η μοναδική λύση του συστήματος

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^n a_i \langle x_i, x_j \rangle & + & 0 \cdot d^2 = \langle x, x_j \rangle\,, \quad 1 \leq j \leq n\,, \\ \sum_{i=1}^n a_i \langle x_i, x \rangle & + & 1 \cdot d^2 = \langle x, x \rangle\,. \end{array} \right\}$$

Επειδή $G = G(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ είναι $a_i = \frac{G^{(i)}}{G}$, όπου $G^{(i)}$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την G αντικαθι-

στώντας την i-γραμμή με την $(\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \ldots, \langle x, x_n\rangle)$. Είναι

$$d^2 = \frac{1}{G} \cdot \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \ldots & \langle x_1, x_n\rangle & \langle x_1, x\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \ldots & \langle x_2, x_n\rangle & \langle x_2, x\rangle \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle x_n, x\rangle \\ \langle x, x_1\rangle & \langle x, x_2\rangle & \cdots & \langle x, x_n\rangle & \langle x, x\rangle \end{vmatrix} = \frac{G^+}{G}\,.$$

■

Υπενθυμίζεται ότι αν E είναι ένας χώρος με νόρμα και $\varphi : E \to \mathbb{C}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

(i) Το φ είναι συνεχές.

(ii) Το φ είναι συνεχές στο 0.

(iii) Υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $|\varphi(x)| \leq M\|x\|$, για κάθε $x \in E$.

Ορίζουμε τη νόρμα του φ ως εξής

$$\|\varphi\| := \inf\left\{M > 0 : |\varphi(x)| \leq M\|x\|\,, \quad \text{για κάθε } x \in E\right\}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|\,.$$

Ο δυϊκός χώρος E^* του E είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών $\varphi : E \to \mathbb{C}$. Ο $(E^*, \|\cdot\|)$ είναι ένας πλήρης χώρος, δηλαδή είναι ένας χώρος Banach.

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει το δυϊκό χώρο H^* του χώρου Hilbert H.

Θεώρημα 1.12 (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) *Έστω $f \in H^*$ όπου H είναι ένας χώρος Hilbert. Τότε υπάρχει μοναδικό $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $f(x) = \langle x, y_0\rangle$, για κάθε $x \in H$ και είναι $\|f\| = \|y_0\|$.*

Απόδειξη. *Αν $f(x) = \langle x, y_0\rangle$, τότε $|f(x)| \leq \|y_0\|\|x\|$ και επομένως $\|f\| \leq \|y_0\|$. Όμως*

$$\|y_0\|^2 = \langle y_0, y_0\rangle = f(y_0) \leq \|f\|\|y_0\|\,,$$

οπότε $\|y_0\| \leq \|f\|$. Άρα, $\|f\| = \|y_0\|$.

Απομένει να δείξουμε ότι κάθε $f \in H^*$ έχει την μορφή $f(x) = \langle x, y_0\rangle$, για κάποιο $y_0 \in H$.

Αν $f = 0$ παίρνουμε $y_0 = 0$. Υποθέτουμε ότι $f \neq 0$ και ορίζουμε το $M = \{x : f(x) = 0\}$. Ο M είναι υπόχωρος του H και επειδή το f είναι συνεχές ο M είναι κλειστός υπόχωρος. Επειδή $M \neq H$, από το πόρισμα του Θεωρήματος προβολής υπάρχει $y \in M^\perp$ με $\|y\| = 1$. Θέτουμε

$$u := f(x)\,y - f(y)\,x\,.$$

Επειδή $f(u) = f(x) f(y) - f(y) f(x) = 0$, *το* $u \in M$ *και είναι* $\langle u, y\rangle = 0$. *Επομένως,*

$$f(x) = f(x) \langle y, y\rangle = f(y) \langle x, y\rangle .$$

Άρα,

$$f(x) = \langle x, y_0\rangle , \quad \text{όπου } y_0 = \overline{f(y)}\, y.$$

Το y_0 *είναι μοναδικό. Πράγματι, αν* $f(x) = \langle x, y_0\rangle = \langle x, y_1\rangle$, *για κάθε* $x \in H$, *τότε* $\langle x, y_0 - y_1\rangle = 0$, *για κάθε* $x \in H$. *Για* $x = y_0 - y_1$ *παίρνουμε* $\langle y_0 - y_1, y_0 - y_1\rangle = 0$, *δηλαδή* $y_0 = y_1$. ■

Πόρισμα 1.13 *Αν ο* H *είναι μιγαδικός χώρος Hilbert, τότε η απεικόνιση*

$$\varphi : H \to H^* , \quad \text{με } \varphi(y) := f_y \text{ όπου } f_y(x) = \langle x, y\rangle,\ x \in H,$$

είναι μια συζυγής−ισομετρία του H *επί του* H^*. *Δηλαδή, για κάθε* $y_1, y_2 \in H$ *και κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\lambda y_1 + \lambda y_2) = \overline{\lambda} f_{y_1} + \overline{\mu} f_{y_2} = \overline{\lambda}\, \varphi(y_1) + \overline{\mu}\, \varphi(y_2) \text{ και } \|y\| = \|f_y\|, \text{ για κάθε } y \in H.$$

Αν ο H *είναι πραγματικός χώρος Hilbert, τότε οι χώροι* H *και* H^* *είναι ισομετρικοί.*

Τα Θεωρήματα Προβολής και Riesz είναι δύο σημαντικές ιδιότητες των χώρων Hilbert. Θα δείξουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα δεν ισχύουν κατ᾽ ανάγκη σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή τα θεωρήματα αυτά χαρακτηρίζουν την πληρότητα των χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 1.14 *Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(1) Ο H *είναι πλήρης.*

(2) Αν ο M *είναι κλειστός υπόχωρος του* H *τότε* $H = M \oplus M^{\perp}$.

(3) Αν ο M *είναι κλειστός υπόχωρος του* H *τότε* $M = M^{\perp\perp}$.

(4) Αν ο M *είναι κλειστός υπόχωρος του* H *με* $M \neq H$ *τότε* $M^{\perp} \neq \{0\}$.

(5) Αν το $f :\to \mathbb{C}$ *είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό, τότε υπάρχει* $y \in H$ *τέτοιο ώστε* $f(x) = \langle x, y\rangle$, *για κάθε* $x \in H$.

Απόδειξη. *Το ότι* $(1) \Rightarrow (2)$ *είναι το Θεώρημα Προβολής.*

$(2) \Rightarrow (3)$ *Είναι προφανές ότι* $M \subseteq M^{\perp\perp}$. *Αν* $x \in M^{\perp\perp}$ *τότε από τη* (2) $x = x_1 + x_2$, *όπου* $x_1 \in M$ *και* $x_2 \in M^{\perp}$. *Επειδή* $x_2 = x - x_1 \in M^{\perp\perp}$, *θα είναι* $x_2 = 0$, *και επομένως* $x = x_1 \in M$.

$(3) \Rightarrow (4)$ *Έστω* M *κλειστός υπόχωρος του* H *με* $M \neq H$. *Υποθέτουμε ότι* $M^{\perp} = \{0\}$. *Λόγω της* (3) *θα είναι*

$$M = M^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H ,$$

άτοπο.

(4) $\Rightarrow$ (5) *Είναι η απόδειξη του θεωρήματος Riesz.*

(5) $\Rightarrow$ (1) *Έστω* $\widehat{H}$ *είναι η πλήρωση του χώρου* H, *δηλαδή* $\overline{H} = \widehat{H}$ *και ο* $\widehat{H}$ *είναι χώρος Hilbert* (*πλήρης*). *Αν* $y \in \widehat{H}$ *τότε το*

$$f(x) := \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον H. *Από την* (5) *υπάρχει* $z \in H$ *τέτοιο ώστε*

$$f(x) := \langle x, z \rangle .$$

Δηλαδή,

$$\langle x,\, y - z \rangle = 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Επειδή $\overline{H} = \widehat{H}$ *θα είναι* $\langle x,\, y - z \rangle = 0$, *για κάθε* $\widehat{x} \in \widehat{H}$.*Επομένως* $y = z \in H$. *Άρα,* $H = \widehat{H}$ *και ο* H *είναι πλήρης.* ∎

Παρατηρήσεις 1.2 *(i) Στην απόδειξη* (5) $\Rightarrow$ (1) *του προηγούμενου θεωρήματος χρησιμοποιήσαμε την πλήρωση* $\widehat{H}$ *του χώρου με εσωτερικό γινόμενο* H. *Δηλαδή* $\overline{H} = \widehat{H}$ *και ο* $\widehat{H}$ *είναι χώρος Hilbert. Η ύπαρξη του* $\widehat{H}$ *αποδεικνύεται ως εξής :*

Αν H^{**} *είναι ο δεύτερος δυϊκός του* H, *για την κανονική απεικόνιση*

$$H \to H^{**}$$
$$x \mapsto \widehat{x}$$

όπου $\widehat{x}(f) := f(x)$, $f \in H^*$, *είναι γνωστό ότι* $\|x\| = \|\widehat{x}\|$. *Αν* H_0 *είναι η εικόνα του* H *μέσω της κανονικής απεικόνισης, τότε ο* H_0 *είναι υπόχωρος του* H^{**}. *Αν* $\widehat{H} := \overline{H_0}$, *ο* $\widehat{H}$ *είναι πλήρης χώρος επειδή ο* H^{**} *είναι πλήρης. Επομένως ο* H *είναι πυκνός υπόχωρος του* $\widehat{H}$. *Για να αποδείξουμε ότι ο* $\widehat{H}$ *είναι χώρος Hilbert αρκεί να δείξουμε ότι η νόρμα του* $\widehat{H}$ *ικανοποιεί την ιδιότητα του παραλληλογράμμου. Όμως αν* $x, y \in \widehat{H}$, *τότε υπάρχουν ακολουθίες* (x_n), (y_n) *σημείων του* H *τέτοιες ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,, \lim_{n\to\infty} y_n = y, \quad (\text{δηλαδή } \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0).$$

Επειδή

$$\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2\,,$$

συνεπάγεται ότι

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,,$$

δηλαδή η ιδιότητα του παραλληλογράμμου ισχύει στον $\widehat{H}$.

(ii) Ανεξάρτητα από το αν ο H *είναι πλήρης ή όχι, όπως αποδείξαμε στο Θεώρημα 1.14 ισχύουν οι συνεπαγωγές*

$$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4).$$

Παρατήρηση 1.3 *Αν ο χώρος με εσωτερικό γινόμενο H δεν είναι πλήρης, τότε υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ο οποίος δεν ικανοποιεί τις προτάσεις (2), (3) και (4) του Θεωρήματος 1.14. Κατασκευάζουμε ένα τέτοιο υπόχωρο στο επόμενο παράδειγμα.*

Παράδειγμα 1.3 *Θεωρούμε, όπως και στα Παραδείγματα 1.1 (4), τον χώρο με εσωτερικό γινόμενο $H \subset \ell_2$ που αποτελείται από εκείνες τις ακολουθίες μιγαδικών αριθμών (a_k), για τις οποίες ισχύει $a_k \neq 0$ μόνο για πεπερασμένο το πλήθος k. Ο H δεν είναι πλήρης. Έστω*

$$M = \left\{ (a_k) \in H : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot a_k = 0 \right\} .$$

Επειδή η συνάρτηση

$$f\left((b_k)\right) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cdot b_k = \langle (b_k), \left(k^{-1}\right) \rangle$$

είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον ℓ_2, και $M = \ker f \cap H$, ο M είναι κλειστός υπόχωρος του H, με $M \neq H$. Θα δείξουμε ότι $M^{\perp} = \{0\}$. Πράγματι, έστω

$$(a_k) \in M^{\perp} , \quad \text{με } a_k = 0 \text{ για } k \geq N+1.$$

Για $1 \leq n \leq N$ ορίζουμε την ακολυθία (a_k^n) με

$$a_k^n = \begin{cases} -n & \text{αν } k = n \ , \\ N+1 & \text{αν } k = N+1 \ , \\ 0 & \text{αν } k \neq n, N+1 \ . \end{cases}$$

Προφανώς $(a_k^n) \in M$, και επειδή $(a_k) \in M^{\perp}$ έχουμε

$$0 = \langle (a_k),\, (a_k^n) \rangle = -n a_n \,.$$

Επομένως $a_n = 0$ για $1 \leq n \leq N$ και επειδή $a_n = 0$ για $n \geq N+1$, έχουμε αποδείξει ότι $M^{\perp} = \{0\}$.
Επειδή στο Θεώρημα 1.14 έχουμε τις συνεπαγωγές (2) ⇒ (3) ⇒ (4), ο υπόχωρος M που κατασκευάσαμε δεν ικανοποιεί ούτε τις (2) και (3).

Παρατηρήσεις 1.3 *(i) Αν ο χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ δεν είναι πλήρης, είναι εύκολο να βρούμε ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον H που δεν είναι της μορφής*

$$f(x) = \langle x, y \rangle , \quad y \in H \,.$$

Πράγματι, αν $\widehat{H}$ είναι η πλήρωση του H, παίρνουμε

$$f(x) = \langle x, \widehat{y} \rangle , \quad \widehat{y} \in \widehat{H} \,, \, \widehat{y} \notin H \,.$$

(ii) *Αν W είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, τότε υπάρχει ακριβώς ένας κλειστός υπόχωρος X, τέτοιος ώστε*

$$H = W \oplus X \,, \quad \text{με } W \perp X,$$

δηλαδή

$$X = W^{\perp} \,.$$

Αν όμως δεν απαιτήσουμε ο X να είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W, τότε μπορεί να υπάρχουν πολλοί υπόχωροι X του H, τέτοιοι ώστε

$$H = W \oplus X \,.$$

Αν π.χ.

$$H = \mathbb{R}^2 \quad \text{και } W = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\},$$

τότε κάθε ευθεία γραμμή X που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, και δεν συμπίπτει με τον πραγματικό άξονα, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ τέτοιος ώστε

$$\mathbb{R}^2 = W \oplus X \,.$$

Σ' αυτή την περίπτωση

$$W^{\perp} = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \quad .$$

Θεώρημα 1.15 *Έστω (x_n) είναι ακολουθία διανυσμάτων ορθογώνιων μεταξύ τους, ενός χώρου Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(α′) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον H.*

(β′) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

(γ′) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle$ συγκλίνει για κάθε $y \in H$.*

Σημείωση. Είναι προφανές ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n,\, y \rangle$ συγκλίνει για κάθε $y \in H$ αν και μόνο αν η $\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\, y \rangle$ συγκλίνει για κάθε $y \in H$. Επομένως, από τις (α′) και (γ′) προκύπτει ότι η ισχυρή σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι ισοδύναμη με την ασθενή σύγκλιση της σειράς.

Απόδειξη. (β′)⇒ (α′). Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, τότε για $m \geq n$ έχουμε

$$\|S_m - S_n\|^2 = \|x_{n+1} + \cdots + x_m\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 + \cdots + \|x_m\|^2$$

επειδή $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ για $i \neq j$. Επομένως από τη (β′) έπεται ότι η (S_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Επειδή ο H είναι πλήρης η (S_n) θα συγκλίνει, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ θα συγκλίνει στον H.

(α′) ⇒ (γ′). Έστω

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - x \right\| = 0 \quad .$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\langle x_k,\, y\rangle - \langle x, y\rangle\right| = \left|\langle\sum_{k=1}^{n} x_k,\, y\rangle - \langle x, y\rangle\right| = \left|\langle\sum_{k=1}^{n} x_k - x,\, y\rangle\right| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k - x\right\| \|y\| \ .$$

Επομένως,

$$\sum_{k=1}^{n}\langle x_k,\, y\rangle = \langle x, y\rangle \, .$$

(γ′) ⇒ (β′) Έστω $\Lambda_n \in H^*$, *με*

$$\Lambda_n\left(y\right) := \sum_{i=1}^{n}\langle y,\, x_i\rangle \, , \quad y \in H \, , \; n \in \mathbb{N} \, .$$

Επειδή η ακολουθία $\left(\Lambda_n\left(y\right)\right)$ *συγκλίνει για κάθε* $y \in H$ *από το Θεώρημα Banach-Steinhaus η ακολουθία* $\left(\|\Lambda_n\|\right)$ *είναι φραγμένη.*

Επειδή

$$\Lambda_n\left(y\right) = \langle y,\, \sum_{i=1}^{n} x_i\rangle \, ,$$

από το Θεώρημα του Riesz έχουμε

$$\|\Lambda_n\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \ .$$

Όμως $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ *για* $i \neq j$, *οπότε*

$$\|\Lambda_n\| = \left\{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2\right\}^{1/2} \ .$$

Επομένως, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ *είναι φραγμένη. Άρα, η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2 \ \text{θα συγκλίνει} \ .$$

■

1.2 Φραγμένοι Τελεστές

Υποθέτουμε ότι οι H_1 και H_2 είναι χώροι Hilbert. Αν ο γραμμικός τελεστής $T: \; H_1 \to H_2$ ικανοποιεί τη συνθήκη :

$$\exists \, a > 0 \, , \ \text{τέτοιο ώστε} \ \|Tx\| \leq a\|x\| \, , \ \forall \, x \in H_1$$

τότε ο T λέγεται φραγμένος. Η νόρμα του T ορίζεται ως εξής :

$$\|T\| := \inf\left\{a > 0 : \ \|Tx\| \leq a \cdot \|x\| \, , \, \forall \, x \in H_1\right\} \ .$$

Θεώρημα 1.16 *Υποθέτουμε ότι οι H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert. Τότε ο γραμμικός τελεστής $T : H_1 \to H_2$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν το $T(\{x \in H_1 : \|x\| = 1\})$ είναι φραγμένο σύνολο του H_2. Είναι*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| = 1\} \quad .$$

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι ο $T : H_1 \to H_2$ είναι φραγμένος. Αν $\|x\| = 1$, τότε

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\| = \|T\| \text{ και } \sup\{\|Tx\| : x \in H_1, \|x\| = 1\} \leq \|T\| \quad .$$

Υποθέτουμε τώρα ότι για κάθε $x \in H_1, x \neq 0$ είναι

$$\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \sup\{\|Tx\| : x \in H_1, \|x\| = 1\} < \infty \quad .$$

Τότε

$$\|Tx\| \leq \|x\| \cdot \sup\{\|Tx\| : x \in H_1, \|x\| = 1\} \quad ,$$

και προφανώς αυτή η ανισότητα ισχύει για $x = 0$. Δηλαδή έχουμε :

$$\|Tx\| \leq \|x\| \cdot \sup\{\|Tx\| : x \in H_1, \|x\| = 1\} \ , \ \forall\, x \in H_1 \quad .$$

Επομένως ο T είναι φραγμένος και είναι :

$$\|Tx\| \leq \sup\{\|Tx\| : x \in H_1, \|x\| = 1\} \quad .$$

Άρα :

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H_1, \|x\| = 1\} \quad .$$

■

Με $\mathfrak{B}(H)$ συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων τελεστών $T : H \to H$ όπου H είναι ένας χώρος Hilbert $H \neq \{0\}$.

Θεώρημα 1.17 *Αν H είναι ένας χώρος Hilbert, για κάθε $T \in \mathfrak{B}(H)$ υπάρχει $T^* \in \mathfrak{B}(H)$ μοναδικό τέτοιο ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,, \quad x, y \in H\,. \tag{1.4}$$

Ο T^* λέγεται χώρου Hilbert συζυγής του T. Ισχύουν οι ιδιότητες :

(α′) $T^{**} = T$.

(β′) $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} \cdot S^* + \overline{\beta} \cdot T^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *και* $S, T \in \mathfrak{B}(H)$.

(γ′) $I^* = I$, (*I είναι ο ταυτοτικός τελεστής*).

(δ') $(ST)^* = T^* \cdot S^*$, $S, T \in \mathfrak{B}(H)$.

(ϵ') $\|T^*\| = \|T\|$.

(ϛ') $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Απόδειξη. *Είναι*

$$|\langle Tx, y\rangle| \le \|Tx\| \, \|y\| \le \|T\| \, \|x\| \, \|y\| \, , \quad \text{για κάθε } y \in H.$$

Έστω η απεικόνιση

$$\varphi_y\,(x) := \langle Tx, y\rangle \, , \quad x \in H \, .$$

Επειδή $|\varphi_y\,(x)| \le \|T\| \, \|y\| \, \|x\|$, *η απεικόνιση* φ_y *είναι γραμμική και φραγμένη με νόρμα μικρότερη ή ίση του*

$$\|T\| \, \|y\| \, .$$

Από το θεώρημα Riesz, υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $T^*y \in H$ *τέτοιο ώστε*

$$\varphi_y\,(x) := \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \, , \quad x, y \in H \, .$$

Επίσης

$$\|T^*y\| = \|\varphi_y\| \, \|T\| \, \|y\| \, . \tag{1.5}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
\langle x, \, T^*\,(\alpha y + \beta z)\rangle &= \langle Tx, \, \alpha y + \beta z\rangle \\
&= \overline{\alpha}\,\langle Tx, y\rangle + \overline{\beta}\,\langle Tx, z\rangle \\
&= \overline{\alpha}\,\langle x, T^*y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x, T^*z\rangle \\
&= \langle x, \alpha T^*y\rangle + \langle x, \beta T^*z\rangle \\
&= \langle x, \, \alpha T^*y + \beta T^*z\rangle \, ,
\end{aligned}$$

έχουμε

$$T^*\,(\alpha y + \beta z) = \alpha T^*y + \beta T^*z \, , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \, , \; y, z \in H \, .$$

Δηλαδή ο T^* *είναι γραμμικός τελεστής. Από την* (1.5) *ο* $T^* \in \mathfrak{B}(H)$, *με*

$$\|T^*\| \le \|T\| \, . \tag{1.6}$$

Αν υπάρχει και άλλος γραμμικός τελεστής S, *με*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \, , \quad x, y \in H \, ,$$

τότε θα είναι

$$\langle x, Sy\rangle = \langle x, T^*y\rangle \, , \quad \text{για κάθε } x, y \in H \, .$$

Επομένως,

$$Sy = T^* y\,, \quad \forall y \in H\,.$$

Άρα,

$$S = T^* \quad .$$

Επειδή

$$\langle x, T^{**}y)\rangle = \langle T^* x, y\rangle = \overline{\langle y, T^* x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle\,,$$

είναι

$$T^{**} = T\,.$$

Από την (1.6) *έχουμε*

$$\|T\| = \|T^{**}\| \le \|T^*\|\ .$$

Επομένως,

$$\|T^{**}\| = \|T\|\ .$$

Η απόδειξή των (β′) και (γ′) είναι εύκολη. Επειδή

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^* y\rangle = \langle x, T^* S^* y\rangle\,,$$

είναι

$$(ST)^* = T^* S^*\,.$$

Τέλος, για την απόδειξη της (στ′) παρατηρούμε ότι

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \le \|T^*Tx\|\,\|x\| \le \|T^*T\|\,\|x\|^2\,, \quad x \in H\,,$$

οπότε

$$\|T\|^2 \le \|T^*T\|\ .$$

Όμως, χρησιμοποιώντας την (ϵ′) έχουμε

$$\|T^*T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2\ .$$

Άρα,

$$\|T^*T\| = \|T\|^2\ .$$

■

Παρατήρηση 1.4 *Έχουμε αποδείξει ότι η απεικόνιση $T \to T^*$ είναι μία ενέλιξη (involution) του χώρου $\mathfrak{B}(H)$, δηλαδή ισχύει*

$$T^{**} = T\,, \quad (T+S)^* = T^* + S^*\,, \quad (aT)^* = \overline{a}T^* \quad \text{και} \quad (ST)^* = T^* S^*\,.$$

Επειδή ικανοποιείται και η σχέση

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \ ,$$

ο χώρος $\mathfrak{B}(H)$ *είναι μία* $\mathbb{C}^*$*-άλγεβρα.*

Ισχύει το αντίστροφο (Θεώρημα Gelfand-Naimark) :

Αν A *είναι μία* $\mathbb{C}^*$*-άλγεβρα, τότε υπάρχει χώρος Hilbert* H *και απεικόνιση* $a \mapsto T_a$ *της* A *εντός του* $\mathfrak{B}(H)$ *τέτοια ώστε*

$$T_{a+b} = T_a + T_b \,, \quad T_{\lambda a} = \lambda \cdot T_a \,, \quad T_{ab} = T_a T_b \,, \quad T_{a^*} = (T_a)^* \quad \text{και} \quad \|T_a\| = \|a\| \,.$$

Παράδειγμα 1.4 *Έστω ο τελεστής*

$$T : L_2\,[a,b] \to L_2\,[a,b]$$

με

$$T\,(f)\,(s) := \int_a^b K\,(s,t)\,f\,(t)\ dt \,, \quad \text{όπου } K \in L_2\,([a,b] \times [a,b]).$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2 &= \left[\int_a^b \left|\int_a^b K\,(s,t)\,f\,(t)\ dt\right|^2 ds\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_a^b \left(\int_a^b |K(s,t)|^2\,dt\right)\,ds\right]^{1/2} \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\
&= \|K\|_2\,\|f\|_2 \ ,
\end{aligned}$$

ο T *είναι φραγμένος τελεστής. Ο* T^* *ορίζεται από τη σχέση :*

$$\langle T\,(f), g\rangle = \langle f, T^*\,(g)\rangle \,, \quad f, g \in L_2\,[a,b]$$

και επομένως

$$\int_a^b \left(\int_a^b K\,(s,t)\,f\,(t)\ dt\right) \overline{g\,(s)}\,ds = \int_a^b f\,(s)\,\overline{T^*\,(g)\,(s)}\,ds \,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\,(s)\,\overline{T^*\,(g)\,(s)}\,ds &= \int_a^b f\,(s) \left(\int_a^b K\,(t,s)\,\overline{g(t)}\,dt\right) ds \qquad \text{(θεώρημα Fubini)} \\
&= \int_a^b f\,(s) \left(\overline{\int_a^b \overline{K\,(t,s)}\,g\,(t)\ dt}\right)\ ds \,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$T^*(g)(s) = \int_a^b \overline{K\,(t,s)}\,g(t)\,dt \,.$$

Παράδειγμα 1.5 *Αν $f \in L_2[0,1]$, για $0 \le x \le 1$ ορίζουμε*

$$Wf(x) := f(x) + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt\,. \tag{1.7}$$

Υποθέτουμε ότι $\varphi_1(x) = e^{-x}$, $\varphi_2(x) = e^{x}$. Τότε, ο $W : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ είναι ένας γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε

(α΄) $W\varphi_1 = \varphi_2$.

(β΄) Αν $\langle f, \varphi_1\rangle = 0$, τότε $\langle Wf, \varphi_2\rangle = 0$ και $\|Wf\|_2 = \|f\|_2$.

(γ΄) Αν $\langle g, \varphi_2\rangle = 0$, τότε υπάρχει $f \in L_2[0,1]$ τέτοιο ώστε $\langle f, \varphi_1\rangle = 0$ και $g = Wf$.

(δ΄) Ο W είναι ένας αμφιμονοσήμαντος τελεστής.

Απόδειξη.

(α΄)

$$W\varphi_1(x) = e^{-x} + 2\int_0^x e^{x-2t}\, dt = e^{-x} - \left. e^{x-2t}\right|_{t=0}^{t=x} = e^{x} = \varphi_2(x)\ .$$

(β΄) Είναι $W = I + T$, όπου

$$If(x) = f(x) \quad \text{και} \quad Tf(x) := 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt\,.$$

Έχουμε

$$\langle T^* f, h\rangle = \langle f, Th\rangle = 2\int_0^1 f(x)\, dx \cdot \int_0^x e^{x-t}\, \overline{h(t)}\, dt = 2\int_0^1 \overline{h(t)}\, dt \cdot \int_t^1 e^{x-t} f(x)\, dx\,.$$

Επομένως,

$$T^* f(x) = 2\int_x^1 e^{x-t} f(t)\, dt\,.$$

Αν

$$\langle f, \varphi_1\rangle = \int_0^1 e^{-t} f(t)\, dt = 0\,,$$

τότε

$$\begin{aligned}
T^*Tf(x) &= 4\int_x^1 e^{t-x}\, dt \cdot \int_0^t e^{t-u} f(u)\, du \\
&= 4\int_0^x e^{-(u+x)} f(u)\, du \cdot \int_x^1 e^{2t}\, dt + 4\int_x^1 e^{-(u+x)} f(u)\, du \cdot \int_u^1 e^{2t}\, dt \\
&= 2e^{2-x}\int_0^1 e^{-u} f(u)\, du - 2\int_0^x e^{x-u} f(u)\, du - 2\int_x^1 e^{u-x} f(u)\, du \\
&= -Tf(x) - T^* f(x)\ .
\end{aligned}$$

Δηλαδή, αν $\langle f, \varphi_1 \rangle = 0$ *τότε*

$$W^* W f = (I + T + T^* + T^* T) f = f .$$

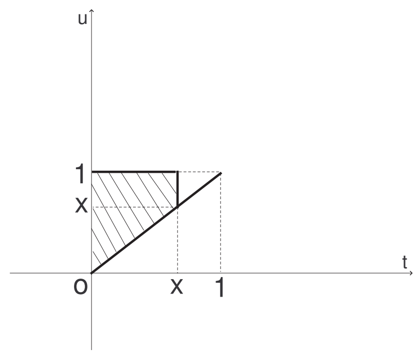
Επομένως,

$$\langle Wf, \varphi_2 \rangle = \langle Wf, W\varphi_1 \rangle = \langle W^* W f, \varphi_1 \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle = 0$$

και

$$\|Wf\|_2^2 = \langle Wf, Wf \rangle = \langle W^* W f, f \rangle = \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 .$$

(γ′) *Υποθέτουμε τώρα ότι* $\langle g, \varphi_2 \rangle = 0$.



Τότε,

$$\begin{aligned}
TT^* g(x) &= 4 \int_0^x e^{t-x}\, dt \cdot \int_t^1 e^{u-t} g(u)\, du \\
&= 4 \int_0^x e^{x+u} g(u)\, du \cdot \int_0^u e^{-2t}\, dt + 4 \int_x^1 e^{x+u} g(u)\, du \cdot \int_0^x e^{-2t}\, dt \\
&= 2e^x \int_0^1 e^u g(u)\, du - 2 \int_0^x e^{x-u} g(u)\, du - 2 \int_x^1 e^{u-x} g(u)\, du \\
&= -Tg(x) - T^* g(x) .
\end{aligned}$$

Επομένως $WW^* g = g$, *όταν* $\langle g, \varphi_2 \rangle = 0$.

Αν θέσουμε $f = W^* g$, *τότε*

$$g = Wf \quad \textit{και} \quad \langle f, \varphi_1 \rangle = \langle W^* g, \varphi_1 \rangle = \langle g, W\varphi_1 \rangle = \langle g, \varphi_2 \rangle = 0 .$$

Δηλαδή ο W *είναι μία ισομετρία του* $\{\varphi_1\}^\perp$ *επί του* $\{\varphi_2\}^\perp$.

(δ′) *Ο* W *είναι επί. Πράγματι, επειδή*

$$L_2[0,1] = \operatorname{span}\{\varphi_2\} \oplus \operatorname{span}\{\varphi_2\}^\perp ,$$

αν $g \in \operatorname{span}\{\varphi_2\}^{\perp}$, *οπότε* $\langle g, \varphi_2 \rangle = 0$, *από τη (γ′) υπάρχει* $f \in L_2[0,1]$ *τέτοιο ώστε* $Wf = g$. *Ενώ αν* $g \in \operatorname{span}\{\varphi_2\}$, *δηλαδή* $g = \lambda\varphi_2$, *τότε*

$$W(\lambda\varphi_1) = \lambda\varphi_2 = g\,.$$

Ο W *είναι ένας* $1-1$ *τελεστής. Πράγματι, επειδή*

$$L_2[0,1] = \operatorname{span}\{\varphi_1\} \oplus \operatorname{span}\{\varphi_1\}^{\perp}\,,$$

αν

$$W(\lambda\varphi_1 + f) = \lambda\varphi_2 + Wf = 0\,, \quad \textit{όπου } f \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}^{\perp},$$

δηλαδή $\langle f, \varphi_1 \rangle = 0$, *τότε* $Wf = 0$ *και* $\lambda = 0$.

Από τη (β′) είναι $\|f\|_2 = \|Wf\|_2 = 0$, *οπότε* $f = 0$. *Άρα*

$$f + \lambda\varphi_1 = 0\,,$$

δηλαδή ο W *είναι* $1-1$.

Έστω τώρα $g \in L_2[0,1]$. *Είναι*

$$g = g - \frac{\langle g, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}\,\varphi_2 + \frac{\langle g, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}\,\varphi_2\,.$$

Αν θέσουμε

$$f := W^*\left(g - \frac{\langle g, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}\,\varphi_2\right) + \frac{\langle g, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}\,\varphi_1\,,$$

τότε

$$Wf = g\,.$$

Επειδή $W^*\varphi_2 = \lambda\varphi_1$, *όπου* $\lambda = e^2$ *και*

$$\lambda\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \langle W^*\varphi_2, \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2, W\varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle\,,$$

θα είναι

$$f = W^*g - \left(\frac{1}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} - \frac{1}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}\right)\langle g, \varphi_2 \rangle\,\varphi_1\,.$$

Όμως,

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \frac{e^2-1}{2e^2} \quad \textit{και} \quad \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \frac{e^2-1}{2}\,.$$

Άρα,

$$f = W^*g - 2\langle g, \varphi_2 \rangle\,\varphi_1\,.$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται

$$f(x) = g(x) - 2\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\,,$$

που είναι ο “ *αντίστροφος τύπος* ” *του*

$$g(x) = Wf(x) = f(x) + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt\,.$$

■

1.3 Ορθοκανονικά Σύνολα και Βάσεις –Γενικευμένες Σειρές Fourier

Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος το $S \subset V$ λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το span$S$ είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S. Το span$S$ είναι διανυσματικός χώρος και μάλιστα ο μικρότερος διανυσματικός υπόχωρος του V που περιέχει το S.

Το σύνολο $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ σε ένα χώρο με εσωτεικό γινόμενο H λέγεται *ορθοκανονικό* αν $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in A$. Δηλαδή

$$\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{αν } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Πρόταση 1.18 *Υποθέτουμε ότι ο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και το E είναι υποσύνολο του H του οποίου τα στοιχεία είναι ορθογώνια μεταξύ των και $0 \notin E$. Τότε το E είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. *Έστω $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, με $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0$. Τότε, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, έχουμε*

$$0 = \langle 0, x_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 .$$

Επομένως, επειδή $x_j \neq 0$ είναι $\alpha_j = 0$. Δηλαδή το σύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. ■

Ορισμός 1.3 *Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του H. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\widehat{x} : A \to \mathbb{C}$ με*

$$\widehat{x}\,(\alpha) := \langle x, u_\alpha \rangle \, .$$

Οι αριθμοί $\widehat{x}\,(\alpha)$ λέγονται γενικευμένοι συντελεστές Fourier του x ως προς το σύνολο $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ και το ανάπτυγμα

$$x \sim \sum_{a \in A} \langle x, u_a \rangle \, u_a$$

είναι η γενικευμένη σειρά Fourier του x.

Ορισμός 1.4 *Ένα ορθοκανονικό σύνολο που δεν περιέχεται σε κανένα άλλο ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγεται μεγιστικό ή πλήρες ορθοκανονικό σύνολο.*

Θα αποδείξουμε αργότερα ότι ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο είναι μια βάση του H αν και μόνο αν ο H είναι χώρος Hilbert.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μια ιδιότητα των μερικά διατεταγμένων συνόλων που είναι ισοδύναμη με το αξίωμα επιλογής, δηλαδή αν $\mathfrak{B}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων τότε υπάρχει συνάρτηση

$$C : \mathfrak{B} \to \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \quad \text{τέτοια ώστε } C(B) \in B, \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}.$$

Ένα σύνολο $\mathcal{P}$ λέγεται μερικά διατεταγμένο από μια διμερή σχέση "$\leq$" αν

(i) $a \leq b$ και $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

(ii) $a \leq a$.

(iii) $a \leq b$ και $b \leq a \Rightarrow a = b$.

Ένα υποσύνολο $\mathfrak{F}$ του μερικά διατεταγμένου συνόλου $\mathcal{P}$ λέγεται *ολικά διατεταγμένο* αν για κάθε $a, b \in \mathfrak{F}$ είναι $a \leq b$ ή $b \leq a$.
Το παρακάτω θεώρημα είναι ισοδύναμο με το αξίωμα επιλογής.

Θεώρημα 1.19 (Hausdorff) *Κάθε μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο περιέχει ένα μεγιστικό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο.*

Θεώρημα 1.20 *Κάθε ορθοκανονικό σύνολο A ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ περιέχεται σε ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του H.*

Απόδειξη. *Έστω $\mathcal{P}$ είναι η κλάση όλων των ορθοκανονικών συνόλων του H που περιέχουν το A. Είναι $\mathcal{P} \neq \emptyset$ επειδή το $A \in \mathcal{P}$. Ορίζουμε μια μερική διάταξη στο $\mathcal{P}$ θέτοντας $B_1 > B_2$ αν $B_1 \supset B_2, B_1, B_2 \in \mathcal{P}$. Επομένως, το $\mathcal{P}$ περιέχει μία μεγιστική ολικά διατεταγμένη κλάση $\mathfrak{F}$. Έστω S είναι η ένωση όλων των στοιχείων της κλάσης $\mathfrak{F}$. Είναι $A \subset S$. Θα αποδείξουμε ότι το S είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του H.*
Αν $u_1, u_2 \in S$, τότε $u_1,\ u_2 \in B_2$ για κάποια $B_1, B_2 \in \mathfrak{F}$. Αφού το $\mathfrak{F}$ είναι ολικά διατεταγμένο, έχουμε $B_1 \subset B_2$ (ή $B_2 \subset B_1$). Επομένως $u_1, u_2 \in B_2$. Επειδή το B_2 είναι ορθοκανονικό σύνολο, θα είναι $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ αν $u_1 \neq u_2$ και $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$ αν $u_1 = u_2$. Άρα, το S είναι ορθοκανονικό.
Υποθέτουμε τώρα ότι το S δεν είναι μεγιστικό οπότε το S είναι υποσύνολο κάποιου ορθοκανονικού συνόλου S^*. Τότε $S^* \notin \mathfrak{F}$ και το S^* περιέχει κάθε στοιχείο του $\mathfrak{F}$. Επομένως, το $\mathfrak{F} \cup \{S^*\}$ είναι μια ολικά διατεταγμένη κλάση που περιέχει την $\mathfrak{F}$. Άτοπο, επειδή η $\mathfrak{F}$ είναι η μεγιστική ολικά διατεταγμένη κλάση. ∎

Αν $H \neq \{0\}$, τότε υπάρχει $x \in H$ με $\|x\| = 1$. Επομένως το $A = \{x\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του H και από το Θεώρημα 1.20 έχουμε ότι:

Πόρισμα 1.21 *Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $H \neq \{0\}$ περιέχει ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.*

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει ένα ισοδύναμο ορισμό για το μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.

Πρόταση 1.22 *Έστω E είναι ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(α′) E είναι ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.

(β′) Αν το $x \in H$ είναι τέτοιο ώστε $x \perp E$, τότε $x = 0$.

Απόδειξη.
(α′)⇒(β′) Αν $x \in E$, $x \neq 0$, με $x \perp E$ τότε το $E \cup \{x/\|x\|\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο που περιέχει το E (άτοπο). Επομένως, αν $x \perp E$ τότε $x = 0$.
(β′)⇒(α′) Αν το E δεν είναι μεγιστικό , τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $F \subset H$, με $F \supset E$ (Θεώρημα 1.20). Επομένως αν $x \in F \backslash E$, τότε $\|x\| = 1$ και $x \perp E$ (άτοπο). Δηλαδή το E είναι μεγιστικό .

■

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.20 δεν μας δίνει καμία πληροφορία για την κατασκευή ενός ορθοκανονικού συνόλου. Δίνουμε τώρα μία μέθοδο κατασκευής ενός μεγιστικού ορθοκανονικού συνόλου.

1.3.1 Μέθοδος των Gram–Schmidt

Έστω $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ είναι ένα αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο H. Έστω $z_1 = y_1$. Αν W_1 είναι ο χώρος που παράγεται από το y_1, θέτουμε

$$u_1 = \|z_1\|^{-1} z_1\,, \quad u_2 = \|z_2\|^{-1} z_2\,, \quad \text{όπου } z_2 = y_2 - \operatorname{proj}_{W_1} y_2 = y_2 - \langle y_2, u_1\rangle u_1 .$$

Το $z_2 \neq 0$ αφού τα y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Είναι $\langle u_2, u_1\rangle = \|z_2\|^{-1} \langle z_2, u_1\rangle = 0$. Δηλαδή το $\{u_1, u_2\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο με $\operatorname{span}\{u_1, u_2\} = \operatorname{span}\{y_1, y_2\}$.
Υποθέτουμε ότι το ορθοκανονικό σύνολο $\{u_1, \ldots, u_n\}$ έχει κατασκευαστεί και ότι

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\} = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_k\}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Αν το y_{n+1} υπάρχει και W_n είναι ο χώρος που παράγεται από το $y_1, \ldots, y_n$, θέτουμε

$$z_{n+1} = y_{n+1} - \operatorname{proj}_{W_n} y_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle y_{n+1}, u_k\rangle u_k\,.$$

Επειδή $y_{n+1} \notin \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$, είναι $z_{n+1} \neq 0$. Παίρνουμε

$$u_{n+1} = \|z_{n+1}\|^{-1} z_{n+1}\,.$$

Για $1 \leq j \leq n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle u_{n+1}, u_j\rangle &= \|z_{n+1}\|^{-1} \left\langle y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle y_{n+1}, u_k\rangle u_k,\; u_j \right\rangle \\ &= \|z_{n+1}\|^{-1} \left(\langle y_{n+1}, u_j\rangle - \langle y_{n+1}, u_j\rangle\langle u_j, u_j\rangle\right) = 0\,.\end{aligned}$$

Επομένως, το $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο. Απομένει να δείξουμε ότι

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$$

Επειδή το y_{n+1} είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \ldots, u_{n+1}$ είναι

$$\{y_{n+1}\} \cup \{\operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\}\} \subset \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$$

και επομένως

$$\operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\} \subset \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}\,.$$

Παρόμοια, το u_{n+1} είναι γραμμικός συνδυασμός των y_{n+1} και $u_1, \ldots, u_n$. Επομένως,

$$u_{n+1} \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$$

και κάτα συνέπεια

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} \subset \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}\,.$$

Άρα,

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$$

Πρόταση 1.23 *Έστω H ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $H \neq \{0\}$ και D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του H. Τότε το H περιέχει ένα μεγιστικό αριθμήσιμο ορθοκανονικό σύνολο που το παίρνουμε από το D με τη μέθοδο Gram-Schmidt.*

Απόδειξη. *Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \notin D$ και ότι $D = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Ορίζουμε $y_1 = x_{n_1}$ όπου $n_1 = 1$. Υποθέτουμε ότι τα $y_1 = x_{n_1}, \ldots, y_k = x_{n_k}$ έχουν οριστεί, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν δεν υπάρχει $j > n_k$ έτσι ώστε τα $\{y_1, \ldots, y_k, x_j\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε ένα πεπερασμένο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset D$. Διαφορετικά παίρνουμε το n_{k+1} να είναι το μικρότερο τέτοιο j, και θέτουμε $y_{k+1} = x_{n_{k+1}}$. Έτσι λοιπόν ορίζουμε ένα αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \subset D$. Έστω S είναι ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει το $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$. Αν $x_j \in D$, τότε το x_j είναι γραμμικός συνδυασμός των $y_1, \ldots, y_k$, όπου το k είναι τέτοιο ώστε $n_k \leq j < n_{k+1}$ (εκτός και αν το y_k είναι το τελευταίο από τα y_i που επιλέξαμε, οπότετε $n_k \leq j$). Δηλαδή $x_j \in S$. Επομένως $D \subset S$, και ο υπόχωρος S είναι πυκνός στο H.*

Έστω τώρα $\{u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$ είναι το ορθοκανονικό σύνολο που παίρνουμε από το $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ με τη μέθοδο Gram-Schmidt. Για να αποδείξουμε ότι το $\{u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$ είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο, αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \in H$ με $\langle x, u_n \rangle = 0$ για κάθε n, τότε $x = 0$ (Πρόταση 1.22). Όμως για κάθε $y \in S$ είναι $y = a_1 u_1 + \cdots + a_p u_p$, οπότε

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x,\ \sum_{i=1}^{p} a_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \overline{a}_i \langle x, u_i \rangle = 0\,.$$

Επειδή ο υπόχωρος S είναι πυκνός στο H, υπάρχει ακολουθία (z_n) του S τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}\|x-z_n\|=0$. Επειδή $\langle x, z_n\rangle = 0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, είναι

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, z_n\rangle = \langle x, x-z_n\rangle \le \|x\|\,\|x-z_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα, $x=0$. ■

1.3.2 Ιδιότητες των Ορθοκανονικών Συνόλων και Βάσεων

Πρόταση 1.24 *Έστω $\{u_a : a\in A\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Αν το F είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A, δηλαδή $F=\{a_1,\ldots,a_n\}$, έστω $M_F = \operatorname{span}\{u_{a_1},\ldots,u_{a_n}\}$.*

(α΄) Αν $\varphi : A\to\mathbb{C}$ είναι μία συνάρτηση, με $\varphi(a)=0$ για κάθε $a\in A\setminus F$, τότε υπάρχει $y\in M_F$, δηλαδή

$$y = \sum_{k=1}^{n}\varphi(a_k)\,u_{a_k} \tag{1.8}$$

με $\widehat{y}(a) = \langle y, u_a\rangle = \varphi(a)$, για κάθε $a\in A$. Επίσης,

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\varphi(a_k)|^2 \ . \tag{1.9}$$

(β΄) Αν

$$f(\lambda_{a_1},\ldots,\lambda_{a_n}) := \left\| x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_{a_k}u_{a_k}\right\|, \quad \text{όπου } x\in H,$$

τότε η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο μοναδικό σημείο

$$(\lambda_{a_1},\ldots,\lambda_{a_n}) = (\langle x, u_{a_1}\rangle,\ldots,\langle x, u_{a_n}\rangle)\ .$$

Επομένως, αν

$$S_F(x) = \sum_{k=1}^{n}\widehat{x}(a_k)u_{a_k} \tag{1.10}$$

τότε

$$\|x - S_F(x)\| < \|x - S\| \tag{1.11}$$

για κάθε $S\in M_F$, εκτός και αν $S=S_F(x)$.

(γ΄) Αν $x\in H$ τότε

$$\sum_{k=1}^{n}|\widehat{x}(a_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n}|(x, u_{a_k})|^2 \le \|x\|^2 \ . \tag{1.12}$$

Απόδειξη. *Η απόδειξη της (α΄) είναι άμεσα συνέπεια του γεγονότος ότι το $\{u_a : a\in A\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο. Για την απόδειξη της (β΄) παρατηρούμε ότι*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_{a_k}u_{a_k}\right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|(x,u_{a_k}) - \lambda_{a_k}|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x,u_{a_k})|^2 \ .$$

Επομένως η f είναι ελάχιστη αν και μόνο αν $\lambda_{a_k} = (x, u_{a_k})$, $k = 1, \dots, n$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε :

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left|\langle x, u_{a_k}\rangle\right|^2 \quad .$$

■

Παρατήρηση 1.5 *Η ανισότητα (1.11) αποδεικνύει ότι τα μερικά αθροίσματα $S_F(x)$ της σειράς Fourier $\sum_{a\in A} \widehat{x}(a)\, u_a$ του x είναι η μοναδική βέλτιστη προσέγγιση του x από το M_F.*

Αν A είναι ένα σύνολο, $A \neq \emptyset$ και $0 < p < \infty$, ορίζουμε το χώρο $\ell_p(A)$ ως εξής

$$\ell_p(A) := \left\{ \varphi : A \to \mathbb{C}\,, \quad \sum_{a\in A} |\varphi(a)|^p < \infty \right\}.$$

Το άθροισμα $\sum_{a\in A} |\varphi(a)|^p$ ορίζεται ως εξής

$$\sum_{a\in A} |\varphi(a)|^p := \sup \left\{ \sum_{a\in F} |\varphi(a)|^p : \ F \text{ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του } A \right\}.$$

Ο χώρος $\ell_p(A)$ είναι ο χώρος $L_p(\mu)$ του παραδείγματος 1.20 (3) του Κεφαλαιο 1, όπου μ είναι το αριθμητικό μέτρο (counting measure). Ειδικά, ο $\ell_2(A)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \varphi, \psi\rangle := \sum_{a\in A} \varphi(a)\, \overline{\psi(a)}\,.$$

Αν $\varphi, \psi \in \ell_2(A)$ τότε $\varphi \cdot \overline{\psi} \in \ell_1(A)$. Αν $A = \mathbb{N}$ τότε προφανώς ο χώρος $\ell_2(\mathbb{N})$ είναι ο χώρος Hilbert ℓ_2.

Πρόταση 1.25 *Έστω $\{u_a : a \in A\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του χώρου $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και έστω $x \in H$. Τότε το σύνολο $E_x = \{a \in A : \langle x, u_a\rangle \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. *Αν $n \in \mathbb{N}$, έστω*

$$S_n = \left\{ a \in A : \left|\langle x, u_a\rangle\right|^2 > \|x\|^2/n \right\}.$$

Από την (1.12) της Πρότασης 1.24 το S_n περιέχει το πολύ $n-1$ στοιχεία. Επομένως το

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

είναι το πολύ αριθμήσιμο. ■

Παρατήρηση 1.6 *Αν $\varphi \in \ell_2(A)$, παρόμοια αποδεικνύεται ότι το σύνολο*

$$B = \{a \in A : \varphi(a) \neq 0\}$$

είναι το πολύ αριθμήσιμο. Πράγματι, έστω

$$B_n = \{a \in A : |\varphi(a)| > 1/n\}\ , \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Επειδή

$$\sum_{a\in B_n} |n\varphi(a)|^2 = n^2 \sum_{a\in B_n} |\varphi(a)|^2 \le n^2 \sum_{a\in A} |\varphi(a)|^2$$

το B_n είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Επομένως και το

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,, \quad \text{όπου } B_n \subset B_{n+1}$$

είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Παρατήρηση 1.7 *Αν $\{u_a : a \in A\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και $x \in H$, από την Πρόταση 1.25 τα αθροίσματα*

$$\sum_{a\in A} |\langle x, u_a\rangle|^2 \quad \text{και} \quad \sum_{a\in A} \langle x, u_a\rangle$$

έχουν το πολύ αριθμήσιμο το πλήθος μη-μηδενικούς όρους. Είναι

$$x = \sum_{a\in A} \langle x, u_a\rangle\, u_a$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $F_0 \subset A$ τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F \subset A$, με $F \supset F_0$, είναι

$$\left\| x - \sum_{a\in F} \langle x, u_a\rangle\, u_a \right\| < \varepsilon\,.$$

Γενικά, έστω $(E, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι $\{x_a : a \in A\} \subset E$. Έστω $\mathfrak{F}$ είναι η οικογένεια όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων F του A. Θα λέμε ότι η $\sum_{a\in A} x_a$ συγκλίνει στο $x \in E$, γράφουμε

$$x = \sum_{a\in A} x_a\,,$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_0 \in \mathfrak{F}$ τέτοιο ώστε για κάθε $F \supseteq F_0$, $F \in \mathfrak{F}$, είναι

$$\left\| \sum_{a\in F} x_a - x \right\| < \varepsilon\,.$$

Πρόταση 1.26 *Έστω $(E, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα και υποθέτουμε ότι $\{x_a : a \in A\} \subset E$. Αν $x = \sum_{a\in A} x_a$, για κάποιο $x \in E$, τότε $x_a = 0$ για όλα εκτός από αριθμήσιμο το πλήθος a.*

Απόδειξη. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $F_n \in \mathfrak{F}$ τέτοιο ώστε*

$$\left\| x - \sum_{a\in F} x_a \right\| < \frac{1}{2n}\,, \quad \text{για κάθε } F \supseteq F_n \text{ με } F \in \mathfrak{F}.$$

Αν $F_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$*, το* F_0 *είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του* A*. Αν* $\beta \in A$ *και* $\beta \notin F_0$*, τότε* $\beta \notin F_n$*,* $n = 1, 2, \ldots$*. Επειδή* $F_n \cup \{\beta\} \supset F_n$*, έχουμε*

$$\begin{aligned}
\|x_\beta\| &= \left\| \sum_{a \in F_n \cup \{\beta\}} x_a - \sum_{a \in F_n} x_a \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{a \in F_n \cup \{\beta\}} x_a - x \right\| + \left\| \sum_{a \in F_n} x_a - x \right\| \\
&< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} .
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\|x_\beta\| < 1/n$*, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*. Άρα,* $x_\beta = 0$*.* ■

Αν (X, Σ, μ) είναι ένας χώρος μέτρου, από γνωστό θεώρημα, βλέπε [61, Theorem 3.13], η κλάση όλων των μετρήσιμων απλών συναρτήσεων $s : X \to \mathbb{C}$, που είναι τέτοιες ώστε $\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty$, είναι σύνολο πυκνό στον $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Άμεση συνέπεια αυτού του Θεωρήματος είναι το παρακάτω αποτέλεσμα.

Λήμμα 1.27 *Έστω* $\{u_a : a \in A\}$ *είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *και έστω* $P = \operatorname{span}\{u_a : a \in A\}$*. Τότε η συνάρτηση*

$$f : P \to \ell_2(A) , \quad \text{με } f(x) = \widehat{x},$$

είναι μία ισομετρία. Δηλαδή $\|x\| = \|\widehat{x}\|$*, για κάθε* $x \in P$*. Το* $f(P)$*, που είναι το σύνολο των συναρτήσεων των οποίων ο φορέας (support) είναι κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του* A*, είναι σύνολο πυκνό στον* $\ell_2(A)$*.*

Απόδειξη.

Από την Πρόταση 1.24 (α΄) η f *είναι μία ισομετρία (είναι* $\|\widehat{x}\| = \|x\|$ *για κάθε* $x \in P$*) του* P *εντός του* $\ell_2(A)$*. Το* $f(P)$ *είναι το σύνολο των συναρτήσεων* $\varphi : A \to \mathbb{C}$ *των οποίων ο φορέας είναι κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του* A*. Από το Θεώρημα που αναφέραμε παραπάνω, το* $f(P)$ *είναι σύνολο πυκνό στον* $\ell_2(A)$*.*

Δίνουμε τώρα μια αναλυτική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος.

Αν $\varphi \in \ell_2(A)$ *θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία* $(x_n) \in P$ *τέτοια ώστε* $\widehat{x}_n \to \varphi$*, δηλαδή* $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{x}_n - \varphi\|_2 = 0$*.*

Από την Παρατήρηση 1.6 προκύπτει ότι το σύνολο

$$A_n = \{a \in A : |\varphi(a)| > 1/n\}$$

είναι πεπερασμένο. Είναι $A_n \subset A_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a : \varphi(a) \neq 0\} .$$

Αν

$$x_n := \sum_{a \in A_n} \varphi(a)\, u_a ,$$

τότε $x_n \in P$. *Είναι* $\widehat{x}_n = \varphi \chi_{A_n}$, *όπου* χ_{A_n} *η χαρακτηριστική συνάρτηση του* A_n. *Επομένως,*

$$\varphi - \widehat{x}_n = \varphi \chi_{A \setminus A_n} \quad \text{και} \quad |\varphi(a) - \widehat{x}_n(a)| \leq |\varphi(a)| \ , \ \text{όπου η } \varphi \in \ell_2(A).$$

Είναι $A_n \nearrow \{a \in A : \varphi(a) \neq 0\}$ *και* $\lim_{n\to\infty} \widehat{x}_n(a) = \varphi(a)$, *για κάθε* $a \in A$ ($\widehat{x}_n(a) = \varphi(a)$ *ή* 0). *Επειδή* $\lim_{n\to} |\varphi(a) - \widehat{x}_n(a)| = 0$, *από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \widehat{x}_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{a\in A} |\varphi(a) - \widehat{x}_n(a)|^2 \right)^{1/2} = 0 \, .$$

■

Παρατήρηση 1.8 *Αποδείξαμε παραπάνω ότι η* $(\widehat{x}_n)$ *είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία στον* $\ell_2(A)$, *δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{x}_n - \varphi\|_2 = 0 \, .$$

Αν $n > m$, *τότε το* $A_n \setminus A_m$ *είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του* A *και ισχύει*

$$x_n - x_m = \sum_{a \in A_n \setminus A_m} \varphi(a) \, u_a \, .$$

Επειδή από την Πρόταση 1.24 (α΄) είναι

$$\|\widehat{x}_n - \widehat{x}_m\|_2 = \|x_n - x_m\| \ ,$$

η (x_n) *είναι ακολουθία Cauchy του* H. *Επειδή ο* H *είναι πλήρης, θα είναι* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in H$, *δηλαδή* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. *Όμως* $(x_n) \in P$, *οπότε το* $x \in \overline{P}$. *Είναι*

$$\widehat{x}(a) = \langle x, u_a \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u_a \rangle = \lim_{n\to\infty} \widehat{x}_n(a) = \varphi(a) \ .$$

Δηλαδή $\varphi = \widehat{x}$. *Άρα, για κάθε* $\varphi \in \ell_2(A)$ *υπάρχει* $x \in \overline{P}$ *τέτοιο ώστε* $\varphi = \widehat{x}$.

Θεώρημα 1.28 *Έστω* $\{u_a : a \in A\}$ *είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert* H. *Τότε για κάθε* $x \in H$ *είναι*

$$\sum_{a\in A} |\widehat{x}(a)|^2 \leq \|x\|^2 \ . \qquad \text{(ανισότητα Bessel)}$$

Η $f : H \to \ell^2(A)$, *με* $f(x) = \widehat{x}$, *είναι μία συνεχής και γραμμική απεικόνιση του* H *επί του* $\ell^2(A)$. *Ο περιορισμός της* f *στο* $\overline{P}$ *είναι μία ισομετρία του* $\overline{P}$ *επί του* $\ell_2(A)$, *όπου* $P = \mathrm{span}\{u_a : a \in A\}$. *Δηλαδή,*

$$\|x\|^2 = \sum_{a\in A} |\widehat{x}(a)|^2 \ , \quad \text{για κάθε } x \in \overline{P}.$$

Απόδειξη. *Έχουμε αποδείξει, ανισότητα* (1.12) *της Πρότασης 1.24, ότι αν* F *είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο* F *του* A *τότε για κάθε* $x \in H$ *είναι*

$$\sum_{a\in F} |\widehat{x}(a)|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Επειδή η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του A, έχουμε

$$\sum_{a\in A} |\widehat{x}(a)|^2 = \sup\left\{\sum_{a\in F} |\widehat{x}(a)|^2 : F \text{ πεπερασμένο υποσύνολο του } A\right\} \leq \|x\|^2 .$$

Από την ανισότητα Bessel έπεται ότι η f απεικονίζει τον χώρο H εντός του $\ell_2(A)$. Η f είναι γραμμική και από την ανισότητα Bessel έχουμε

$$\|f(y) - f(x)\|_2 = \|\widehat{y} - \widehat{x}\|_2 \leq \|y - x\| .$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής. Από το Λήμμα 1.27 η $f : P \to \ell_2(A)$ είναι μία ισομετρία και το $f(P)$ είναι σύνολο πυκνό στον $\ell_2(A)$. Από την Παρατήρηση 1.8 η f απεικονίζει το $\overline{P}$ επί του $\ell_2(A)$.
Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in \overline{P}$. Υπάρχουν $u_{a_1}, \ldots, u_{a_n}$ και $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_{a_k}\right\| < \varepsilon .$$

Από την (1.11) της Πρότασης 1.24 έχουμε

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(a_k)\; u_{a_k}\right\| < \varepsilon .$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$

$$(\|x\| - \varepsilon)^2 \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(a_k)\; u_{a_k}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(a_k)|^2 \leq \sum_{a\in A} |\widehat{x}(a)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Άρα,

$$\|x\|^2 = \sum_{a\in A} |\widehat{x}(a)|^2 , \quad \text{για κάθε } x \in \overline{P} .$$

■

Θεώρημα 1.29 (Θεώρημα Riesz–Fischer) *Έστω ο $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $\{u_a : a \in A\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο. Αν $\{c_a : a \in A\} \subset \mathbb{C}$ τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :*

(α΄) $\sum_{a\in A} |c_a|^2 < \infty$.

(β΄) Υπάρχει κάποιο $x \in H$ τέτοιο ώστε $x = \sum_{a\in A} c_a\, u_a$. Επιπλέον, αν $x = \sum_{a\in A} c_a u_a$, τότε

$$c_a = \langle x, u_a\rangle = \widehat{x}(a) .$$

Απόδειξη. *Υποθέτουμε ότι $\sum_{a\in A} |c_a|^2 < \infty$. Τότε, μόνο αριθμήσιμο το πλήθος από τα c_a είναι διάφορα του μηδενός. Αν $\varphi \in \ell_2(A)$ με $\varphi(a) = c_a$ και $P = \operatorname{span}\{u_a : a \in A\}$, από το Θεώρημα 1.28 υπάρχει $x \in \overline{P}$ τέτοιο ώστε $\widehat{x} = \varphi$, δηλαδή*

$$\widehat{x}(a) = \varphi(a) = c_a \quad \text{και} \quad \|x\| = \|\varphi\| = \|\widehat{x}\| .$$

Επομένως,

$$\|x\|^2 = \sum_{a\in A} |c_a|^2 .$$

Αν F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του A τότε

$$\left\| x - \sum_{a\in F} c_a\, u_a \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{a\in F} |c_a|^2 .$$

Επειδή

$$\|x\|^2 = \sum_{a\in A} |c_a|^2 ,$$

θα είναι

$$x = \sum_{a\in A} c_a\, u_a .$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $x = \sum_{a\in A} c_a u_a$, για κάποιο $x \in H$. Από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\langle x, u_\beta\rangle = \left\langle \sum_{a\in A} c_a u_a,\, u_\beta \right\rangle = \sum_{a\in A} c_a \langle u_a, u_\beta\rangle = c_\beta .$$

Επομένως, $x = \sum_{a\in A} \langle x, u_a\rangle\, u_a = \sum_{a\in A} \widehat{x}\,(a)\; u_a$ και από την ανισότητα Bessel έχουμε

$$\sum_{a\in A} |c_a|^2 = \sum_{a\in A} |\widehat{x}\,(a)|^2 \le \|x\|^2 .$$

Δηλαδή,

$$\sum_{a\in A} |c_a|^2 < \infty .$$

■

Ορισμός 1.5 *Το σύνολο των διανυσμάτων $\{u_a : a \in A\}$ ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται ορθοκανονική βάση του H αν*

(i) Το $\{u_a : a \in A\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο.

(ii) Για κάθε $x \in H$ υπάρχουν $c_a \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$x = \sum_{a\in A} c_a\, u_a .$$

Αν η $\{u_a : a \in A\}$ είναι ορθοκανονική βάση τότε από την ορθοκανονικότητα του συνόλου $\{u_a : a \in A\}$ και την συνέχεια του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\langle x, u_a\rangle = \widehat{x}\,(a) = c_a .$$

Δηλαδή, αν η $\{u_a : a \in A\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, τότε για κάθε $x \in H$ είναι

$$x = \sum_{a \in A} \widehat{x}(a)\ u_a\,.$$

Γενικά αν (x_n) είναι μια ακολουθία ενός χώρου Banach X άπειρης διάστασης, τότε η (x_n) λέγεται βάση Schauder (ή βάση) του X αν κάθε $x \in X$ έχει μοναδικό ανάπτυγμα της μορφής

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\,, \quad a_n \in \mathbb{C}\,.$$

Έχει κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach μια βάση Schauder ; O P. Enflo [21] απέδειξε ότι υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν έχει βάση Schauder.

Παρατήρηση 1.9 *Όπως προκύπτει από την Πρόταση 1.23 και το Θεώρημα 1.23, κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση. Αν $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία τέτοια βάση, τότε για κάθε $x \in H$ έχουμε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n\,.$$

Υπενθυμίζεται ότι αν B είναι μία βάση (βάση Hamel) του διανυσματικού χώρου V, τότε κάθε $x \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου το πλήθος στοιχείων του B.
Σε αντιδιαστολή με τη βάση Hamel, μία ορθοκανονική βάση σ᾿ ένα χώρο Hilbert είναι μία αλγεβρική και τοπολογική έννοια η οποία επιτρέπει και αριθμήσιμο το πλήθος γραμμικούς συνδυασμούς.
Σημείωση. Σε ένα χώρο Hilbert ένα μεγιστικό ορθοκανονικό απειροσύνολο S δεν είναι βάση Hamel.
Πράγματι, επειδή το S είναι απειροσύνολο θα περιέχει μία ακολουθία $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων διαφορετικών μεταξύ τους. Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n^2} u_n \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$

η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} u_n \quad \text{συγκλίνει απόλυτα}\,.$$

Όμως, ο χώρος H είναι πλήρης και επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} u_n$ θα συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} u_n\,.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι σ᾿ ένα χώρο με νόρμα η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς συνεπάγεται τη σύγκλιση της σειράς αν και μόνο αν ο χώρος είναι πλήρης.
Έχουμε

$$\widehat{x}(n) = \langle x, u_n \rangle = \frac{1}{n^2}\,.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το S είναι βάση Hamel. Τότε θα είναι

$$x = \lambda_{a_1} u_{a_1} + \cdots + \lambda_{a_n} u_{a_n}\,, \quad u_{a_i} \in S \quad \text{και} \quad \lambda_{a_i} \in \mathbb{C}\,,\ i = 1, \ldots, n\,.$$

Αν $u_n \neq u_{a_1}, \ldots, u_{a_n}$, είναι

$$\frac{1}{n^2} = \langle x, u_n \rangle = \langle \lambda_{a_1} u_{a_1} + \cdots + \lambda_{a_n} u_{a_n},\ u_n \rangle = 0$$

που είναι άτοπο. Άρα, η S δεν είναι βάση Hamel.

Παρατήρηση 1.10 *Έστω το $\{u_a : a \in A\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Το θεώρημα Riesz-Fischer δεν αποδεικνύει ότι κάθε $x \in H$ γράφεται στη μορφή*

$$x = \sum_{a \in A} \widehat{x}\,(a)\, u_a\,.$$

Επειδή

$$\sum_{a \in A} |\widehat{x}\,(a)|^2 \leq \|x\|^2\ ,$$

από το Θεώρημα Riesz-Fischer έπεται ότι υπάρχει $y \in H$ τέτοιο ώστε

$$y = \sum_{a \in A} \widehat{x}\,(a)\, u_a\,.$$

Επομένως $\widehat{x}\,(a) = \widehat{y}\,(a)$. Δηλαδή,

$$\langle x - y,\, u_a \rangle = 0\,, \quad \forall a \in A\,.$$

Αν το $\{u_a : a \in A\}$ είναι μεγιστικό (πλήρες) ορθοκανονικό σύνολο, από την Πρόταση 1.22 έχουμε ότι $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Άρα,

$$x = \sum_{a \in A} \widehat{x}\,(a)\, u_a\,,$$

δηλαδή η $\{u_a : a \in A\}$ είναι ορθοκανονική βάση. Έχουμε λοιπόν αποδείξει την πρώτη συνεπαγωγή του επόμενου βασικού θεωρήματος.

Θεώρημα 1.30 *Έστω το $\{u_a : a \in A\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(α΄) Το $\{u_a : a \in A\}$ είναι μεγιστικό (πλήρες) ορθοκανονικό σύνολο.

(β΄) Το $\{u_a : a \in A\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H. Δηλαδή για κάθε $x \in H$ είναι

$$x = \sum_{a \in A} \widehat{x}\,(a)\, u_a\,.$$

Επομένως, η σειρά Fourier του x συγκλίνει, ως προς την νόρμα, στο x.

(γ′) Το σύνολο $P = \operatorname{span}\{u_a : a \in A\}$ είναι πυκνό στον H, δηλαδή $\overline{P} = H$.

(δ′) Για κάθε $x \in H$ είναι

$$\|x\|^2 = \sum_{a \in A} |\widehat{x}(a)|^2 \,. \qquad \text{(ισότητα στην ανισότητα Bessel)}$$

Επομένως, είναι $\|x\| = \|\widehat{x}\|$, όπου $\widehat{x} \in \ell_2(A)$ με $\widehat{x}(a) = \langle x, u_a\rangle$.

(ϵ′) Για κάθε $x, y \in H$ είναι

$$\langle x, y\rangle = \sum_{a \in A} \widehat{x}(a)\, \overline{\widehat{y}(a)} \,. \qquad \text{(ταυτότητα Parseval)}$$

Επομένως, $\langle x, y\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle$, όπου $\widehat{x}, \widehat{y} \in \ell_2(A)$ με $\widehat{x}(a) = \langle x, u_a\rangle$ και $\widehat{y}(a) = \langle y, u_a\rangle$.

Απόδειξη. *Η απόδειξη (α′) ⇒ (β′) έγινε στην παρατήρηση που προηγήθηκε του θεωρήματος. Είναι προφανές ότι (β′) ⇒ (γ′). Από το Θεώρημα 1.28 προκύπτει ότι (γ′) ⇒ (δ′). Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η (δ′). Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου εύκολα αποδεικνύεται η (ϵ′). Για την απόδειξη (δ′) ⇒ (ϵ′) μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής :*
Είναι

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right\}$$

και παρόμοια στο χώρο Hilbert $\ell_2(A)$

$$\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|\widehat{x}+\widehat{y}\|^2 - \|\widehat{x}-\widehat{y}\|^2 + i\|\widehat{x}+i\widehat{y}\|^2 - i\|\widehat{x}-i\widehat{y}\|^2\right\} \,.$$

Άρα, έχουμε

$$\langle x, y\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle \,.$$

(ϵ′) ⇒ (α′) Αν η (α′) δεν ισχύει, θα υπάρχει $z \in H$, με $\|z\| = 1$, τέτοιο ώστε $z \perp u_a$ για κάθε $a \in A$. Τότε,

$$1 = \langle z, z\rangle \neq 0 = \sum_{a \in A} |\langle z, u_a\rangle|^2 \,.$$

Άτοπο, επειδή από την (ϵ′) έχουμε

$$\langle z, z\rangle = \sum_{a \in A} |\langle z, u_a\rangle|^2 \,.$$

■

Πόρισμα 1.31 *Αν $\{u_a : a \in A\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, τότε ο H είναι ισομετρικός του $\ell_2(A)$.*

Απόδειξη. *Από τα Θεωρήματα 1.28 και 1.30 προκύπτει ότι η απεικόνιση*

$$f : H \to \ell_2(A)\,, \quad \text{με } f(x) = \widehat{x},$$

είναι γραμμική και αμφιμονοσήμαντη. Επίσης,

$$\|x\| = \|\widehat{x}\|\,, \quad \forall x \in H \,.$$

■

Παρατήρηση 1.11 *Αποδείξαμε στο Θεώρημα 1.30 ότι σ' ένα χώρο Hilbert ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι μεγιστικό (πλήρες) αν και μόνο αν είναι ορθοκανονική βάση. Γενικά αυτό δεν ισχύει αν ο χώρος δεν είναι Hilbert. Έστω π.χ. ο ℓ_2 με ορθοκανονική βάση την $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$.*
Θεωρούμε τον χώρο H που παράγεται από τα διανύσματα $\{f, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ του ℓ_2, όπου $f = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n)\, e_n$. Τότε, το $B = \{e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του H. Η B όμως δεν είναι ορθοκανονική βάση του H επειδή το f δεν γράφεται στη μορφή $f = \sum_{n=2}^{\infty} c_n e_n$.

Θεώρημα 1.32 *Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο H είναι πλήρης (Hilbert) αν και μόνο αν κάθε μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του H είναι βάση.*

Απόδειξη. *Αν ο H είναι πλήρης τότε από το Θεώρημα 1.30 κάθε μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του H είναι βάση.*
Για να αποδείξουμε το αντίστροφο υποθέτουμε ότι το M είναι κλειστός υπόχωρος του $H, M \neq H$, με $M^{\perp} = \{0\}$. Αν το B είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του M, επεκτείνουμε το B έτσι ώστε το $B \cup B_1$ είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του H. Αν $x_1 \in B_1$, τότε υπάρχει $y \in M$ τέτοιο ώστε $\langle y, x_1 \rangle \neq 0$. Επειδή το $B \cup B_1$ είναι βάση του H,

$$y = \sum c_i y_i + \sum d_i x_i\,, \quad y_i \in B \;\; x_i \in B_1\,.$$

Είναι

$$z = \sum d_i x_i = y - \sum c_i y_i \in M$$

και επειδή $x_i \perp B$ το $z \perp B$. Επομένως $z = 0$ αφού το B είναι μεγιστικό στο M. Δηλαδή

$$\langle y, x_1 \rangle = d_1 = 0$$

που είναι άτοπο. Άρα $B_1 = \emptyset$, δηλαδή το B είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του H. Αφού το B είναι βάση του M και του H, θα είναι $M = H$ (άτοπο). Επομένως $M^{\perp} \neq \{0\}$ και από το Θεώρημα 1.14 του κεφαλαίου 1 ο H είναι πλήρης. ■

Έστω

$$S = \{x_\alpha : \alpha \in A\} \quad \text{και} \quad T = \{y_\beta : \beta \in B\}$$

δύο βάσεις ενός χώρου Hilbert H. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{card}\,(S), \mathrm{card}\,(T)$ είναι οι πληθάριθμοι των S και T αντίστοιχα. Επειδή για κάθε $\alpha \in A$ είναι

$$x_\alpha = \sum_{\beta \in B} \langle x_\alpha, y_\beta \rangle y_\beta\,,$$

το

$$B_\alpha = \{\beta \in B : \langle x_\alpha, y_\beta \rangle \neq 0\}$$

είναι αριθμήσιμο (Πρόταση 1.25). Είναι

$$B = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \,.$$

(Αν $\beta \in B \setminus \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$ τότε το $y_\beta \perp S$, όποτε $y_\beta = 0$, άτοπο.)
Επομένως,

$$\mathrm{card}\,(B) \le \mathcal{N}_0 \cdot \mathrm{card}\,(A)$$

και παρόμοια

$$\mathrm{card}\,(A) \le \mathcal{N}_0 \cdot \mathrm{card}\,(B)$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι :

Πρόταση 1.33 *Όλες οι βάσεις ενός χώρου Hilbert έχει τον ίδιο πληθάριθμο.*

Ορισμός 1.6 *Η διάσταση ενός χώρου Hilbert H είναι ο πληθάριθμος των ορθοκανονικών βάσεων του H.*

Πρόταση 1.34 *Ο χώρος Hilbert H είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο H έχει μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη.
Αν ο H είναι διαχωρίσιμος τότε μπορεί να κατασκευαστεί μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (Πρόταση 1.23) χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt.
Αντίστροφα, αν $\{x_1, x_2, \ldots\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H τότε οι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της βάσης με συντελεστές ρητούς αριθμούς αποτελούν ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του H. ■

Πρόταση 1.35 *Δύο χώροι Hilbert H_1 και H_2 είναι ισομετρικοί αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση.*
Απόδειξη. *Προφανώς δύο ισομετρικοί χώροι Hilbert έχουν την ίδια διάσταση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι χώροι H_1 και H_2 έχουν την ίδια διάσταση. Αν $S = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ και $T = \{y_\beta : \beta \in B\}$ είναι δύο βάσεις των H_1 και H_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\varphi : S \to T$. Επεκτείνουμε την φ στον H_1 ως εξής :*

$$\text{αν } x = \sum_{\alpha\in A} \langle x, x_\alpha\rangle\, x_\alpha\,, \quad \text{θέτουμε } \varphi(x) := \sum_{\alpha\in A} \langle x, x_\alpha\rangle \varphi(x_\alpha).$$

Επειδή $\sum_{\alpha\in A} |(x, x_\alpha)|^2 < \infty$, η παραπάνω σειρά συγκλίνει. Προφανώς η $\varphi : H_1 \to H_2$ είναι γραμμική. Είναι και $1-1$ επειδή $\varphi(x) = 0$ συνεπάγεται ότι $\langle x, x_\alpha\rangle = 0, \forall \alpha \in A$ και επομένως $x = 0$.
Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση είναι επί. Αν $y \in H_2$ τότε

$$y := \sum_{\alpha\in A} \langle y, \varphi(x_\alpha)\rangle \varphi(x_\alpha)\,.$$

Επομένως, αν

$$x := \sum_{\alpha\in A} \langle y, \varphi(x_\alpha)\rangle x_\alpha\,,$$

τότε

$$\langle x, x_\alpha \rangle = \langle y, \varphi(x_\alpha) \rangle \,, \quad \alpha \in A$$

και

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha \in A} \langle x, x_\alpha \rangle \varphi(x_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \langle y, \varphi(x_\alpha) \rangle \varphi(x_\alpha) = y \,.$$

Τέλος, η ταυτότητα του Parseval συνεπάγεται ότι

$$\|\varphi\,(x)\| = \left\{ \sum_{\alpha \in A} |\langle x, x_\alpha \rangle|^2 \right\}^{1/2} = \|x\| \quad \textit{και} \quad \langle \varphi\,(x),\, \varphi\,(x') \rangle = \langle x, x' \rangle \,.$$

■

1.4 Ασκήσεις

1. Έστω $C\,[0,1]$ ο χώρος των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) στο $C\,[0,1]$, με

$$f_n\,(x) = \begin{cases} n^{1/4} & \text{αν } 0 \le x \le 1/n \,, \\ x^{-1/4} & \text{αν } 1/n \le x \le 1 \,. \end{cases}$$

   Να αποδειχθεί ότι η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy στο χώρο $C\,[0,1]$ με την L_2-νόρμα και ότι η (f_n) δεν συγκλίνει, με την L_2-νόρμα, στο χώρο $C\,[0,1]$. Δηλαδή ο χώρος $C\,[0,1]$ με την L_2-νόρμα δεν είναι χώρος Hilbert.

   Υπόδειξη. Αν $n \ge m$, να αποδειχθεί ότι $\|f_n - f_m\|_2^2 \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Αν $x, y \in H$, όπου $(H,\, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, να αποδειχθεί ότι

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| \,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \,.$$

3. Έστω $(H,\, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (x_n) του H συγκλίνει, ως προς τη νόρμα, στο $x \in H$ (δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$) αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ και $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$, για κάθε $y \in H$.

4. Έστω A υποσύνολο ενός ενός χώρου Hilbert H. Αν το span$A$ δεν είναι πυκνό στον H, τότε υπάρχει $x \in H$, $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $x \perp a$, για κάθε $a \in A$.

5. Έστω ℓ_2 ο χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (a_k), (b_k) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b}_k \,, \quad (a_k)\,, (b_k) \in \ell_2 \,.$$

Έστω W είναι ο υπόχωρος του ℓ_2, όπως και στα Παραδείγματα 1.1 (4), που αποτελείται από τις μιγαδικές ακολουθίες (a_k) με $a_k \neq 0$ για πεπερασμένο το πλήθος k. Ο W δεν είναι κλειστός υπόχωρος. Να αποδειχθεί ότι $W^{\perp} = \{0\}$, δηλαδή

$$W \oplus W^{\perp} \neq \ell_2 \,.$$

6. Έστω ο χώρος $C\,[0,1]$ με την L_2-νόρμα. Αν $\mathcal{P}$ είναι ο υπόχωρος όλων των πολυωνύμων στο $C\,[0,1]$, να υπολογιστεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $\mathcal{P}^{\perp}$ του $\mathcal{P}$ στο $C\,[0,1]$. Αν η $f \in C\,[0,1]$ είναι τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f\,(x)\, x^n\, dx = 0\,, \quad \text{για } n = 0,1,2,\ldots,$$

τι συμπεραίνετε για την f ;

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν η $f \in C\,[0,1]$, από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $P_\epsilon \in \mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $|f\,(x) - P_\epsilon\,(x)| < \epsilon$, για κάθε $x \in [0,1]$.

7. Έστω ο πραγματικός χώρος Hilbert $L_2\,[0,2\pi]$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(x)\, g\,(x)\; dx$. Αν $\mathcal{P}$ είναι ο υπόχωρος όλων των πολυωνύμων στον $L_2\,[0,2\pi]$, να υπολογιστεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $\mathcal{P}^{\perp}$ του $\mathcal{P}$ στον $L_2\,[0,2\pi]$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $f \in L_2[0,2\pi]$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $P_\epsilon \in \mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $\|f - P_\epsilon\|_2 < \epsilon$.)

8. Έστω H είναι ο χώρος των απόλυτα συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f\,(0) = 0$ και $f' \in L_2\,[0,1]$. Αν $f, g \in H$, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως εξής

$$\langle f, g\rangle \; := \int_0^1 \; f'(t) g'(t)\, dt\,.$$

   (α′) Να αποδειχθεί ότι ο H είναι χώρος Hilbert.

   (β′) Έστω το γραμμικό συναρτησιακό $L : H \to \mathbb{R}$, με $L\,(f) := f\,(t_0)$, για κάποιο $t_0 \in (0,1]$. Να αποδειχθεί ότι το L είναι ένα φραγμένο(συνεχές) συναρτησιακό, να υπολογιστεί η $\|L\|$ και να βρεθεί η μοναδική συνάρτηση $g_0 \in H$ τέτοια ώστε $L\,(f) = \langle f, g_0\rangle$, για κάθε $f \in H$.

9. Έστω H ο χώρος που τα στοιχεία του είναι κλάσεις ισοδυναμίας Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, με $\int_0^\infty \; f(x)^2 e^{-x}\, dx < \infty$. Ο H είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\infty f\,(x)\, g\,(x)\, e^{-x}\, dx\,.$$

   (α′) Να υπολογιστεί το

$$\min\left\{\int_0^\infty \left(x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2\right)^2 e^{-x}\, dx : \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

   (β′) Έστω $M = \operatorname{span}\left\{1, x, x^2\right\}$ ο κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Αν $M^{\perp}$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του M, να υπολογιστεί το

$$\max\left\{\left|\int_0^\infty x^3 g\,(x)\, e^{-x}\, dx\right| : \; g \in M^{\perp}\,,\; \|g\| \leq 1\right\}$$

και να βρεθεί η μοναδική συνάρτηση $g_0 \in M^{\perp}$ τέτοια ώστε

$$\|g_0\| = 1 \quad \text{και} \quad \max\left\{\left|\int_0^{\infty} x^3 g\,(x)\, e^{-x}\, dx\right| :\ g \in M^{\perp}\,,\ \|g\| \leq 1\right\} = \int_0^{\infty} x^3 g_0\,(x)\, e^{-x}\, dx\,.$$

10. Έστω (f_n) είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο μιγαδικό χώρο Hilbert $L_2\,[a, b]$.

    (α′) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [a, b]$ είναι

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_a^x \overline{f_n\,(t)}\, dt\right|^2 \leq x - a\,. \tag{1.13}$$

    (β′) Να αποδειχθεί ότι η ισότητα ισχύει στην (1.13) αν και μόνο αν η (f_n) είναι ορθοκανονική βάση του $L_2\,[a, b]$.

    Υπόδειξη. Το

    $$\text{span}\left\{\chi_{(a,\,x]} :\ a \leq x \leq b\right\} = \text{span}\left\{\chi_{(\alpha,\,\beta]} :\ a \leq \alpha \leq \beta \leq b\right\}$$

    είναι πυκνός υπόχωρος του $L_2\,[a, b]$.

Κεφάλαιο 2

Ορθοκανονικα Συστήματα των Rademacher, Walsh και Haar

2.1 Ορθοκανονικό Σύστημα του Rademacher

Ορισμός 2.1 *Για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ ορίζουμε την n-οστή συνάρτηση Rademacher r_n στο $[0, 1]$ ως εξής*

$$r_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (k-1)/2^n \le t < k/2^n,\ k = \text{περιττός},\ 1 \le k < 2^n\ , \\ -1 & \text{αν } (k-1)/2^n \le t < k/2^n,\ k = \text{άρτιος},\ 1 < k \le 2^n\ , \\ 0 & \text{αν } t = 1\ . \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις Rademacher ορίζονται και ως εξής

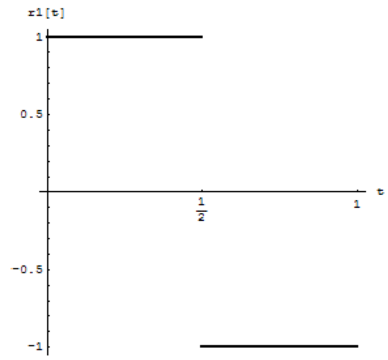
$$r_n(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^n \pi t)\ , \quad 0 \le t \le 1\ ,\ n = 1, 2, \ldots\ .$$

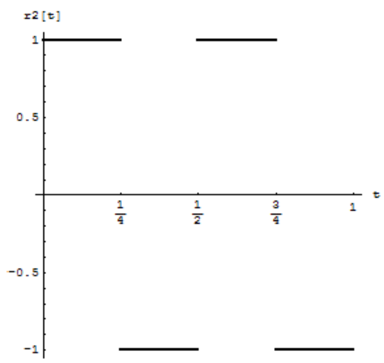
Λήμμα 2.1 *Αν οι φυσικοί αριθμοί $k_1, \ldots, k_n$ είναι διάφοροι μεταξύ τους, τότε*

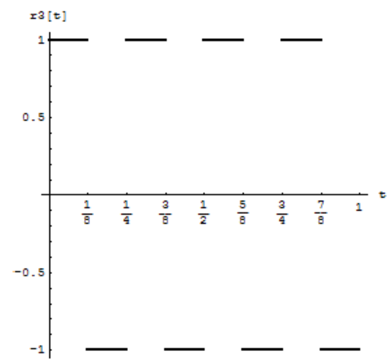
$$\int_0^1 r_{k_1}(t) \cdots r_{k_n}(t)\ dt = 0\,. \tag{2.1}$$

Απόδειξη.

Έστω ότι $k_n = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Σε κάθε διάστημα στο οποίο η συνάρτηση $r_{k_1} \cdot r_{k_2} \cdots r_{k_{n-1}}$ είναι σταθερή, η r_{k_n} παίρνει τις τιμές 1 και -1 καθεμιά με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Επομένως το ολοκλήρωμα (2.1) είναι μηδέν σε κάθε τέτοιο διάστημα. Άρα το ολοκλήρωμα πάνω στο $[0, 1]$ είναι μηδέν. ■







Επειδή

$$\int_0^1 r_n^2(t)\, dt = 1\,, , \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

έχουμε αποδείξει ότι :

Πρόταση 2.2 *Οι συναρτήσεις Rademacher* (r_n) *είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του* $L_2[0,1]$.

Οι συναρτήσεις Rademacher δεν είναι μία ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$. Πράγματι, αν $r_0(t) = 1$, $0 \leq t \leq 1$, τότε $\langle r_0, r_n \rangle = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Σημειώνεται ότι και το ορθοκανονικό σύστημα $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$. Πράγματι, αν $f(t) = \cos 2\pi t$, τότε $\langle f, r_n \rangle = 0$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επίσης $\langle r_1 r_2, r_n \rangle = 0$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Σημείωση. Οι συναρτήσεις Rademacher ορίζονται και ως εξής :

$$r_n(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } [2^n \cdot t] \text{ είναι άρτιος} \\ -1\,, & \text{αν } [2^n \cdot t] \text{ είναι περιττός} \end{cases} ,$$

όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$ και $t \in [0,1]$.

Παρατήρηση 2.1 *Χρησιμοποιώντας το ορθοκανονικό σύστημα Rademacher στον* $L_2[0,1]$, *το θεώρημα Riesz-Fischer διατυπώνεται ωε εξής :*
Αν $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}c_nr_n$ *συγκλίνει σε μία συνάρτηση* $f\in L_2[0,1]$. *Είναι*

$$c_k=\langle f,r_k\rangle=\int_0^1 f(t)\,r_k(t)\,dt\,,\quad k=1,2,\ldots\,.$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}c_nr_n(t)$ *συγκλίνει σχεδόν παντού στην* $f(t)$.
Έστω R *είναι το σύνολο των δυαδικών ρητών αριθμών του διαστήματος* $[0,1]$, *δηλαδή αριθμών της μορφής*

$$\frac{m}{2^n}\,,\quad m=0,1,\ldots,2^n\,,\quad n=1,2,\ldots\,.$$

Το R *είναι αριθμήσιμο σύνολο και επομένως έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Κάθε* $t\in(0,1]\setminus R$ *έχει μοναδικό δυαδικό ανάπτυγμα*

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}\,,\quad b_n=0 \text{ ή } 1\,. \tag{2.2}$$

Από τον ορισμό των συναρτήσεων Rademacher έχουμε ότι $r_n(t)=1$ *αν* $b_n=0$, *ενώ* $r_n(t)=-1$ *αν* $b_n=1$. *Επομένως το* $t\in(0,1]\setminus R$ *ορίζει μία ακολουθία "προσήμων"* ±1:

$$r_1(t)\,,r_2(t)\,,r_3(t)\,,\ldots \tag{2.3}$$

και διαφορετικά t *ορίζουν διαφορετικές ακολουθίες προσήμων. Επειδή* $t\notin R$, *η ακολουθία* (2.3) *δεν μπορεί να είναι τελικά σταθερή. Πρέπει να περιέχει τα* $+1$ *και* -1 *άπειρες φορές. Επίσης, κάθε ακολουθία προσήμων* (ε_n), $\varepsilon_n=\pm1$, *που δεν είναι τελικά σταθερή, γράφεται στη μορφή* (2.3) *για ένα μοναδικό* $t\in(0,1]\setminus R$. *Παίρνουμε* $b_n=(1-\varepsilon_n)/2$ *και η* (2.2) *προσδιορίζει το* t.
Ορίζουμε το μέτρο ενός συνόλου ακολουθιών (ε_n), $\varepsilon_n=\pm1$, *να είναι το μέτρο Lebesgue του αντίστοιχου υποσυνόλου του* $[0,1]$, *υπό την προυπόθεση ότι αυτό το σύνολο είναι μετρήσιμο. Το σύνολο όλων των ακολουθιών* (ε_n) *που είναι τελικά σταθερές θεωρούμε ότι έχει μέτρο μηδέν.*
Από τα όσα αναφέραμε παραπάνω έχει έννοια να μιλάμε για "σχεδόν κάθε ακολουθία προσήμων".

Θεώρημα 2.3 (Rademacher) *Αν* (α_n) *είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, με* $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$, *τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nr_n(t)$$

συγκλίνει σχεδόν παντού στο $[0,1]$. *Ισοδύναμα, για κάθε τετραγωνικά αθροίσιμη ακολουθία* (α_n), *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\pm\alpha_n$ *συγκλίνει σχεδόν για κάθε επιλογή των προσήμων.*
Σημείωση. Στις πιθανότητες το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ως εξής : Αν η ακολουθία (α_n) *είναι τετραγωνικά αθροίσιμη και τα πρόσημα στη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\pm\alpha_n$ *επιλέγονται ανεξάρτητα και με την ίδια πιθανότητα, τότε η σειρά συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.*

Απόδειξη. *Έστω*

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k(t) \ .$$

Από το θεώρημα Riesz-Fischer υπάρχει $\varphi \in L_2[0,1]$ *τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi(t) - S_n(t)|^2 \ dt = 0 \, .$$

Η $\varphi \in L_1[0,1]$ *και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi(t) - S_n(t)| \ dt = 0 \, ,$$

επειδή

$$\int_0^1 |\varphi(t) - S_n(t)| \ dt \leq \left(\int_0^1 |\varphi(t) - S_n(t)|^2 \ dt \right)^{1/2} \, .$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta S_n(t) \ dt = \int_\alpha^\beta \varphi(t) \ dt \, , \quad \text{για } 0 \leq \alpha < \beta \leq 1. \tag{2.4}$$

Αν

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u) \ du \, ,$$

τότε $\Phi'(t) = \varphi(t)$ *σχεδόν παντού στο* $[0,1]$. *Έστω* $t_0 \in [0,1] \setminus R$, *τέτοιο ώστε* $\Phi'(t_0) = \varphi(t_0)$. *Για κάθε φυσικό αριθμό* m, *το* t_0 *ανήκει σε ένα μοναδικό διάστημα* (α_m, β_m) *της μορφής* $\left(\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right)$. *Στο* (α_m, β_m) *η* r_k *είναι σταθερή για* $k \leq m$ *και παίρνει τις τιμές* ± 1 *με την ίδια συχνότητα αν* $k > m$ *(δηλαδή παίρνει τις τιμές* $+1, -1$ *καθεμιά με πιθανότητα* $\frac{1}{2}$*).*

Επομένως, για $n > m$ *είναι*

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} (S_n(t) - S_m(t)) \ dt = 0$$

και χρησιμοποιώντας την (2.4) έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} (S_n(t) - S_m(t)) \ dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} [(S_n(t) - \varphi(t)) + (\varphi(t) - S_m(t))] \ dt \\ &= \int_{\alpha_m}^{\beta_m} (\varphi(t) - S_m(t)) \ dt = 0 \, . \end{aligned}$$

Επειδή η S_m *είναι σταθερά στο* (α_m, β_m), *είναι*

$$S_m(t_0)(\beta_m - \alpha_m) = \int_{\alpha_m}^{\beta_m} S_m(t) \ dt = \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \varphi(t) \ dt \, ,$$

οπότε

$$S_m(t_0) = \frac{1}{\beta_m - \alpha_m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \varphi(t) \ dt \, .$$

Επομένως, από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

$$\lim_{m\to\infty} S_m(t_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\beta_m - \alpha_m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \varphi(t)\, dt = \varphi(t_0)\ .$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t)$ *συγκλίνει σχεδόν παντού στο* $[0,1]$. ■

Σημείωση : *Ισχύει το εξής Θεώρημα του Lebesgue :* *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$. *Τότε σχεδόν για κάθε* x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|c_n|} \cdot \int_{\overline{C}_n} f(t)dt = f(x)$$

για κάθε ακολουθία κύβων C_n *με* $x \in C_n$ *για κάθε* n *και* $\delta(C_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *Είναι*

$$\delta(C_n) = \sup_{x,y\in C_n} \|x-y\|$$

και $|C_n|$ *το μέτρο Lebesgue του* C_n.

Πόρισμα 2.4 *Υποθέτουμε ότι το* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι ορθοκανονικό σύνολο του* $L_2[a,b]$. *Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\ \ ,$$

τότε σχεδόν για κάθε ακολουθία προσήμων $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, *η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \psi_n(x)$$

συγκλίνει σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

Απόδειξη.

Αν

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |a_k \psi_k(x)|^2\ \ ,$$

τότε

$$\int_a^b S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b |a_k\psi_k(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\ \ .$$

Από το Θεώρημα Lebesgue (monotone convergence) η S_n *και επομένως η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \psi_n(x)|^2$$

συγκλίνει σχεδόν παντού στο $[a,b]$. *Από το Θεώρημα 2.3 σχεδόν για κάθε* $x \in [a,b]$ *η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot r_n(t) \cdot \psi_n(x) \tag{2.5}$$

συγκλίνει σχεδόν για κάθε $t \in [0,1]$. *Έστω* E *είναι το σύνολο των σημείων* $(t,x) \in [0,1] \times [a,b]$ *στα οποία η* (2.5) *συγκλίνει. Αν* $\Gamma(t,x)$ *είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του* E, *σχεδόν για κάθε* x *είναι* $\Gamma(t,x) = 1$ *για σχεδόν όλα τα* t. *Από το Θεώρημα Fubini* :

$$b - a = \int_a^b \int_0^1 \Gamma(t,x)dtdx = \int_0^1 \int_a^b \Gamma(t,x)dxdt \ .$$

Αν το Πόρισμα δεν ισχύει, τότε θα είναι :

$$\int_0^1 \int_a^b \Gamma(t,x)dxdt < b - a \ , \quad \text{άτοπο} \ .$$

■

Θεώρημα 2.5 (Khinchine- Kolmogorov) *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$, *τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$$

αποκλίνει σχεδόν παντού.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$$

συγκλίνει σε ένα σύνολο θετικού μέτρου. Τότε, από το Θεώρημα Egoroff, η σειρά θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα σύνολο E *θετικού μέτρου, δηλαδή* $m(E) > 0$. *Αν*

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t) \ ,$$

τότε για $M > 0$ *υπάρχει* $m \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε*

$$|S_n(t) - S_m(t)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k(t) \right| < M \ , \quad \text{για κάθε } n > m \text{ και κάθε } t \in E.$$

Επομένως, για $n > m$ *είναι*

$$\begin{aligned} M^2 m(E) &> \int_E \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k(t) \right|^2 dt \\ &= m(E) \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 + 2\Re \left\{ \sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{n} a_j \overline{a}_k \int_E r_j(t) r_k(t) \ dt \right\} . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Σύμφωνα με τη (2.1) *το σύστημα των συναρτήσεων* $r_j r_k$ $(1 \le j < k < \infty)$ *είναι ορθοκανονικό στον* $L_2[0,1]$. *Μπορούμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα* $\int_E r_j(t) r_k(t) \ dt$ *σαν το "συντελεστή Fourier" της χαρακτηριστικής συνάρτησης* χ_E *του συνόλου* E. *Δηλαδή,*

$$\widehat{\chi_E}(j,k) = \int_{[0,1]} \chi_E(t) r_j(t) r_k(t) \ dt = \int_E r_j(t) r_k(t) \ dt \, .$$

Τότε, από την ανισότητα Bessel έχουμε

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{\infty} \left\{ \int_E r_j(t)\, r_k(t)\, dt \right\}^2 \le \int_0^1 \chi_E^2(t)\, dt = m(E) < \infty\,.$$

Επομένως, για κατάλληλα μεγάλο m είναι

$$\sum_{\substack{j,k=m+1\\ j<k}}^{\infty} \left\{ \int_E r_j(t)\, r_k(t)\, dt \right\}^2 < \left(\frac{m(E)}{4} \right)^2 . \tag{2.7}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και τη (2.7) έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{j,k=m+1\\ j<k}}^{n} a_j \bar{a}_k \int_E r_j(t)\, r_k(t)\, dt \right| &\le \left\{ \sum_{\substack{j,k=m+1\\ j<k}}^{n} |a_j|^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{\substack{j,k=m+1\\ j<k}}^{n} \left(\int_E r_j(t)\, r_k(t)\, dt \right)^2 \right\}^{1/2} \\
&\le \left\{ \sum_{\substack{j,k=m+1\\ j<k}}^{n} |a_j|^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{\substack{j,k=m+1\\ j<k}}^{\infty} \left(\int_E r_j(t)\, r_k(t)\, dt \right)^2 \right\}^{1/2} \\
&< \left\{ \sum_{\substack{j,k=m+1\\ j<k}}^{n} |a_j|^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \frac{m(E)}{4} \\
&\le \frac{m(E)}{4} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 .
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα, από τη (2.6) έπεται ότι

$$M^2 m(E) > m(E) \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 - \frac{m(E)}{2} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 = \frac{m(E)}{2} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2$$

και επομένως

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 < 2M^2 < \infty\,,$$

για κάθε $n > m$. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ που είναι άτοπο. ■

Παρατήρηση 2.2 *Το παραπάνω Θεώρημα διατυπώνεται και ως εξής : Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n$ αποκλίνει σχεδόν για κάθε επιλογή των προσήμων.*

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3 προκύπτει ότι :

Πόρισμα 2.6 *Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ και $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ στον $L_2[0,1]$, δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_2 = 0\,.$$

Τότε,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \,, \quad \text{σχεδόν παντού στο } [0,1] \,.$$

2.2 Ανισότητα του Khinchine

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα σχετικό με τις συναρτήσεις Rademacher είναι η ανισότητα Khinchine:

Έστω η (a_n) είναι πραγματική ή μιγαδική ακολουθία τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \,,$$

δηλαδή $(a_n) \in \ell_2$. Τότε για κάθε $0 < p < \infty$ υπάρχουν σταθερές A_p και B_p, τέτοιες ώστε

$$A_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \,.$$

Επομένως, αν $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$, τότε η $\varphi \in L_p[0,1]$.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση που η (a_n) είναι μία πραγματική ακολουθία. Η μιγαδική περίπτωση προκύπτει εύκολα επειδή $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ όπου $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>1η περίπτωση</u>: $2 \leq p < \infty$

Υποθέτουμε ότι ο p είναι φυσικός αριθμός, έστω $p = k \geq 2$ και ότι

$$f(t) = \sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t) \,.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας παίρνουμε

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \right)^{1/2} = 1 \,.$$

Εύκολα αποδεικνύεται η ανισότητα

$$|y|^k < k! \left(1 + \frac{|y|^k}{k!} \right) \leq k! \cdot e^{|y|} \,, \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)|^k \, dt &< k! \int_0^1 e^{|f(t)|} \, dt \\ &\leq k! \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)} \right) dt \\ &= k! \int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)} \, dt + k! \int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{-a_n r_n(t)} \, dt \end{aligned} \tag{2.8}$$

Γράφοντας το $\prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)}$ *σαν γινόμενο δυναμοσειρών και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτήσεων Rademacher, έχουμε*

$$\int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)}\, dt = \prod_{n=1}^{m} \int_0^1 e^{a_n r_n(t)}\, dt = \prod_{n=1}^{m} \cosh a_n\, .$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις Rademacher σαν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρές των $\cosh a_n$ *και* e^{a_n}, *καταλήγουμε ότι*

$$\int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)}\, dt \leq \prod_{n=1}^{m} e^{a_n^2/2} = e^{\sum_{n=1}^{m} (a_n^2/2)} = e^{1/2}\, . \tag{2.9}$$

Λόγω συμμετρίας θα είναι και

$$\int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{-a_n r_n(t)} dt \leq e^{1/2}\, . \tag{2.10}$$

Από τις (2.8), (2.9) *και* (2.10) *έχουμε*

$$\int_0^1 |f(t)|^k\, dt < 2k! \cdot e^{1/2}\, . \tag{2.11}$$

Έστω τώρα $p \geq 2$ *και* k *είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του* p. *Επειδή* $\|f\|_p \leq \|f\|_k$, *από την* (2.11) *προκύπτει ότι*

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} < B_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{1/2}, \quad \text{όπου } B_p = \left(2k! \cdot e^{1/2}\right)^{1/k}. \tag{2.12}$$

Επειδή από το θεώρημα Rademacher η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ *συγκλίνει σχεδόν παντού στο* $[0,1]$, *από την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιώντας το λήμμα Fatou έχουμε*

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\liminf_{m\to\infty} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}.$$

Αν $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$, *επειδή* $p \geq 2$ *θα είναι*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} = \|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_p = \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p}.$$

Τελικά, για $p \geq 2$ *έχουμε αποδείξει ότι*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}.$$

<u>*2η περίπτωση:*</u> $0 < p < 2$

Έστω

$$\theta := \left(2 - \frac{p}{2}\right)^{-1}, \quad 0 < \theta < 1\, .$$

Ισοδύναμα, $p\,\theta + 4\,(1-\theta) = 2$. *Επειδή*

$$\frac{1}{\theta^{-1}} + \frac{1}{(1-\theta)^{-1}} = 1 \ ,$$

από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\int_0^1 |\varphi(t)|^2 \ dt = \int_0^1 |\varphi(t)|^{p\,\theta} \cdot |\varphi(t)|^{4(1-\theta)} \ dt \leq \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p \ dt\right)^{\theta} \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^4 \ dt\right)^{1-\theta} .$$

Επομένως,

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \|\varphi\|_p^{p\,\theta} \cdot \|\varphi\|_4^{4(1-\theta)} .$$

Από την 1η περίπτωση είναι

$$\|\varphi\|_4 \leq B_4 \cdot \|\varphi\|_2 .$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες έπεται ότι

$$\|\varphi\|_2 \cdot B_4^{2-4/p} \leq \|\varphi\|_p .$$

Επειδή για $p < 2$ *είναι* $\|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_2$, *τελικά έχουμε*

$$A_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n\,(t)\right|^p \ dt\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} , \quad \text{όπου } A_p = B_4^{2-4/p}.$$

■

Παρατηρήσεις 2.1 1. *Από την ανισότητα του Khintchine προκύπτει ότι στον χώρο span*$\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ *όλες οι* L_p-*μετρικές είναι ισοδύναμες.*

2. *Έχει αποδειχθεί ότι οι βέλτιστες σταθερές* A_p *και* B_p *είναι ίδιες στην πραγματική και στην μιγαδική περίπτωση.*

   Ο U. Haagerup [30] έδωσε τις ακριβείς τιμές των A_p *και* B_p. *Είναι*

$$B_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \ , & \text{αν } \ 0 < p \leq p_0 \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{p}} \ , & \text{αν } \ p_0 < p < 2 \\ 1 \ , & \text{αν } \ 2 \leq p < \infty \ \ (\text{προφανές}) \end{cases}$$

και

$$B_p = \begin{cases} 1 \ , & \text{αν } \ 0 < p \leq 2 \ \ (\text{προφανές}) \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{p}} \ , & \text{αν } \ 2 < p < \infty \end{cases}$$

όπου p_0 είναι η λύση της εξίσωσης :

$$\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

στο διάστημα $(1,2)$. Είναι $p_0 \simeq 1,84742$.

Το $span\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι υπόχωρος του $L_p[0,1]$. Αν

$$Rad_p := \overline{span\{r_n : n \in \mathbb{N}\}}\ ,\ \text{για}\ \ 0 < p \leq \infty\ \ ,$$

τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.7 *(α′) Για $0 < p < \infty$ ο χώρος Rad_p είναι ισομορφικός του ℓ_2.*

(β′) Ο χώρος Rad_∞ είναι ισομορφικός του ℓ_1 και στην πραγματική περίπτωση είναι ισομετρικός του ℓ_1.

Απόδειξη.

(α′) Από την ανισότητα Khintchine η $f:\ \ell_2 \to Rad_p$ με

$$f(a_n) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot r_n(t)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

(β′) Πραγματική περίπτωση. Αν $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, υπάρχει δυαδικό διάστημα

$$\left(\frac{k-1}{2^n}\ ,\frac{k}{2^n}\right)\ ,\ 1 \leq k \leq 2^n\ \ ,$$

στο οποίο κάθε $r_j, 1 \leq j \leq n$, έχει το ίδιο πρόσημο με το αντίστοιχο c_j. Τότε έχουμε

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} c_j r_j\right\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |c_j|$$

και επομένως

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j\right\|_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|$$

Δηλαδή οι χώροι Rad_∞ και ℓ_1 είναι ισομετρικοί.

Μιγαδική περίπτωση. Αν $c_j = a_j + ib_j,\ 1 \leq j \leq n$, τότε

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}|c_j| \leq \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_j|, \sum_{j=1}^{n}|b_j|\right\} = \max\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j\right\|_\infty, \left\|\sum_{j=1}^{n} b_j r_j\right\|_\infty\right\} \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j r_j\right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n}|c_j|\ \ .$$

Η ισότητα στην παράπανω ανισότητα προκύπτει από την πραγματική παρίπτωση. Είναι λοιπόν

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}|c_j| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j r_j\right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n}|c_j|$$

και επομένως

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j \right\|_{\infty} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|$$

Δηλαδή ο χώρος Rad_∞ *είναι ισομορφικός του* ℓ_1 *στην μιγαδική περίπτωση.*

■

2.3 Ανισότητα του Grothendieck

2.4 Ορθοκανονικό Σύστημα του Walsh

Το σύστημα Rademacher επεκτείνεται σ' ένα μέγιστο (πλήρες) ορθοκανονικό σύστημα, δηλαδή σε μία ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$. *Η οικογένεια όλων των γινομένων των συναρτήσεων Rademacher, διαφορετικών μεταξύ τους, μαζί με την* $r_0(t) = 1$ *λέγεται σύστημα Walsh. Παίρνουμε*

$$w_0 = 1,\ w_1 = r_1,\ w_2 = r_2,\ w_3 = r_1 \cdot r_2 \ \ k.o.k \ \ .$$

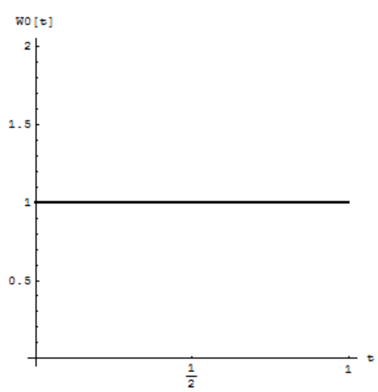
Γενικά, αν

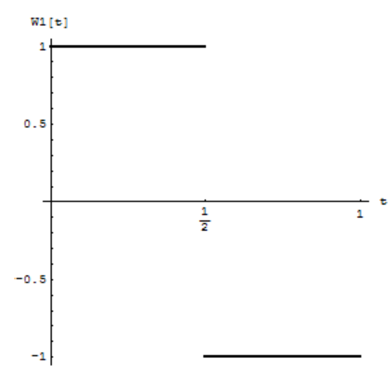
$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_\rho} \ , \ \ \text{όπου} \ \ 0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_\rho \ \ ,$$

τότε

$$w_n = r_{k_1+1} \cdot r_{k_2+1} \cdots r_{k_\rho+1} \ , \ n \geq 1 \ \ .$$

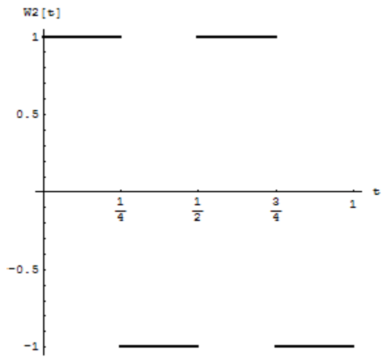
Αν $n = 2^\rho$, *τότε* $w_n = r_{\rho+1}$. *Δηλαδή οι συναρτήσεις Walsh περιέχουν όλες τις συναρτήσεις Rademacher.*

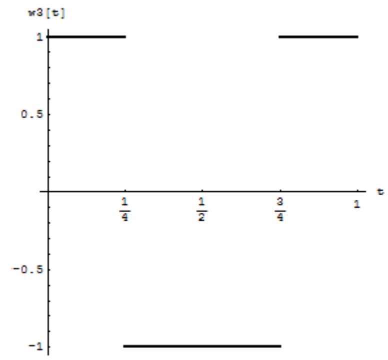




Πρόταση 2.8 *Το σύστημα Walsh είναι ορθοκανονική βάση του* $L_2[0,1]$.

Απόδειξη.





Από το προηγούμενο Λήμμα οι συναρτήσεις Walsh είναι ορθογώνιες. Εύκολα φαίνεται ότι

$$\int_0^1 w_n^2(t) = 1 \ , \ n = 0, 1, \ldots \ .$$

Έστω $f \in L_2[0,1]$. *Ορίζουμε*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \ .$$

Υποθέτουμε ότι :

$$\int_0^x f(t) \cdot w_n(t)dt \ , \ n = 0, 1, \ldots \ .$$

Θα αποδείξουμε ότι $f(x) = 0$ *σχεδόν παντού. Επειδή* $F'(x) = f(x)$ *σχεδόν παντού, αρκεί να δείξουμε ότι* $F(x) \equiv 0$. *Επειδή η* F *είναι συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι* $F(x) = 0$ *σε ένα πυκνό υποσύνολο του* $[0,1]$.
Είναι $F(0) = 0$ *και*

$$F(1) = \int_0^1 f(t) \cdot w_0(t)dt = 0 \ .$$

Επίσης

$$0 = \int_0^1 f(t) \cdot w_1(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - \left[F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right] \ .$$

δηλαδή

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \ .$$

Έχουμε :

$$0 = \int_0^1 f(t)w_2(t) = \left[F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0)\right] - \left[F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \left[F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \left[F(1) - F\left(\frac{3}{4}\right)\right] \ ,$$

οπότε :

$$F\left(\frac{1}{4}\right) + F\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \ .$$

Όμως :

$$0 = \int_0^1 f(t) \cdot w_3(t)dt = 2\left[F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(\frac{3}{4}\right)\right] \ .$$

Άρα :

$$F\left(\frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \ .$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $F(x) = 0$, *όπου* $x = \frac{k}{2^m}$, *για κάθε* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *και* $k = 1, 2, \ldots, 2^m$. ■

2.5 Ορθοκανονικό Σύστημα του Haar

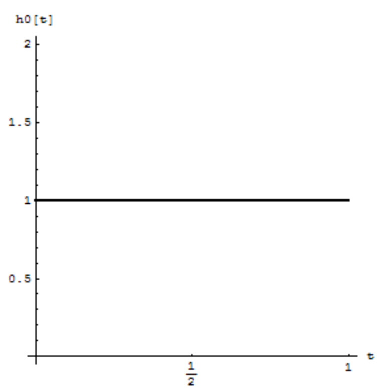
Το σύστημα Haar είναι ένα από τα πιο σημαντικά ορθοκανονικά συστήματα. Αν $n = 1, 2, 3, \ldots$, γράφουμε το $n = 2^m + k$, όπου $m = 0, 1, 2, \ldots$ και $0 \leq k \leq 2^m - 1$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις Haar στο $[0, 1)$, $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ ως εξής :

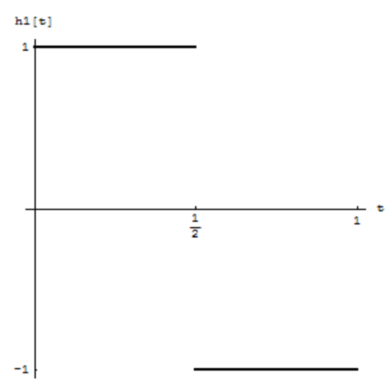
$$h_0(t) = 1 \ .$$

$$h_n(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} \ , & \text{αν } \ k \cdot 2^{-m} \leq t < (2k+1) \cdot 2^{-m-1} \\ -2^{\frac{m}{2}} \ , & \text{αν } \ (2k+1) \cdot 2^{-m-1} \leq t < (k+1) \cdot 2^{-m} \\ 0 \ , & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι

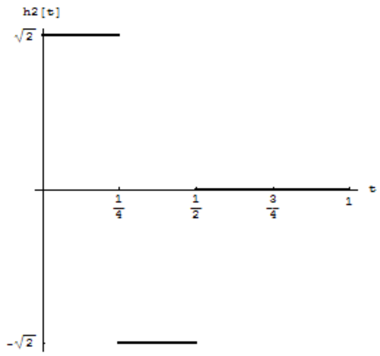
$$h_n(1) = h_n(1^-) \ .$$

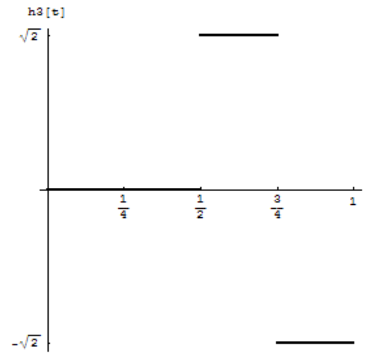


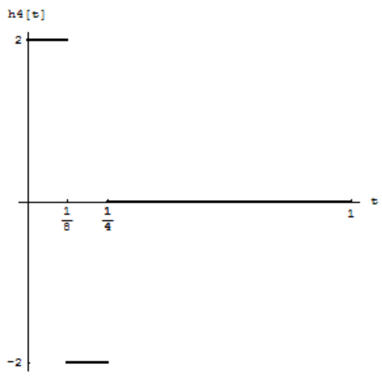


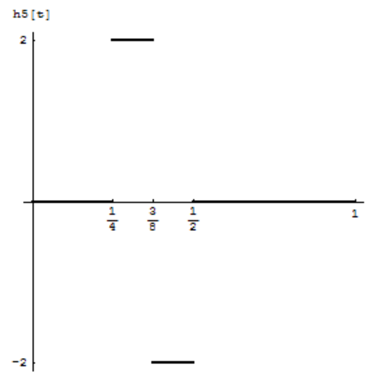
$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 \ , & \text{αν } \ \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 \ , & \text{αν } \ t = 1 \ . \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{αν } \ 0 \leq t < \frac{1}{2^2} \\ -\sqrt{2} \ , & \text{αν } \ \frac{1}{2^2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 \ , & \text{διαφορετικά } \ . \end{cases} \qquad h_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{αν } \ \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4} \\ -\sqrt{2} \ , & \text{αν } \ \frac{3}{4} \leq t < 1 \\ 0 \ , & \text{διαφορετικά } \ . \end{cases}$$









$$h_4(t) = \begin{cases} 2, & \text{αν } 0 \le t < \frac{1}{2^3} \\ -2\,, & \text{αν } \frac{1}{2^3} \le t < \frac{1}{2^2} \\ 0\,, & \text{διαφορετικά }. \end{cases} \qquad h_5(t) = \begin{cases} 2, & \text{αν } \frac{1}{2^2} \le t < \frac{3}{2^3} \\ -2\,, & \text{αν } \frac{3}{2^3} \le t < \frac{1}{2} \\ 0\,, & \text{διαφορετικά }. \end{cases}$$

$$h_6(t) = \begin{cases} 2, & \text{αν } \frac{1}{2} \le t < \frac{5}{8} \\ -2\,, & \text{αν } \frac{5}{8} \le t < \frac{3}{4} \\ 0\,, & \text{διαφορετικά }. \end{cases} \qquad h_7(t) = \begin{cases} 2, & \text{αν } \frac{3}{4} \le t < \frac{7}{8} \\ -2\,, & \text{αν } \frac{7}{8} \le t < 1 \\ 0\,, & \text{διαφορετικά }. \end{cases}$$

Παρατήρηση 2.3 *Αν r_n είναι n-οστή Rademacher, τότε*

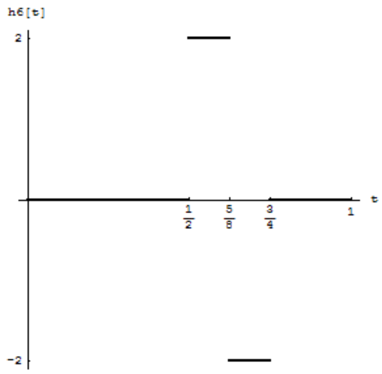
$$r_n = 2^{-\frac{n}{2}} \cdot \sum_{2^n \le i < 2^{n+1}} h_i \quad .$$

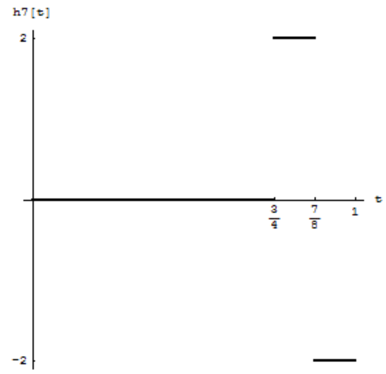
Θεώρημα 2.9 *Το σύστημα Haar είναι μία ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$.*

Απόδειξη.

Είναι

$$\int_0^1 h_n^2(t)dt = 1\ ,\ n \ge 0 \quad .$$





Αν $0 \leq n_1 < n_2$ *εύκολα φαίνεται ότι* $h_{n_1} \cdot h_{n_2} = \varepsilon \cdot h_{n_2}$, *με* $\varepsilon = 0, 1$, *ή* -1. *Επομένως :*

$$\int_0^1 h_{n_1}(t) \cdot h_{n_2}(t)dt = \varepsilon \cdot \int_0^1 h_{n_2}(t)dt = 0 \quad .$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι : για $n \geq 0$ *υπάρχει ακολουθία*

$$0 = x_0^n < x_1^n < \cdots < x_{n+1}^n = 1$$

τέτοια ώστε η $f \in V_n = span\{h_0, h_1, \ldots, h_n\}$ *αν και μόνο αν η* f *είναι σταθερά σε κάθε διάστημα* $\left[x_i^n, x_{i+1}^n\right)$, $0 \leq i \leq n$ *και* $f(1) = f(1^-)$.

Η απόδειξη είναι προφανής για $n = 0$. *Έστω* $n = 2^m + k$, *όπου* $0 \leq k < 2^m$. *Θεωρούμε τα άκρα* x_i^n, $0 \leq i \leq n+1$, *των εξής διαδοχικών διαστημάτων : αρχίζοντας από το* 0 *παίρνουμε* $2k+2$ *διαστήματα μήκους* $2^{-(m+1)}$ *και μετά* $2^m - k - 1$ *διαστήματα μήκους* 2^{-m}. *Είναι*

$$(2k+2) \cdot 2^{-(m+1)} + (2^m - k - 1) \cdot 2^{-m} = 1 \quad .$$

Έστω $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots, \varphi_{n+1}^n$ *είναι αντίστοιχα οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των διαστημάτων*

$$[0, x_1^n), \ [x_1^n, x_2^n), \ldots, \ \left[x_n^n, x_{n+1}^n\right) \quad .$$

Προφανώς κάθε συνάρτηση Haar h_i, $0 \leq i \leq n$, *είναι γραμμικός συνδυασμός των* φ_j^n, $1 \leq j \leq n+1$. *Επειδή τα δύο συστήματα :*

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_n\}, \quad \left\{\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots, \varphi_{n+1}^n\right\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, παράγουν τον ίδιο χώρο V_n. *Αυτό αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό. Έστω*

$$f \in L_2[0,1] \ \ \textit{και} \ \ g = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \varphi_j^n$$

είναι η ορθογώνια προβολή του f *στον* V_n. *Τότε* $f - g \in V_n^{\perp}$, *δηλαδή*

$$\int_0^1 (f(t) - g(t)) \cdot \varphi_i^n(t)dt = 0 \ , \ \ 1 \leq i \leq n+1 \quad .$$

Επειδή

$$\varphi_i^n \cdot \varphi_j^n = \begin{cases} \varphi_i^n \,, & \text{αν } \; i = j \\ 0 \,, & \text{αν } \; i \neq j \;\;, \end{cases}$$

έχουμε :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (f(t) - g(t)) \cdot \varphi_i^n(t)dt = \\ &= \int_0^1 \left[f(t) - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \varphi_j^n(t) \right] \cdot \varphi_i^n(t)dt = \\ &= \int_0^1 f(t) \cdot \varphi_i^n(t)dt - \lambda_i \int_0^1 \varphi_i^n(t)dt = \\ &= \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} f(t)dt - \lambda_i \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} dt \end{aligned}$$

οπότε :

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{i+1}^n - x_i^n} \cdot \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} f(t)dt \;\; .$$

Αν η f *είναι συνεχής στο* $[0, 1]$*, τότε το*

$$S_N(x) = \sum_{i=0}^{N} (f, h_i) h_i(x)$$

είναι η ορθογώνια προβολή της f *στο* V_N*. Επομένως*

$$S_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \lambda_i \cdot \varphi_i^N(x) \;\; ,$$

όπου

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{i+1}^N - x_i^N} \cdot \int_{x_i^N}^{x_{i+1}^N} f(t)dt \;, \; i = 1, \ldots, N+1 \;\; .$$

Αν $2^m \leq N < 2^{m+1}$, $\varphi_i^N(x) = 1$ *και*

$$\varepsilon_m = \sup \left\{ |f(x) - f(t)| : \; |x - t| \leq 2^{-m} \right\} \;\; ,$$

τότε

$$|f(x) - S_N(x)| = |f(x) - \lambda_i| = \left| \frac{1}{x_{i+1}^N - x_i^N} \cdot \int_{x_i^N}^{x_{i+1}^N} (f(x) - f(t))dt \right| \leq \varepsilon_m \;\; .$$

Δηλαδή

$$\sum_{i=0}^{\infty} (f, h_i) h_i(x) = f(x) \;, \;\; \text{ομοιόμορφα στο } \; [0, 1] \;\; .$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f-\sum_{i=0}^{N}(f,h_i)h_i \right\|_2 = 0$$

για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$. *Το ίδιο όμως θα ισχύει για όλες τις* $f\in L_2[0,1]$, *επειδή οι συνεχείς συναρτήσεις είναι σύνολο πυκνό στον* $L_2[0,1]$. *Άρα το σύστημα Haar είναι ορθοκανονική βάση του* $L_2[0,1]$. ■

Παρατηρήσεις 2.2 *1. Από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτει ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση* f *στο* $[0,1]$ *είναι*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(f,h_n)h_n(x)\ ,\quad \textit{ομοιόμορφα στο}\ \ [0,1]\ \ .$$

2. *Θα αποδείξουμε στο παράρτημα ότι το σύστημα Haar* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *είναι βάση Schauder του* $L_p[0,1]$, $1\le p<\infty$, *δηλαδή για κάθε* $f\in L_p[0,1]$ *υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών (μιγαδικών) αριθμών* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *τέτοια ώστε*

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nh_n\ \ .$$

Δηλαδή

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f-\sum_{n=0}^{N}a_nh_n \right\|_p = 0\ \ .$$

2.6 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 e^{it\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}r_n(x)}\,dx\,,$$

όπου $r_n(x)=\operatorname{sgn}\sin 2^n\pi x$ είναι η n-οστή συνάρτηση Rademacher και $t\in\mathbb{R}$.

2. Έστω (a_n) πραγματική ακολουθία, με $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ και $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\infty$. Αν $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$, τότε

(α′)

$$\int_0^1 e^{it\sum_{n=1}^{N}a_nr_n(x)}\,dx=\prod_{n=1}^{N}\cos(ta_n)=\prod_{n=1}^{N}\left(1-2\sin^2(ta_n/2)\right)\ ,$$

όπου $r_n(x)=\operatorname{sgn}\sin 2^n\pi x$ είναι η n-οστή συνάρτηση Rademacher.

(β′) Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}\prod_{n=n_0}^{N}\left(1-2\sin^2(ta_n/2)\right) &\le \frac{1}{\prod_{n=n_0}^{N}\left(1+2\sin^2(ta_n/2)\right)}\\ &\le \frac{1}{\prod_{n=n_0}^{N}\left(1+2\left(ta_n/\pi\right)^2\right)}\\ &\le \frac{1}{2\left(t/\pi\right)^2\sum_{n=n_0}^{N}a_n^2}\ .\end{aligned}$$

(γ′)

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 e^{it\sum_{n=1}^{N} a_n r_n(x)}\,dx = 0\,.$$

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση Fourier

3.1 Ανάλυση Fourier στον $L_2(\mathbb{T})$

Έστω $\mathbb{T}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Η σύναρτηση $t \mapsto e^{it}$ απεικονίζει το $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{T}$. Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, τότε η $f(t) := F(e^{it})$ είναι 2π-περιοδική σύναρτηση.
Αντίστροφα, αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι περιοδική, με περίοδο 2π, τότε υπάρχει $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F(e^{it}) = f(t)$.
Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε συναρτήσεις που ορίζονται στον $\mathbb{T}$ με 2π-περιοδικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}$.
Ο χώρος $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, είναι η κλάση όλων των μιγαδικών, Lebesgue μετρήσιμων, 2π-περιοδικών συναρτήσεων $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με νόρμα

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \infty\,,\ 1 \le p < \infty \quad \text{και} \quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|\ .$$

Επίσης γράφουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}\,,\ 1 \le p < \infty\,, \quad \text{όπου } d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}dt,$$

δηλαδή το μ είναι μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{T}$ που διαιρείται με 2π.
Το $C(\mathbb{T})$ είναι ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με τη supremum νόρμα

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|\ .$$

Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\ , \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

όπου $a_0, \ldots, a_n$ και $b_0, \ldots, b_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο γράφεται και στην μορφή

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\ , \quad t \in \mathbb{R}\,,\ \text{όπου } c_k \in \mathbb{C}.$$

Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις.

Το εσωτερικό γινόμενο στον $L_2(\mathbb{T})$ ορίζεται ως εξής :

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Τα τριγωνομετρικό σύστημα $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $u_n(t) = e^{int}$, είναι ορθοκανονικό στον $L_2(\mathbb{T})$ αφού

$$\langle u_n, u_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = m\ , \\ 0 & \text{αν } n \neq m\ . \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι το τριγωνομετρικό σύστημα είναι μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το Θεώρημα Stone–Weierstrass.

Αν K είναι ένας συμπαγής, συμβολίζουμε με $C(K)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ με τη supremum (ομοιόμορφη) νόρμα :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}\ .$$

Ο χώρος $C(K)$ είναι μία αντιμεταθετική άλγεβρα με μονάδα (τη σταθερή συνάρτηση 1). Δηλαδή, στο χώρο $C(K)$ ισχύει

$$\|f \cdot g\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty \ \text{ και } \ f \cdot g = g \cdot f\ \ ,$$

$$f\cdot(g\cdot h) = (f\cdot g)h\ ,\ f\cdot(g+h) = f\cdot g + f\cdot h\ ,\ (af)\cdot g = f\cdot(ag) = a\cdot(f\cdot g)\ ,\ \text{ όπου } f,g,h \in C(K),\ a \in \mathbb{C}\ .$$

Λέμε ότι $A \subset C(K)$ είναι μία υποάλγεβρα του $C(K)$ αν για $a \in \mathbb{C}$ και $f, g \in A$ έχουμε ότι $a\cdot f, f+g, f\cdot g \in A$ Η A διαχωρίζει τα σημεία του K, αν για $x, y \in K$ με $x \neq y$ υπάρχει $f \in A$ τέτοια ώστε $f(x) \neq f(y)$. Η A λέγεται αυτοσυζυγής αν $f \in A$ συνεπάγεται ότι $\overline{f} \in A$, όπου

$$\overline{f}(t) = \overline{f(t)}\ ,\ t \in K\ \ .$$

Ορίζουμε

$$Z(A) = \{t \in K : f(t) = 0, f \in A\}\ \ .$$

Ισχύει το εξής θεώρημα :

Θεώρημα 3.1 (Θεώρημα Stone–Weierstrass) *Έστω K είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdorff και A είναι αυτοσυζυγής υποάλγεβρα του $C(K)$ που διαχωρίζει τα σημεία του K. Αν $Z(A) = \emptyset$, τότε $\overline{A} = C(K)$.*

Σημείωση. Το θεώρημα ισχύει αν αντί της συνθήκης $Z(A) = \emptyset$ υποθέσουμε ότι η υποάλγεβρα A περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (τότε θα είναι $Z(A) = \emptyset$).

Πρόταση 3.2 *Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε*

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}\,.$$

Δηλαδή το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνό, ως προς την ομοιόμορφη νόρμα, στο $C(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. *Αν*

$$A = \operatorname{span}\left\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\right\} = \operatorname{span}\left\{z^n : z \in \mathbb{T},\, n \in \mathbb{Z}\right\} ,$$

η A είναι μία υποάλγεβρα του $C(\mathbb{T})$. Προφανώς η A είναι αυτοσυζυγής, περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και διαχωρίζει τα σημεία του $\mathbb{T}$.

($f(z) = z$. Για κάθε $z \in \mathbb{T}$ υπάρχει μοναδικό $t \in [-\pi, \pi]$ τέτοιο ώστε $z = e^{it}$).

Επειδή το A είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$ από το Θεώρημα Stone-Weierstrass υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon\,.$$

■

Παρατήρηση 3.1 *Ισοδύναμα, η Πρόταση 3.2 διατυπώνεται ως εξής :*

Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι σύνολο πυκνό, ως προς την ομοιόμορφη νόρμα, στον χώρο την συνεχών συναρτήσεων

$$f:\ [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}\,,\ \ \text{όπου}\ \ h(-\pi) = h(\pi)\ \ .$$

Πρόταση 3.3 *Το τριγωνομετρικό σύστημα $\left\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. *Είναι γνωστό [61, 3.14 Theorem] ότι ο χώρος $C(\mathbb{T})$ είναι πυκνός στον $L_2(\mathbb{T})$. Αν $f \in L_2(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε*

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.1}$$

Από την Πρόταση 3.2 υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε

$$\|g - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.2}$$

Από τις (3.1) και (3.2) έπεται ότι

$$\|f - P\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - P\|_\infty < \varepsilon\,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι το $\operatorname{span}\left\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ είναι πύκνο στον $L_2(\mathbb{T})$. Άρα, από το Θεώρημα 1.30 του Κεφαλαίου 2, το τριγωνομετρικό σύστημα είναι μία ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$. ■

Αν $f \in L_2(\mathbb{T})$, οι συντελεστές της f ως προς το τριγωνομετρικό σύστημα είναι

$$\widehat{f}(n) = \langle f,\, e^{in\cdot}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\,. \tag{3.3}$$

Ορισμός 3.1 *Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, τότε το*

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

είναι ο **n-οστός συντελεστής Fourier της** *f.* **Η εκθετική (ή μιγαδική) μορφή της σειράς Fourier της** *f είναι η σειρά*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{int} \tag{3.4}$$

και τα μερικά αθροίσματά της είναι τα

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikt}\,.$$

Η τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier της *f είναι η σειρά*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)\,,$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt\,, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ως γνωστόν, αν $F \in L_1[-a,a]$, $a > 0$, τότε

$$\int_{-a}^{a} F(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_0^a F(x)\, dx & \text{αν η } F \text{ είναι άρτια}\,, \\ 0 & \text{αν η } F \text{ είναι περιττή}\,. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &\text{αν η } f \in L_1(\mathbb{T}) \text{ είναι άρτια}\,, && a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\, dt\,,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ και } b_n = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ &\text{αν η } f \in L_1(\mathbb{T}) \text{ είναι περιττή}\,, && a_n = 0\,,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ και } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Συμβολισμός. Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, με

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{int}$$

εκφράζουμε τη σχέση που συνδέει τη συνάρτηση f με τη σειρά Fourier της f. Χρησιμοποιείται αυτός ο συμβολισμός για συντομία αντί να γράφουμε τις εξισώσεις

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

Παρατήρηση 3.2 *Γενικά, αν $f \in L_1[-p,p]$, $p > 0$, οι συντελεστές Fourier της f ως προς το τριγωνομετρικό σύστημα είναι*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-in\pi t/p}\, dt.$$

Η εκθετική (ή μιγαδική) μορφή της σειράς Fourier της f είναι η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{in\pi t/p}$$

και τα μερικά αθροίσματά της είναι τα

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ik\pi t/p}\,.$$

Η τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier της f είναι η σειρά

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{p} + b_n \sin\frac{n\pi t}{p}\right),$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi t}{p}\, dt\,, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

και

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin\frac{n\pi t}{p}\, dt\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Θεώρημα 3.4 *Έστω ο μιγαδικός χώρος Hilbert $L_2(\mathbb{T})$.*

(α΄) Αν $f \in L_2(\mathbb{T})$, τότε

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{in\cdot}$$

και

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{1/2}.$$

(β΄) Αν $f, g \in L_2(\mathbb{T})$, τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}$$

και *(Ταυτότητες Parseval)*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\widehat{g}(-n)\,.$$

*(γ΄) (**Θεώρημα Riesz-Fischer**) Αν $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty\,,$$

τότε υπάρχει μοναδικό $f \in L_2(\mathbb{T})$ τέτοιο ώστε

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\cdot} \quad \text{και} \quad c_n = \widehat{f}(n)\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

(δ′) Η απεικόνιση

$$\varphi : L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z}) \,, \quad \text{με } \varphi(f)(n) := \widehat{f}(n) \,,$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός του $L_2(\mathbb{T})$ επί του $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Παράδειγμα 3.1 ([69]) *Έστω $f(t) = e^{iAt}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Τότε,*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iAt} e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(A-n)t}\, dt = \frac{\sin \pi(A-n)}{\pi(A-n)} \,.$$

Επομένως, από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \pi(A-n)}{\pi(A-n)} \right]^2 = 1 \,.$$

Για $A = a/\pi$, $a \neq n\pi$, από το παραπάνω τύπο έχουμε

$$\frac{1}{\sin^2 a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a - n\pi)^2} \,.$$

Σημείωση. Η προηγούμενη ταυτότητα μπορεί να αποδειχθεί και με τεχνικές μιγαδικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, είτε με εφαρμογή του θεωρήματος Mittag-Lefler[1, p. 187] ή χρησιμοποιώντας τη θεωρία ολοκληρωτικών υπολοίπων [66, p. 113]. Μια άλλη απόδειξη υποδεικνύεται στην άσκηση 5 του κεφαλαίου 4.

Παρατηρήσεις 3.1 *Το Θεώρημα 3.4 (α′) μας λέει ότι η σειρά $\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\cdot}$ της $f \in L_2(\mathbb{T})$ συγκλίνει στην f ως προς την νόρμα του $L_2(\mathbb{T})$. Δηλαδή*

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0 \,, \quad \text{όπου } S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikt} \,.$$

Ο Lusin το 1915 ισχυρίστηκε ότι η σειρά Fourier της $L_2(\mathbb{T})$ συγκλίνει στην f σχεδόν παντού. Το 1966 ο L. Carleson απέδειξε τον ισχυρισμό του Lusin στην εργασία [10], μία από τις σημαντικότερες εργασίες στην περιοχή της ανάλυσης Fourier. Το θεώρημα του L. Carleson είναι γνωστό και σαν "θεώρημα της σχεδόν παντού σύγκλισης του Carleson" (Carleson's almost everywhere convergence theorem).

Εν συνεχεία, το αποτέλεσμα του Carleson γενικεύτηκε από τον R. Hunt [35] για συναρτήσεις $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p \leq \infty$.

Μια άλλη απόδειξη του θεωρήματος του Carleson δόθηκε από τον C. Fefferman [22]. Χρησιμοποιώντας την ιδέα του C. Fefferman, οι M. Lacey, C. Thiele [46] έδωσαν μια πιο απλή απόδειξη του θεωρήματος του Carleson. Παραπέμπουμε και στο σύγγραμμα [4] για τα θεωρήματα Carleson– Hunt, καθώς επίσης και για τις αποδείξεις τους.

Η σημειακή σύγκλιση είναι πιο λεπτό πρόβλημα και θα το εξετάσουμε σε επόμενες παραγράφους, καθώς επίσης και τη θεωρία των σειρών στον $L_1(\mathbb{T})$.

Αν η $f \in L_2(\mathbb{T})$ και $\widehat{f} = 0$, τότε από την Πρόταση 3.3 προκύπτει ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Πιο γενικά έχουμε:

Πρόταση 3.5 *Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε $f = 0$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. *Αν*

$$F(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{t} f(s)\, ds\,,$$

από τη θεωρία ολοκλήρωσης κατά Lebesgue είναι γνωστό ότι η F είναι απόλυτα συνεχής (και επομένως συνεχής) στο $[-\pi, \pi]$ και $F'(t) = f(t)$ σχεδόν παντού στο $[-\pi, \pi]$. Αν

$$G(t) := F(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s)\, ds\,,$$

τότε η G είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ και $G' = F' = f$ σχεδόν παντού στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f, e^{in\cdot} \rangle \\
&= \langle G', e^{in\cdot} \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G'(t)\, e^{-int}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\, G(t)\, e^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t)\, e^{-int}\, dt \\
&= \frac{\cos n\pi}{2\pi} \left[G(\pi) - G(-\pi)\right] + in\langle G, e^{in\cdot} \rangle\,.
\end{aligned}$$

Για $n = 0$ είναι $0 = G(\pi) - G(-\pi)$ και επομένως $0 = in\langle G, e^{in\cdot} \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$\langle G, e^{in\cdot} \rangle = 0\,, \quad \text{για } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0.$$

Όμως για $n = 0$ έχουμε

$$\langle G, e^{i0\cdot} \rangle = \langle G, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt = 0\,.$$

Άρα,

$$\langle G, e^{in\cdot} \rangle = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή η G είναι συνεχής θα είναι $G = 0$. Επομένως $f = 0$ σχεδόν παντού. ■

Σημείωση. Η Πρόταση 3.5 είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Fejér-Lebesgue, βλέπε Πόρισμα 4.9.

Παράδειγμα 3.2 *Το σύνολο*

$$A := \left\{ f \in C_\infty([0,1]) :\ \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\, dx = 0 \right\}$$

είναι πυκνό ως προς την L_2-νόρμα στο χώρο Hilbert $L_2([0,1], dt)$.

Απόδειξη. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ οι συναρτήσεις $g_n(x) = xe^{2\pi inx}$, $x \in [0,1]$, ανήκουν στον υπόχωρο A. Επομένως, αν $h \in A^\perp$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ και $H(x) = xh(x)$, τότε*

$$\widehat{H}(n) = \int_0^1 H(x)\, e^{-2\pi inx}\, dx = \int_0^1 h(x) \cdot xe^{-2\pi inx}\, dx = \langle h, g_n \rangle = 0\,,$$

όπου $g_n(x) = xe^{-2\pi inx} \in A$. *Άρα, η* H *είναι σταθερή σχεδόν παντού. Αν* $H(x) = xh(x) = c$ *σχεδόν παντού,* $c \neq 0$, *η* $h \notin L_2([0,1], dt)$. *Θα πρέπει λοιπόν να είναι* $h(x) = 0$ *σχεδόν παντού, δηλαδή* $A^{\perp} = \{0\}$.
Άρα, $\overline{A} = L_2([0,1], dt)$. ∎

3.2 Εφαρμογές – Θεωρήματα Müntz

Θεώρημα 3.6 (Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass) *Αν η συνάρτηση* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πολυώνυμο*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{R})$$

τέτοιο ώστε

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in [a,b]\ .$$

Απόδειξη.
Έστω A *είναι το σύνολο των πολυωνύμων. Το* A *είναι υποάλγεβρα του* $C[a,b]$ *η οποία διαχωρίζει τα σημεία του* $[a,b], (P(x) = x)$ *και περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις. Από το Θεώρημα Stone-Weierstrass υπάρχει* $P \in A$ *τέτοιο ώστε*

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon\ .$$

∎

Παράδειγμα 3.3 *Αν* $f \in L_2([0,1], dt)$, *τότε* $f(t) = t$ *σχεδόν παντού στο* $[0,1]$ *αν και μόνο αν*

$$\int_0^1 t^n f(t)\, dt = \frac{1}{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.5}$$

Απόδειξη. *Αν* $f(t) = t$ *σχεδόν παντού στο* $[0,1]$, *τότε*

$$\int_0^1 t^n f(t)\, dt = \int_0^1 t^{n+1}\, dt = \frac{1}{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η (3.5). Αν $F(t) := f(t) - t$, *τότε*

$$\int_0^1 F(t)\, t^n\, dt = \int_0^1 f(t)\, t^n\, dt - \int_0^1 t^{n+1}\, dt = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Επομένως, για κάθε πολυώνυμο P *είναι*

$$\int_0^1 F(t)\, P(t)\, dt = 0\,.$$

Τότε, από το θεώρημα του Weierstrass έχουμε

$$\int_0^1 F(t)\, g(t)\, dt = 0\,,$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση g στο $[0,1]$. Ως γνωστόν, βλέπε [61, 3.14 Theorem], οι συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ είναι σύνολο πυκνό ως προς την L_2-νόρμα στο χώρο Hilbert $L_2([0,1],m)$. Επειδή $F \in L_2([0,1],m)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση g στο $[0,1]$ τέτοια ώστε

$$\left(\int_0^1 |F(t) - g(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} < \varepsilon \,.$$

Επειδή $\int_0^1 F(t)\, g(t)\, dt = 0$, έχουμε

$$\left(\int_0^1 F^2(t)\, dt + \int_0^1 g^2(t)\, dt\right)^{1/2} < \varepsilon$$

και επομένως

$$\|F\|_2 = \left(\int_0^1 F^2(t)\, dt\right)^{1/2} < \varepsilon \,,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα, $F(t) = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και ισοδύναμα $f(t) = t$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$. ■

Παρατήρηση 3.3 *Στις μιγαδικές συναρτήσεις άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Runge είναι το εξής αποτέλεσμα :*

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ είναι ένα ανοικτό, αλλά συνεκτικό σύνολο. Αν η $f : K \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική, όπου το $K \subset \Omega$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο $P(z)$ τέτοιο ώστε

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon \,, \quad \text{για κάθε } z \in K.$$

Το ανάλογο του θεωρήματος του Weierstrass δεν ισχύει στη μιγαδική περίπτωση. Πράγματι, έστω η συνεχής συνάρτηση $f(z) = 1/z$ ορισμένη στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ που είναι ένα συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Για $\varepsilon = 1$ υποθέσουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N}, \; a_k \in \mathbb{C})$$

τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{1}{z} - p(z)\right| < 1 \,, \quad \text{για κάθε } |z| = 1 \,.$$

Ισοδύναμα,

$$|1 - zp(z)| < 1 \,, \quad \text{για κάθε } |z| = 1 \,.$$

Έστω $q(z) := zp(z)$. Το q είναι ένα πολυώνυμο και επομένως είναι αναλυτική μη σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{C}$, τέτοια ώστε

$$|1 - q(z)| < 1 \,, \quad \text{για κάθε } |z| = 1 \,.$$

Τότε, από την αρχή μεγίστου θα πρέπει να είναι

$$|1 - q(z)| < 1 \,, \quad \text{για κάθε } |z| \leq 1 \,.$$

Όμως, από την παραπάνω ανισότητα για $z = 0$ έχουμε

$$1 = |1 - q(0)| < 1\,,$$

που είναι άτοπο. Επομένως η f δεν προσεγγίζεται από πολυώνυμα.

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των συναρτήσεων : $1, x, x^2, x^3, \ldots$ είναι πυκνό στον χώρο $C[0,1]$. Δηλαδή αν $M = span\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$, τότε

$$\overline{M} = C[0,1]\ .$$

Ερώτημα. Αν $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$, κάτω από ποιές συνθήκες το σύνολο των συναρτήσεων

$$1, x^{k_1}, x^{k_2}, x^{k_3}, \cdots$$

είναι πυκνό στον $C[0,1]$;

Θα αποδείξουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} = \infty\,.$$

Χρειαζόμαστε μερικές βοηθητικές προτάσεις :

Λήμμα 3.7 (Λήμμα Cauchy)

$$\prod_{i,j=1}^{n} (a_i + b_j) \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)\ .$$

Απόδειξη. *Έστω $P_1(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ $P_2(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ είναι το αριστερό, δεξιό μέλος αντίστοιχα στην παραπάνω εξίσωση. Τα P_1 και P_2 είναι πολυώνυμα και το P_2 είναι μηδέν αν και μόνο αν $a_i = a_j$ ή $b_i = b_j$ για κάποια $i \neq j$. Τότε όμως και το P_1 μηδενίζεται. Επομένως $P_1 = Q \cdot P_2$ όπου Q είναι ένα πολυώνυμο ως προς $a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Όμως ως προς κάθε a_i και b_i τα P_1 και P_2 είναι πολυώνυμα βαθμού $n-1$. Το Q λοιπόν είναι μία σταθερά. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $Q = 1$. Αυτό όμως ισχύει επειδή*

$$\lim_{b_j \to -a_j} P_1(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = \lim_{b_j \to -a_j} \prod_{i,j=1, i\neq j}^{n} (a_i + b_j) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1+b_1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_1+b_1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_2+b_2}{a_2+b_1} & 1 & \cdots & \frac{a_2+b_2}{a_2+b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n+b_n}{a_n+b_1} & \frac{a_n+b_n}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i,j=1, i\neq j}^{n} (a_i - a_j) = \lim_{b_j \to -a_j} P_2(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)\ .$$

■

Λήμμα 3.8 *Έστω $m, k_1, k_2, \ldots, k_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του $-\frac{1}{2}$ και διάφοροι μεταξύ τους. Στον χώρο $L_2\,[0,1]$ η απόσταση d του x^m από τον υπόχωρο $M = \operatorname{span}\left\{x^{k_1}, \ldots, x^{k_n}\right\}$ δίνεται από τον τύπο*

$$d = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{|m-k_j|}{m+k_j+1} \quad . \tag{3.6}$$

Απόδειξη.

Από το Λήμμα του Gramm (κεφάλαιο 1) έχουμε

$$d^2 = \frac{G\left(x^{k_1}, \ldots, x^{k_n}, x^m\right)}{G\left(x^{k_1}, \ldots, x^{k_n}\right)} \quad .$$

Επειδή

$$(x^p, x^q) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \frac{1}{p+q+1} \quad ,$$

από το Λήμμα Cauchy έχουμε

$$G\left(x^{k_1}, \ldots, x^{k_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{k_1+k_1+1} & \cdots & \frac{1}{k_1+k_n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k_n+k_1+1} & \cdots & \frac{1}{k_n+k_n+1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1\le j<i\le n} (k_i-k_j)^2}{\prod_{i,j=1}^{n} (k_i+k_j+1)} \, . \tag{3.7}$$

Παρόμοια

$$G\left(x^{k_1}, \ldots, x^{k_n}, x^m\right) = \frac{\prod_{1\le j<i\le n} (k_i-k_j)^2 \cdot \prod_{j=1}^{n} (m-k_j)^2}{\prod_{i,j=1}^{n} (k_i+k_j+1) \cdot \prod_{i,j=1}^{n} (m+k_j+1)^2 \cdot (2m+1)} \, . \tag{3.8}$$

Διαιρώντας την (3.8) με την (3.7) προκύπτει ο τύπος (3.6). ■

Θεώρημα 3.9 (Πρώτο Θεώρημα Müntz) *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύνολο*

$$M = \operatorname{span}\left\{x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots\right\} \, , \quad \text{όπου } -\frac{1}{2} < k_n \to \infty,$$

πυκνό στον χώρο $L_2\,[0,1]$ είναι ότι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} = \infty \, , \quad k_n \neq 0 \, .$$

Απόδειξη. *Επειδή το span $\left\{1, x, x^2, \ldots\right\}$ είναι πυκνό στον $L_2[0,1]$, το span $\left\{x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots\right\}$ θα είναι πυκνό στον $L_2[0,1]$ αν και μόνο αν η απόσταση d_n του x^m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ από το $M =$ span $\left\{x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_n}\right\}$ έχει όριο μηδέν, καθώς το $n \to \infty$. Από το Λήμμα 3.8 είναι*

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{|m-k_j|}{m+k_j+1} \, . \tag{3.9}$$

Επομένως, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left[\ln\left|1 - \frac{m}{k_j}\right| - \ln\left(1 + \frac{m+1}{k_j}\right) \right] = -\infty \, .$$

Ισοδύναμα, αν $k_j > m$ *για* $j \geq n_0$, *θα πρέπει να είναι :*

$$\sum_{j=n_0}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{m}{k_j}\right)-\ln\left(1+\frac{m+1}{k_j}\right)\right]=-\infty\,.$$

Όμως, από το κριτήριο σύγκρισης οι σειρές

$$\sum_{j=n_0}^{\infty}\ln\left(1+a_j\right)\quad \textit{και}\quad \sum_{j=n_0}^{\infty}a_j\,,\quad \textit{με}\ \lim_{j\to\infty}a_j=0\,,$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Πράγματι, είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1\,,$$

Άρα, θα είναι $\lim_{n\to\infty}d_n=0$ *αν και μόνο αν*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k_j}=\infty\,,\quad k_j\neq 0\,.$$

■

Θεώρημα 3.10 (Δεύτερο Θεώρημα Müntz) *Το σύνολο*

$$M=span\left\{1,x^{k_1},x^{k_2},x^{k_3},\dots\right\}\,,\quad \textit{όπου}\ 1\leq k_n\to\infty\,,$$

είναι πυκνό στον χώρο $C[0,1]$ *(ως προς την sup-νόρμα) αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}=\infty\,.$$

Απόδειξη. *Αν το* M *είναι πύκνο στον χώρο* $C[0,1]$ *(ως προς την sup-νόρμα) επειδή ο χώρος* $C[0,1]$ *είναι πυκνός στον* $L_2[0,1]$ *ως προς την νόρμα* $\|\cdot\|_2$, *τότε και το* M *θα είναι πυκνό στον* $L_2[0,1]$ *ως προς την νόρμα* $\|\cdot\|_2$. *Από το πρώτο Θεώρημα θα πρέπει να είναι :*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}=\infty\ .$$

Υποθέτουμε τώρα ότι :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}=\infty\ .$$

Για να αποδείξουμε ότι το M *είναι πυκνό στον* $C[0,1]$ *(ως προς την sup-νόρμα) αρκεί να αποδείξουμε ότι αν* $f(x)=x^m$, $m\in\mathbb{N}$ *και* $\varepsilon>0$ *τότε υπάρχει*

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^{k_i}$$

τέτοιο ώστε

$$|x^m-P(x)|<\varepsilon\,,\quad \textit{για κάθε}\ x\in[0,1]\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}\left|x^m - \sum_{i=1}^{n} a_i x^{k_i}\right| &= m\left|\int_0^x \left[t^{m-1} - \sum_{i=1}^{n} b_i t^{k_1-1}\right] dt\right| \qquad (\text{όπου } a_i = (m/k_i)\, b_i,\ i = 1, \ldots, n) \\ &\leq m \int_0^1 \left|t^{m-1} - \sum_{i=1}^{n} b_i t^{k_1-1}\right| dt \\ &\leq m \cdot \left\{\int_0^1 \left|t^{m-1} - \sum_{i=1}^{n} b_i t^{k_1-1}\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} .\end{aligned}$$

Επειδή

$$0 \leq k_n - 1 \to \infty \ \ \text{και} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n - 1}\ ,\ k_n - 1 \neq 0 \ \ ,$$

από το πρώτο θεώρημα Müntz για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n και $b_1, \ldots, b_n$ τέτοια ώστε :

$$\left\{\int_0^1 \left|t^{m-1} - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot t^{k-1}\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{m} \ \ .$$

Επομένως, από την προηγούμενη ανισότητα θα είναι :

$$\left|x^m - \sum_{i=1}^{n} a_i x^{k_i}\right| < \varepsilon\ ,\ \forall\, x \in [0,1] \ \ .$$

Η περίπτωση $m = 0$ είναι τετριμμένη. ■

Παρατηρήσεις 3.2 1. *Η σταθερή συνάρτηση 1 πρέπει να προστεθεί στην περίπτωση του χώρου $C\,[0,1]$. Είναι περιττή όμως στην περίπτωση του χώρου $L_2\,[0,1]$.*

2. *Το Θεώρημα Müntz αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Weierstrass. Είναι όμως και ένα θεώρημα του $L_2\,[0,1]$.*

3.3 Ανάλυση Fourier στον $L_1(\mathbb{T})$

Υπενθυμίζεται ότι ο n-οστός συντελεστής Fourier της $f \in L_1\,(\mathbb{T})$ είναι :

$$\widehat{f}\,(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,(t)\, e^{-int}\, dt\,.$$

Πρόταση 3.11 *Έστω $f, g \in L_1\,(\mathbb{T})$. Τότε*

(α΄) $\left(\widehat{f+g}\right)(n) = \widehat{f}\,(n) + \widehat{g}\,(n)$.

(β΄) $\left(\lambda \widehat{f}\right)(n) = \lambda \cdot \widehat{f}\,(n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(γ΄) $\widehat{(\overline{f})}\,(n) = \overline{\widehat{f}\,(-n)}$, *όπου $\overline{f}$ είναι η συζυγής συνάρτηση της f.*

(δ΄) Για κάθε $\tau \in [-\pi, \pi)$ *θέτουμε* $f_\tau(t) := f(t-\tau)$*. Τότε,* $f_\tau \in L_1(\mathbb{T})$ *και*

$$\|f_\tau\|_1 = \|f\|_1 \,, \quad \widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n)\, e^{-in\tau}\,.$$

(ε΄) $\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \|f\|_1$.

Απόδειξη.

Οι (α΄), (β΄), (γ΄) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό.

(δ΄) Είναι

$$\|f_\tau\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-\tau)|\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$$

και

$$\begin{aligned}
\widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\tau(t)\, e^{-int}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)\, e^{-int}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(s)\, e^{-ins} e^{-in\tau}\, ds && (\text{αντικατάσταση } s = t-\tau) \\
&= e^{-in\tau}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{-ins}\, ds \\
&= \widehat{f}(n)\, e^{-in\tau}\,.
\end{aligned}$$

(ε΄)

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(t)\, e^{-int}\right|\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt = \|f\|_1\,.$$

■

Πόρισμα 3.12 *Αν οι συναρτήσεις* $f_n, f \in L_1(\mathbb{T})$, $n = 1, 2, \ldots$ *και*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0\,,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n} = \widehat{f}\,, \quad \text{ομοιόμορφα.}$$

Απόδειξη.

Από την προηγούμενη πρόταση είναι

$$\left(\widehat{f_n - f}\right)(k) = \widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)$$

και

$$\left|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\right| = \left|\left(\widehat{f_n - f}\right)(k)\right| \leq \|f_n - f_1\|_1\,.$$

Άρα, $f_n \to f$ *ομοιόμορφα.* ■

Πρόταση 3.13 *Έστω η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{T} \to L_1(\mathbb{T})$ με $\varphi(\tau) = f_\tau$, όπου $f_\tau(t) := f(t-\tau)$. Τότε η φ είναι συνεχής. Δηλαδή, για $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $\tau_0 \in \mathbb{T}$*

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 = 0 \,.$$

Απόδειξη. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $C(\mathbb{T})$ είναι πυκνό στον $L_1(\mathbb{T})$, υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε*

$$\|(f-g)_\tau\|_1 = \left\|(f-g)_{\tau_0}\right\|_1 = \|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} \,.$$

Επειδή η g είναι συνεχής, υπαρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $|\tau - \tau_0| < \delta$

$$\|g_\tau - g_{\tau_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \,.$$

Επομένως, για $|\tau - \tau_0| < \delta$ είναι

$$\begin{aligned}
\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_1 \\
&\leq \|(f-g)_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_\infty + \left\|(f-g)_{\tau_0}\right\|_1 \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,.
\end{aligned}$$

■

Αναφέρουμε τώρα χωρίς απόδειξη μερικά γνωστά αποτελέσματα της πραγματικής ανάλυσης για συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης και για συναρτήσεις που είναι απόλυτα συνεχείς. Παραπέμπουμε στα συγγράμματα [61, 67] για τη μελέτη αυτών των συναρτήσεων καθώς επίσης και για την απόδειξη των αποτελεσμάτων.

Ορισμός 3.2 *Λέμε ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C \,,$$

για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$.

Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό : $f \in BV[a,b]$. Ορίζουμε

$$V(P,f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \;.$$

Η *ολική κύμανση* $V_a^b(f)$ της f ορίζεται ως εξής

$$V_a^b(f) := \sup\{V(P,f) : P \;\text{ διαμέριση του } [a,b]\} \;.$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

(α′) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης, τότε είναι φραγμένη.

(β′) Αν οι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης, τότε οι $f + g$, $f \cdot g$ είναι φραγμένης κύμανσης και ισχύει

$$V_a^b (f + g) \leq V_a^b (f) + V_a^b (g) \ .$$

Αν $c \in [a, b]$, τότε

$$V_a^b (f) = V_a^c (f) + V_c^b (f) \ .$$

(γ′) (Θεώρημα Jordan Decomposition) Η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης αν και μόνο αν υπάρχουν αύξουσες συναρτήσεις $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f = f_1 - f_2$.

Κάθε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού και η f' είναι ολοκληρώσιμη.

Λέμε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz (βαθμού 1) στο $[a, b]$, αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f (x) - f (y)| \leq M |x - y| \ , \quad \text{για κάθε } x, y \in [a, b].$$

Σ' άυτη την περίπτωση, για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ είναι

$$V (P, f) \leq M (b - a) \ .$$

Η f είναι φραγμένης κύμανσης με

$$V_a^b (f) \cdot (b - a) \ .$$

Η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz στο σημείο x_0 αν υπάρχει $K > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε : $|h| < \delta$ συνεπάγεται ότι

$$|f (x_0 + h) - f (x_0)| \leq K \cdot |h| \ .$$

(δ′) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η

$$F(x) := \int_a^x f (t) \ dt$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$.

Παρατηρήσεις 3.3 *1. Μία συνεχής συνάρτηση είναι δυνατόν να μην είναι φραγμένης κύμανσης. Έστω*

$$f(x) = \begin{cases} x \cos (\pi/2x) \ , & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{αν } x = 0 \ . \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Αν

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n} \, , \frac{1}{2n-1} \, , \cdots \, , \frac{1}{3} \, , \frac{1}{2} \, , 1\right\}$$

είναι μία διαμέριση του $[0,1]$, τότε

$$V(P,f) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

το οποίο δεν είναι φραγμένο για κάθε n (επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n) = \infty$).

2. *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η f' είναι φραγμένη, από το Θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι η f είναι φραγμένης κύμανσης.*

3. *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης με*

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)| \ .$$

Ορισμός 3.3 *Λέμε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(a_k,b_k)\subset[a,b]$, $k=1,2,\ldots,n$, ξένα ανά δύο μεταξύ τους με $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, είναι*

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \, .$$

Κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής και επομένως συνεχής. Υπάρχουν όμως ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι απόλυτα συνεχείς.

Ισοδύναμα, η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε ακολουθία διαστημάτων $(a_k,b_k)\subset[a,b]$, $k=1,2,\ldots,n$, με $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$, είναι

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \, .$$

Εύκολα φαίνεται ότι κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz είναι απόλυτα συνεχής.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα μέσης τιμής αποδεικνύεται ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz αν είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι φραγμένη.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

(α′) Αν οι $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχείς, τότε και οι συναρτήσεις af, $f+g$, $f\cdot g$, $a\in\mathbb{R}$, είναι απόλυτα συνεχείς.

(β′) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης.

Το αντίστροφο δεν ισχύει ακόμη και για συνεχείς μονότονες συναρτήσεις, όπως η ιδιάζουσα συνάρτηση του Lebesgue (Lebesgue's singular function).

Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι απόλυτα συνεχείς. Για παράδειγμα, η

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\pi/2x) \ , & \text{αν } \ x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{αν } \ x = 0 \ . \end{cases}$$

είναι συνεχής. Όμως η f δεν είναι απόλυτα συνεχής αφού δεν είναι φραγμένης κύμανσης.

(γ΄) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο $[a, b]$. Επίσης, η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(δ΄) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε $f = f_1 - f_2$ όπου οι f_1, f_2 είναι αύξουσες και απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις.

<u>*Παραγώγιση και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.*</u>

(I) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

είναι απόλυτα συνεχής και $F'(x) = f(x)$ σχεδόν παντού στο $[a, b]$.

(II) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε η f' είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f' \in L_1[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)\ , \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Επομένως, η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής αν και μόνο αν η $f' \in L_1[a, b]$ και

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt\, , \quad \forall x \in [a, b]\ .$$

Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής και $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού στο $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.

Θεώρημα 3.14 (Θεώρημα Lebesgue) *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0 \tag{3.10}$$

σχεδόν παντού.

Το σύνολο των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η (3.10) ισχύει λέγεται "σύνολο Lebesgue της f"

Παρατήρηση 3.4 *Ανάλογος είναι ο ορισμός της συνάρτησης φραγμένης κύμανσης και της απόλυτα συνεχούς συνάρτησης στην παρίπτωση που οι τιμές της $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Τα προηγούμενα θεωρήματα ισχύουν και σ᾽ αυτή την περίπτωση.*

Πρόταση 3.15 *Αν η $f \in L_1(\mathbb{T})$ είναι απόλυτα συνεχής τότε*

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)\ .$$

Δηλαδή,

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

Απόδειξη. *Είναι*

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\, f(t)\, e^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}(-1)^n\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] + in\widehat{f}(n) \\ &= in\widehat{f}(n)\ .\end{aligned}$$

Αν η f είναι k-φορές παραγωγίσιμη, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (ik)^n\,\widehat{f}(n)$$

και επομένως

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad \textit{καθώς το } |n| \to \infty.$$

■

Πρόταση 3.16 *Αν η f είναι k-φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{T})$, τότε*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \min_{0\le j\le k} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j}\ .$$

Αν η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, τότε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \min_{j\ge 0} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j}\ .$$

Απόδειξη. *Είναι*

$$\widehat{f}(n) = (in)^{-j}\cdot\widehat{f^{(j)}}(n)$$

και επομένως

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = |n|^{-j}\cdot\left|\widehat{f^{(-j)}}(n)\right|\ .$$

Επειδή

$$\left|\widehat{f^{(j)}}(n)\right| \le \|f^{(j)}\|_1\,,$$

έχουμε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le |n|^{-j}\cdot\|f^{(j)}\|_1\,.$$

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει από την παραπάνω ανισότητα. ■

Πρόταση 3.17 *Αν $f \in BV(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι φραγμένης κύμανσης, τότε*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{2\pi|n|}\ .$$

Απόδειξη. *Είναι*

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(n)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in}\right)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ de^{-int}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2\pi in}\ f(t)\, e^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, df(t)\right| .\end{aligned}$$

Επειδή $f(-\pi) = f(\pi)$, έχουμε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \frac{1}{2\pi|n|}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, df(t)\right| \leq \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{2\pi|n|} .$$

■

Αν $f \in BV(\mathbb{T})$, από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι $\widehat{f}(n) \to 0$, καθώς $|n| \to \infty$. Αν η $f \in L_2(\mathbb{T})$, τότε από την ανισότητα Bessel έπεται ότι $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που η $f \in L_1(\mathbb{T})$. Θα χρειαστύμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.18 *Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι σύνολο πυκνό στον $L_1(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το $C(\mathbb{T})$ είναι πυκνό στον $L_1(\mathbb{T})$, υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε*

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Επειδή το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνό στο $C(\mathbb{T})$, υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε

$$\|g - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Επομένως

$$\|f - P\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - P\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - P\|_\infty < \varepsilon .$$

■

Υποθέτουμε τώρα ότι η $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε

$$\|f - P\|_1 < \varepsilon .$$

Αν $P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$ είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(t)\, e^{-int}\, dt = 0 , \quad \text{για } |n| > N.$$

Άρα, για $|n| > N$ έχουμε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - P(t)]\, e^{-int}\, dt\right| \leq \|f - P\|_1 < \varepsilon .$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το κλασσικό λήμμα των Riemann–Lebesgue:

$$\text{Αν } f \in L_1(\mathbb{T}),\ \text{ τότε } \lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0. \tag{3.11}$$

Παρατήρηση 3.5 *Έστω K ένα συμπαγές σύνολο στον $L_1(\mathbb{T})$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος τριγωνομετρικά πολυώνυμα $P_1, P_2, \ldots, P_N$ τέτοια ώστε για κάθε $f \in K$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq N$, τέτοιο ώστε $\|f - P_k\|_1 < \varepsilon$ (γιατί;).*

Έστω n_k είναι ο βαθμός του P_k, $1 \leq k \leq N$. Τότε, για $|n| > \max\{n_k : k = 1, 2, \ldots, N\}$ είναι

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - P_k(t)]\, e^{-int}\, dt\right| \leq \|f - P_k\|_1 < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } f \in K.$$

Άρα, το λήμμα Riemann–Lebesgue ισχύει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $L_1(\mathbb{T})$.

Το λήμμα των Riemann–Lebesgue γενικεύεται. Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω κλασσικό θεώρημα του Riesz, βλέπε [61, 6.19 Theorem].

Θεώρημα 3.19 (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) *Αν $\Phi : C[a,b] \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένο(συνεχές) γραμμικό συναρτησιακό, τότε υπάρχει $\varphi \in BV[a,b]$ τέτοιο ώστε*

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x)\,,$$

για κάθε $f \in C[a,b]$. Επιπλέον,

$$\|\Phi\| = V_a^b(\varphi)\,.$$

Επομένως,

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)\right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(\varphi)\,, \quad \text{όπου } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Θεώρημα 3.20 *Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, τότε*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ixt}\, dx = 0\,.$$

Απόδειξη. *Έστω $\varepsilon > 0$. Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε*

$$\|f - P\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επειδή το τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\, e^{-ixt}\, dx\right| &= \left|-\frac{1}{it}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\, de^{-ixt}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{it}\, P(x)\, de^{-ixt}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{it}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt}\, dP(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{|t|}\left|P(\pi)\, e^{-i\pi t} - P(-\pi)\, e^{i\pi t}\right| + \frac{1}{|t|}\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt}\, dP(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{|t|}\left[2\|P\|_\infty + V_{-\pi}^{\pi}(P)\right]\,.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε $n_0 > 0$, τέτοιο ώστε για $|t| > n_0$ είναι

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\, e^{-ixt}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επομένως, για $|t| > n_0$ είναι

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ixt}\, dx\right| \le \left|\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\, e^{-ixt}\, dx\right| + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

■

Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, *ο μετασχηματισμός Fourier της f* είναι η συνάρτηση $\widehat{f}$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\,, \qquad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει το λήμμα Riemann-Lebesgue για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 3.21 (Λήμμα των Riemann-Lebesgue) *Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ και $\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$, τότε*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |\widehat{f}(\lambda)| = 0\,. \tag{3.12}$$

Απόδειξη. Αν $f = \chi_{[a,b)}$, τότε

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \left|\widehat{f}(\lambda)\right| = \lim_{|\lambda|\to\infty} \left|\frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda}\right| = 0\,.$$

Λόγω γραμμικότητας η (3.12) ισχύει και στην περίπτωση που η f είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Στη γενική περίπτωση, αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ τότε ως γνωστόν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ολοκληρώσιμη κλιμακωτή συνάρτηση ϕ, με

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \phi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επειδή η (3.12) ισχύει για τη ϕ, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall\, |\lambda| \ge M\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right| &\le \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \phi(x))\, e^{-i\lambda x}\, dx\right| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \phi(x)|\, dx + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \qquad \forall\, |\lambda| \ge M\,.
\end{aligned}$$

Άρα, η (3.12) ισχύει για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R})$. ■

Παρατήρηση 3.6 *Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, από τη (3.12) συνεπάγεται ότι*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0 ,$$

πού είναι μια ισοδύναμη μορφή του λήμματος των Riemann-Lebesgue.

Παράδειγμα 3.4 *Έστω το $E \subset \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Αν (k_n) είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (a_n) είναι μια οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \cos^2(k_n x + a_n) \, dx = \frac{1}{2} m(E) .$$

Λύση. Για τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα των Riemann-Lebesgue. Πράγματι, επειδή

$$\begin{aligned}
\int_E \cos^2(k_n x + a_n) \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [1 + \cos(2k_n x + 2a_n)] \chi_E(x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \cos(2k_n x + 2a_n) \chi_E(x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} m(E) + \frac{\cos 2a_n}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \cos 2k_n x \, dx - \frac{\sin 2a_n}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \sin 2k_n x \, dx ,
\end{aligned}$$

από το λήμμα των Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\left| \int_E \cos^2(k_n x + a_n) \, dx - \frac{1}{2} m(E) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \cos 2k_n x \, dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \sin 2k_n x \, dx \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

■

Έστω η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$ υπάρχει. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία ολοκλήρωσης Riemann, παραπέμπουμε στο [60, Chapter 3, Pt II, Problem 118], μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0 , \tag{3.13}$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\sin nx| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx . \tag{3.14}$$

Επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, η (3.13) είναι άμεση συνέπεια του λήμματος των Riemann-Lebesgue. Η (3.14) είναι ειδική περίπτωση ενός γενικού αποτελέσματος γνωστού και σαν *λήμμα του Fejér [19, 40, 52].*

Θεώρημα 3.22 (Λήμμα του Fejér) *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ή $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) είναι Lebesgue μετρήσιμη, φραγμένη και περιοδική με περίοδο $T > 0$. Αν $f \in L_1(I)$, όπου I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_I f(x) g(\lambda x) \, dx = \left(\frac{1}{T} \int_0^T g(x) \, dx \right) \left(\int_I f(x) \, dx \right) . \tag{3.15}$$

Απόδειξη. *Μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $\int_0^T g(x)\,dx = 0$. *Πράγματι, αν* $\int_0^T g(x)\,dx \neq 0$ *θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$h(x) := g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\,.$$

Η h *είναι Lebesgue μετρήσιμη, φραγμένη, περιοδική με περίοδο* $T > 0$ *και*

$$\int_0^T h(x)\,dx = \int_0^T g(x)\,dx - \int_0^T \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\right)dx = \int_0^T g(x)\,dx - \int_0^T g(x)\,dx = 0\,.$$

Αν αποδείξουμε ότι $\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)\,h(\lambda x)\,dx = 0$, *από τον ορισμό της* h *προκύπτει η απόδειξη της* (3.15). *Υποθέτουμε λοιπόν ότι* $\int_0^T g(x)\,dx = 0$. *Πρέπει να δείξουμε ότι* $\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)\,g(\lambda x)\,dx = 0$. *Έστω*

$$G(x) := \int_0^x g(t)\,dt\,.$$

Αν $x = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, *επειδή η* g *είναι* T*-περιοδική έχουμε*

$$G(kT) := \int_0^{kT} g(t)\,dt = k\int_0^T g(t)\,dt = 0\,.$$

Αν $kT < x < (k+1)T$, $k \in \mathbb{Z}$, *τότε*

$$\begin{aligned}
|G(x)| &= \left|\int_0^{kT} g(t)\,dt + \int_{kT}^x g(t)\,dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^{kT} g(t)\,dt\right| + \int_{kT}^x |g(t)|\,dt \\
&= \left|k\int_0^T g(t)\,dt\right| + \int_{kT}^x |g(t)|\,dt && (\text{η } g \text{ είναι } T\text{-περιοδική}) \\
&= \int_{kT}^x |g(t)|\,dt \\
&\leq \int_{kT}^{(k+1)T} |g(t)|\,dt \\
&= \int_0^T |g(t)|\,dt\,. && (\text{η } |g| \text{ είναι } T\text{-περιοδική})
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$|G(x)| \leq \int_0^T |g(t)|\,dt\,,$$

δηλαδή η G *είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο* $\mathbb{R}$. *Αν* I *είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα, έστω* $I = (a, b)$, *τότε*

$$\int_I g(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(G(\lambda b) - G(\lambda a)\right)\,.$$

Επομένως

$$\left|\int_I g(\lambda x)\,dx\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}\int_0^T |g(t)|\,dt$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_I g(\lambda x)\ dx = 0\,.$$

Αν ϕ *είναι μία κλιμακωτή συνάρτηση, δηλαδή γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων φραγμένων διαστημάτων, τότε*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, g(\lambda x)\ dx = 0\,. \tag{3.16}$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ *(ή* $f : I \to \mathbb{C}$*) είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο διάστημα* I *του* $\mathbb{R}$*. Τότε, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ολοκληρώσιμη κλιμακωτή συνάρτηση* φ *ορισμένη στο* I *με*

$$\int_I |f(x) - \phi(x)|\ dx < \varepsilon / \|g\|_\infty\ .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left|\int_I f(x)\, g(\lambda x)\ dx\right| &\le \int_I |f(x) - \phi(x)|\, |g(\lambda x)|\ dx + \left|\int_I \phi(x)\, g(\lambda x)\ dx\right| \\
&\le \varepsilon + \left|\int_I \phi(x)\, g(\lambda x)\ dx\right|\ .
\end{aligned}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τη (3.16) *τελικά έχουμε* $\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_I f(x)\, g(\lambda x)\ dx = 0$. ∎

Παρατήρηση 3.7 *Για* $g(x) = \sin x$ *ή* $g(x) = \cos x$*, το λήμμα του Fejér συνεπάγεται το λήμμα των Riemann-Lebesgue. Πράγματι, αν* I *είναι ένα διάστημα του* $\mathbb{R}$*, από τη* (3.15) *έχουμε*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_I f(x) \cos \lambda x\, dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_I f(x) \sin \lambda x\, dx = 0\,.$$

Παράδειγμα 3.5 *Να υπολογιστεί το*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + 3\cos^2 \lambda x}\, dx\,.$$

Λύση. *Η συνάρτηση* $g(x) = 1/\left(1 + 3\cos^2 x\right)$ *είναι συνεχής, φραγμένη και περιοδική με περίοδο* π*. Από το λήμμα Fejer έχουμε*

$$\begin{aligned}
\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + 3\cos^2 \lambda x}\, dx &= \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{1 + 3\cos^2 x}\, dx\right)\left(\int_0^\pi \sin x\, dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{1 + 3\cos^2 x}\, dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + 3\cos^2 x}\, dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t^2 + 4}\, dt \qquad (\text{αντικατάσταση } t = \tan x) \\
&= \frac{2}{\pi} \lim_{t\to\infty} \arctan \frac{t}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

∎

Μια άλλη εφαρμογή το λήμματος Fejér δίνεται στην άσκηση 6 του κεφαλαίου 4.

Ισχύει το αντίστροφο του Λήμματος Riemann-Lebesgue ; Δηλαδή αν (c_n) *είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε* $\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$, *υπάρχει* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *τέτοια ώστε* $c_n = \widehat{f}(n)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *; Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η απάντηση είναι αρνητική. Μια άλλη απόδειξη, όπως θα δούμε αργότερα, προκύπτει από το Θεώρημα Fejér-Lebesgue.*

Ο πυρήνας του Dirichlet είναι η ακολουθία (D_n), *όπου*

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\,, \quad t \in \mathbb{T}\,.$$

Είναι

$$\left(e^{it}-1\right) D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+1)t} - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{i(n+1)t} - e^{-int}\,,$$

οπότε για $t \neq 0$

$$D_n(t) = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it}-1} \cdot \frac{e^{-it/2}}{e^{-it/2}} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,.$$

Δηλαδή,

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{αν } t \neq 0\ , \\ 2n+1 & \text{αν } t = 0\ . \end{cases}$$

Λήμμα 3.23 *Αν* (D_N) *είναι ο πυρήνας Dirichlet, τότε* $D_N \in L_1(\mathbb{T})$ *και οι όροι της ακολουθίας* $\left(\widehat{D}_N(n)\right)$ *είναι τελικά μηδέν, με* $\|\widehat{D}_N\|_\infty = 1$, $N = 1, 2, \ldots$. *Είναι*

$$\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_1 = \infty\,.$$

Απόδειξη. *Η* D_N, $N \in \mathbb{N}$, *είναι συνεχής,* 2π*-περιοδική συνάρτηση, δηλαδή* $D_N \in L_1(\mathbb{T})$. *Εύκολα φαίνεται ότι*

$$\widehat{D}_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |n| \leq N\ , \\ 0 & \text{αν } |n| > N\ . \end{cases}$$

Επομένως οι όροι της ακολουθίας $\left(\widehat{D}_N(n)\right)$ *είναι τελικά μηδέν, με* $\|\widehat{D}_N\|_\infty = 1$. *Είναι*

$$
\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\right| dx && (x=t/2) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\right| dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\right| dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\right| dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{t}\right| dt\,. && (0\leq \sin t\leq t,\ \text{για } 0\leq t\leq \pi/2)
\end{aligned}
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{t}\right| dt &= \sum_{n=0}^{2N}\int_{\frac{n\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(n+1)\pi}{2(2N+1)}}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{t}\right| dt \\
&\geq \sum_{n=0}^{2N}\frac{2(2N+1)}{(n+1)\pi}\int_{\frac{n\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(n+1)\pi}{2(2N+1)}}|\sin(2N+1)t|\ dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}}|\sin x|\ dx && (\text{αντικατάσταση } x=(2N+1)t) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\|D_N\|_1 \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1} = \frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2N}\right).
$$

Άρα,

$$
\lim_{n\to\infty}\|D_N\|_1 = \infty\,.
$$

■

Έστω $c_0(\mathbb{Z})$ *είναι ο χώρος των μιγαδικών συναρτήσεων* $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, *με* $\lim_{n\to\pm\infty}\varphi(n)=0$. *Ορίζουμε*

$$
\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(n)| : n\in\mathbb{Z}\}\,.
$$

Ο $c_0(\mathbb{Z})$ *είναι χώρος Banach.*

Θεώρημα 3.24 *Η απεικόνιση*

$$
\Lambda : L_1(\mathbb{T})\to c_0(\mathbb{Z})\,,\quad \text{με } \Lambda(f) := \widehat{f},
$$

είναι ένας $1-1$ *και φραγμένος τελεστής που δεν είναι επί. Επομένως, υπάρχει ακολουθία μιγαδικών αριθμών* (c_n) *με* $\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$, *για την οποία δεν ισχύει* $\widehat{f}(n) = c_n$, *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *και για κάποια* $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Η Λ είναι γραμμική απεικόνιση. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue είναι $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$ και κατά συνέπεια $\Lambda(f) = \widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$. Από την Πρόταση 3.11 είναι $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, οπότε $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Δηλαδή $\|\Lambda\| \leq 1$. Αν $f(t) = 1$, τότε

$$\Lambda(f)(n) = \widehat{f}(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, \\ 0 & \text{αν } n \neq 0. \end{cases}$$

Δηλαδή, $\|\widehat{f}\| = 1 = \|f\|_1$. Επομένως $\|\Lambda\| = 1$. Θα αποδείξουμε ότι η Λ είναι $1-1$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ συνεπάγεται ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Αυτό όμως ισχύει (Πρόταση 3.5, κεφάλαιο 4). Υποθέτουμε τώρα ότι η απεικόνιση $\Lambda : L_1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ είναι επί. Τότε, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης (open mapping theorem), ο $\Lambda^{-1} : c_0(\mathbb{Z}) \to L_1(\mathbb{T})$ είναι συνεχής (φραγμένος) τελεστής. Δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\Lambda(f)\|_\infty \geq \delta \|f\|_1 , \quad \forall\, f \in L_1(\mathbb{T}) .$$

Επομένως,

$$\|\widehat{f}\,\|_\infty \geq \delta \|f\|_1 , \quad \forall\, f \in L_1(\mathbb{T}) .$$

Θεωρούμε τον πυρήνα Dirichlet (D_N). Από το Λήμμα 3.23

$$D_N \in L_1(\mathbb{T}) , \quad \left\|\widehat{D}_N\right\|_\infty = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{N\to\infty} \|D_N\|_1 = \infty .$$

Άρα, δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left\|\widehat{D}_N\right\|_\infty \geq \delta \|D_N\|_1 ,$$

άτοπο. ■

Παρατήρηση 3.8 *Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1, ο L. Carleson το 1966 απέδειξε ότι για κάθε* $f \in L_2(\mathbb{T})$ *η σειρά Fourier της* f *συγκλίνει στην* f *σχεδόν παντού. Φυσικά αυτό ισχύει και για κάθε* $f \in (\mathbb{T})$. *Αξίζει να σημειωθεί ότι ο A. N. Kolmogorov [41] απέδειξε το 1926 ότι υπάρχει* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει παντού.*

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν $t \in [-\pi, \pi]$, τότε υπάρχει $f \in C[-\pi, \pi]$ της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο σημείο t. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε μια ειδική περίπτωση του κλασσικού θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz, Θεώρημα 3.19. Δίνουμε και την απόδειξη η οποία είναι απλή.

Λήμμα 3.25 *Έστω η* $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής. Ορίζουμε τη*

$$G : C[a,b] \to \mathbb{C}, \quad \text{με } G(f) := \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt.$$

Τότε, η G είναι γραμμική και συνεχής, με

$$\|G\| = \int_a^b |g(t)|\, dt\,.$$

Απόδειξη. *Η G είναι γραμμική και συνεχής επειδή*

$$|G(t)| \le \|f\|_\infty \int_a^b |g(t)|\, dt\,.$$

Έχουμε

$$\|G\| \le \int_a^b |g(t)|\, dt\,.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |g(t)|\, dt &= \int_a^b |g(t)| \frac{1+n|g(t)|}{1+n|g(t)|}\, dt \\
&= \int_a^b |g(t)| \frac{1}{1+n|g(t)|}\, dt + \int_a^b \frac{ng(t)}{1+n|g(t)|}\overline{g(t)}\, dt \\
&\le \frac{b-a}{n} + G\left(\frac{ng}{1+n|g|}\right) \\
&\le \frac{b-a}{n} + \|G\| \left\|\frac{ng}{1+n|g|}\right\|_\infty \\
&\le \frac{b-a}{n} + \|G\|\ ,
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως,

$$\int_a^b |g(t)|\, dt \le \|G\|\ .$$

Άρα,

$$\|G\| = \int_a^b |g(t)|\, dt$$

■

Θεώρημα 3.26 *Αν $x \in C[-\pi,\pi]$, τότε υπάρχει $f \in C[-\pi,\pi]$ της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο x.*

Απόδειξη. *Το N-οστό μερικό άθροισμα της σειράς fourier της f στο x είναι :*

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\, e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x-t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε $x=0$. Το

$$D_N \in C[-\pi,\pi] \quad \textit{και} \quad D_N(-t) = D_N(t)\ , \quad N = 1,2,\ldots,\,.$$

Ορίζουμε τη

$$\Lambda_N : C\left[-\pi,\pi\right] \to \mathbb{R}\,,$$

με

$$\Lambda_N\left(f\right) := S_N\left(f\right)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right) D_N\left(t\right)\, dt\,, \quad N = 1,2,\ldots,\,.$$

Από το Λήμμα 3.25 η Λ_N είναι γραμμική και συνεχής, με

$$\left\|\Lambda_N\right\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_N\left(t\right)\right|\, dt = \left\|D_N\right\|_1\,.$$

Αν η σειρά Fourier κάθε συνάρτησης $f \in C\left[-\pi,\pi\right]$ συγκλίνει στο $x = 0$, τότε για κάθε $f \in C\left[-\pi,\pi\right]$

$$\sup_N \left|\Lambda_N\left(f\right)\right| < \infty\,.$$

Επομένως, από το Θεώρημα Banach-Steinhaus

$$\sup_N \left\|\Lambda_N\right\| < \infty\,.$$

Όμως, από το Λήμμα 3.23 είναι

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\Lambda_N\right\| = \lim_{N\to\infty}\left\|D_N\right\|_1 = \infty\,,$$

άτοπο. Επομένως, υπάρχει $f \in C\left[-\pi,\pi\right]$ της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο $x = 0$.

Πήραμε το $x = 0$ για ευκολία. Το αποτέλεσμα ισχύει και για κάθε άλλο x. ■

Σημείωση. Στην παράγραφο 3.5 θα δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο σημείο $x = 0$.

Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, το μη-συμμετρικό μερικό άθροισμα της σειράς fourier της F στο x είναι

$$S_{m,n}\left(f\right)(x) = \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}\left(k\right) e^{ikx}\,.$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε τα συμμετρικά μερικά αθροίσματα

$$S_n\left(f\right)(x) = S_{n,n}\left(f\right)(x)\,.$$

Θεώρημα 3.27 *Υποθέτουμε ότι η $f \in L_1\left(\mathbb{T}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε*

$$S_{m,n}\left(f\right)(x_0) = \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}\left(k\right) e^{ikx} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} f\left(x_0\right)\,.$$

Απόδειξη.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ και $f\left(0\right) = 0$. Επειδή $f\left(0\right) = 0$ και η $f'\left(0\right)$ υπάρχει, η συνάρτηση

$$g(x) := \frac{f\left(x\right)}{e^{ix} - 1}$$

είναι φραγμένη σε μία περιοχή του μηδενός και επομένως είναι ολοκληρώσιμη, επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη. Από την $f(x) = \left(e^{ix} - 1\right) \cdot g(x)$ προκύπτει ότι

$$\widehat{f}\,(k) = \widehat{g}\,(k-1) - \widehat{g}\,(k)\ , \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Επομένως

$$S_{m,n}(f)(0) = \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-m-1) - \widehat{g}(n)\ \ ,$$

και από το Λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε :

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n}(f)(0) = 0\ \ .$$

■

Παρατηρήσεις 3.4 1. Στο παραπάνω θεώρημα υποθέσαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Όμως, όπως προκύπτει από την απόδειξη, το θεώρημα ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η

$$\frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0}$$

είναι ολοκληρώσιμη σε μία περιοχή του x_0. Αυτό ισχύει αν για παράδειγμα η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz στο x_0, αν π.χ. οι πλευρικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο x_0.

2. Αποδείξαμε ότι τα μη-συμμετρικά μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f συγκλίνουν στο $f(x_0)$. Επομένως, οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, e^{inx_0} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}\,(-n)\, e^{-inx_0} \ \text{συγκλίνουν}.$$

Υπενθυμίζεται ότι αν η f είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2L$, τότε οι συντελεστές Fourier της f ως προς το τριγωνομετρικό σύστημα δίνονται από τον τύπο

$$\widehat{f}\,(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f\,(t)\, e^{-\frac{in\pi t}{L}}\, dt\,.$$

Η σειρά Fourier της f είναι

$$S\,(f)\,(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, e^{\frac{in\pi t}{L}}\,.$$

Έστω $f \in \mathbb{T}_{2L}$, δηλαδή η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $2L$-περιοδική συνάρτηση. Αν η f είναι απόλυτα συνεχής τότε η $f' \in L_1\left(\mathbb{T}_{2L}\right)$ και είναι

$$\widehat{f'}\,(n) = \frac{in\pi}{L}\widehat{f}\,(n)$$

(όπως και στην Προταση 3.5).

Η σειρά Fourier της f' είναι

$$S\,(f')\,(t) = S'\,(f)\,(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{in\pi}{L} \cdot \widehat{f}(n) \cdot e^{\frac{in\pi t}{L}}\ \ .$$

Από Θεώρημα Dirichlet-Jordan, αν η $f \in \mathbb{T}_{2L}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(t) = \frac{1}{2}\left[f\left(t^+\right) + f\left(t^-\right)\right], \quad \text{όπου } S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{\frac{in\pi t}{L}}.$$

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(t) = f(t)$$

ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Επίσης θα αποδείξουμε (Θεώρημα Fejér-Lebesgue) ότι αν η $f \in L_1(\mathbb{T})$ τότε

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(t) = f(t),$$

σχεδόν παντού, ενω αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής τότε

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(t) = f(t)$$

ομοιόμορφα, όπου

$$\sigma_N(f)(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(t)$$

είναι ο αριθμητικός μέσος των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της f. Επομένως, αν η σειρά Fourier μιας συνεχούς 2π-περιοδικής συνάρτησης f συγκλίνει στο t, τότε θα συγκλίνει στο $f(t)$.

3.4 Τριγωνομετρικές Σειρές - Σειρές Fourier

Έστω ότι μας δίνεται η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $x = x_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ συγκλίνει, δηλαδή η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{3.17}$$

συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως ορίζει μία περιοδική συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής επειδή από το M-κριτήριο του Weierstrass η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε κάθε όρο της σειράς χωριστά (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue). Επομένως, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)x}\,\mathrm{d}x = c_k.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.28 *Αν η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ συγκλίνει, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ είναι σειρά Fourier. Δηλαδή, υπάρχει $f \in L_1[0,2\pi]$ (μάλιστα η f είναι συνεχής), τέτοια ώστε $c_n = \widehat{f}(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Σε αντίθεση με ότι συμβαίνει με τη σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, *η τριγωνομετρική σειρά* $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *μπορεί να συγκλίνει απόλυτα σ' ένα σημείο* x_0, *δηλαδή η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0|$ *συγκλίνει, χωρίς όμως η σειρά να είναι σειρά Fourier. Μπορεί ακόμη η σειρά να συγκλίνει απόλυτα σε άπειρα το πλήθος σημεία και όμως η σειρά να μην είναι σειρά Fourier.*

Παράδειγμα 3.6 *Έστω η τριγωνομετρική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!x)$. *Αν το* x *είναι της μορφής* $x=2\pi p/q$, *όπου* p *και* q *είναι ακέραιοι,* $q>0$, *τότε όλοι οι όροι της σειράς μηδενίζονται για* $n\geq q$ *και επομένως η σειρά συγκλίνει απόλυτα γι' αυτά τα* x. *Η σειρά λοιπόν συγκλίνει απόλυτα σ' ένα σύνολο σημείων που είναι πυκνό στο* $\mathbb{R}$ *και έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Οι συντελεστές όμως αυτής της τριγωνομετρικής σειράς είναι:* $a_n=0$, *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$ *και*

$$b_n=\begin{cases}1 & \text{αν } n=k!\ ,\\ 0 & \text{αν } n\neq k!\ .\end{cases}$$

Επομένως, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$ *και από το λήμμα των Riemann-Lebesgue η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!x)$ *δεν είναι σειρά Fourier κάποιας* $f\in L_1[0,2\pi]$. *Όμως, όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο θεώρημα, η κατάσταση αλλάζει αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα σ' ένα υποσύνολο του* $[0,2\pi]$ *θετικού μέτρου.*

Θεώρημα 3.29 (Θεώρημα των Lusin-Denjoy) *Έστω* $E\subset[0,2\pi]$ *είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, τέτοιο ώστε* $m(E)>0$. *Υποθέτουμε ότι για κάθε* $x\in E$ *η τριγωνομετρική σειρά* $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *συγκλίνει απόλυτα. Τότε η σειρά* $\frac{1}{2}|a_0|+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ *συγκλίνει και επομένως η τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας* $f\in L_1[0,2\pi]$.

Απόδειξη. *Επειδή* $a_n=\Re a_n+\mathrm{i}\Im a_n$ *και* $b_n=\Re b_n+\mathrm{i}\Im b_n$, *χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $a_n,b_n\in\mathbb{R}$. *Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες,* $a_n=r_n\cos\theta_n$, $b_n=r_n\sin\theta_n$, *όπου* $r_n=\left(a_n^2+b_n^2\right)^{1/2}$ *και* $0\leq\theta_n<2\pi$, *είναι* $a_n\cos nx+b_n\sin nx=r_n\cos(nx-\theta_n)$ *και από την υπόθεση*

$$\phi(x):=\sum_{n=1}^{\infty}r_n|\cos(nx-\theta_n)|<\infty\,,\quad x\in E\,.$$

Αν $E_k:=\{x\in E:\phi(x)\leq k\}$, $k\in\mathbb{N}$, *τότε* $E=\cup_{k=1}^{\infty}E_k$. *Επειδή* $m(E)>0$, *υπάρχει* $k_0\in\mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $m(E_{k_0})>0$. *Επομένως*

$$\begin{aligned}k_0 m(E_{k_0})\geq\int_{E_{k_0}}\phi(x)\,dx&=\int_{E_{k_0}}\sum_{n=1}^{\infty}r_n|\cos(nx-\theta_n)|\,dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\int_{E_{k_0}}|\cos(nx-\theta_n)|\,dx\\&\geq\sum_{n=1}^{\infty}r_n\int_{E_{k_0}}\cos^2(nx-\theta_n)\,dx\,.\end{aligned}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το λήμμα των Riemann-Lebesgue, στο Παράδειγμα 3.4 έχουμε αποδείξει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_{k_0}}\cos^2(nx-\theta_n)\,dx=\frac{1}{2}m(E_{k_0})\,.$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ είναι

$$\int_{E_{k_0}} \cos^2(nx - \theta_n)\, dx \geq \frac{1}{4} m(E_{k_0}) \, .$$

Τότε όμως

$$k_0 m(E_{k_0}) \geq \sum_{n=N}^{\infty} r_n \int_{E_{k_0}} \cos^2(nx - \theta_n)\, dx \geq \sum_{n=N}^{\infty} r_n \frac{1}{4} m(E_{k_0}) \, .$$

Επειδή $m(E_{k_0}) > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} < \infty \, .$$

Άρα οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ συγκλίνουν και αυτό συνεπάγεται ότι η σειρά $\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ θα συγκλίνει. ■

Όπως έχουμε παρατηρήσει, κάθε τριγωνομετρική σειρά που συγκλίνει απόλυτα σε κάποια συνάρτηση f είναι η σειρά Fourier της f. Αντίστροφα, μία σειρά Fourier δεν συγκλίνει κατανάγκη απόλυτα ακόμη και στην περίπτωση που η σειρά συγκλίνει παντού. Έστω για παράδειγμα η σειρά Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx$ της $f(x) = (\pi - x)/2$, για $0 < x < 2\pi$.

Αν μία τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει, δεν συνεπάγεται ότι η σειρά είνα σειρά Fourier. Για παράδειγμα, όπως αποδεικνύεται στο Πόρισμα 4.17, η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} (\sin nx / \ln n)$ συγκλίνει και δεν είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $f \in L_1[0, 2\pi]$. Αν η τριγωνομετρική σειρά $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ είναι σειρά Fourier, από το λήμμα των Riemann-Lebesgue $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Τίθεται τώρα το ερώτημα:

Η σύγκλιση της σειράς $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$; O G. Cantor (1872) απέδειξε ότι αν η σειρά συγκλίνει για κάθε x σ᾽ ένα κλειστό διάστημα, τότε $a_n, b_n \to 0$, καθώς το $n \to \infty$. O Lebesgue γενίκευσε το αποτέλεσμα του Cantor στην περίπτωση που η σειρά συγκλίνει σε σύνολα θετικού μέτρου.

Θεώρημα 3.30 (Θεώρημα των Cantor-Lebesgue) *Έστω $E \subset [0, 2\pi]$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, τέτοιο ώστε $m(E) > 0$. Αν $\lim_{n\to\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$, για κάθε $x \in E$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Απόδειξη. *Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος των Lusin-Denjoy, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συντελεστές $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, η υπόθεσή μας είναι ότι*

$$\lim_{n\to\infty} r_n \cos(nx - \theta_n) = 0 \, , \quad \text{για κάθε}\, x \in E \, . \tag{3.18}$$

Αν λοιπόν αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} r_n \neq 0$. Τότε υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών τέτοια ώστε

$r_{k_n} > \delta > 0$. *Όμως από την (3.18) είναι* $\lim_{n\to\infty} r_{k_n}\cos(k_n x - \theta_{k_n}) = 0$, *για κάθε* $x \in E$ *και επειδή* $\delta\left|\cos(k_n x - \theta_{k_n})\right| < r_{k_n}\left|\cos(k_n x - \theta_{k_n})\right|$, *θα είναι* $\lim_{n\to\infty}\cos(k_n x - \theta_{k_n}) = 0$, *για κάθε* $x \in E$. *Επομένως,*

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2(k_n x - \theta_{k_n}) = 0\,, \quad \text{για κάθε}\, x \in E\,.$$

Τότε όμως από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και το Παράδειγμα 3.4 έχουμε

$$0 = \int_E \lim_{n\to\infty}\cos^2(k_n x - \theta_{k_n})\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_E \cos^2(k_n x - \theta_{k_n})\, dx = \frac{1}{2}m(E)\,.$$

Άτοπο, επειδή $m(E) > 0$. ■

3.5 Ανισότητα του Wirtinger–Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα

3.5.1 Ανισότητα του Wirtinger

Ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα το οποίο χρησιμοποιείται εκτενώς στην ανάλυση είναι η ανισότητα του Wirtinger, παραπέμπουμε στο [32, Chapter VII–7.7] και στο [7, Chapter 5–10].

Θεώρημα 3.31 (Ανισότητα του Wirtinger) *(1η διατύπωση)*
Έστω η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με* $f(a) = f(b)$. *Τότε*

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\, dx \tag{3.19}$$

και η σταθερά $(b-a)^2/\pi^2$ *είναι η βέλτιστη δυνατή.*

Απόδειξη. *Αρκεί να αποδείξουμε την* (3.19) *στην περίπτωση του διαστήματος* $[0,1/2]$. *Πράγματι, αν* $g(t) := f(a + 2(b-a)t)$ *τότε η* g *είναι συνεχής παραγωγίσιμη στο* $[0,1/2]\,, g(0) = g(1/2)$ *και επομένως έχουμε*

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|^2\, dx &= 2(b-a)\int_0^{1/2} |g(t)|^2\, dt \\
&\le \frac{2(b-a)}{4\pi^2}\int_0^{1/2} |g'(t)|^2\, dt \\
&= \frac{2(b-a)}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2 \cdot 2(b-a)\, dx \qquad (\text{αντικατάσταση } t = (x-a)/2(b-a)) \\
&= \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\, dx\,.
\end{aligned}$$

Έστω λοιπόν η $f : [0,1/2] \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με* $f(0) = f(1/2)$. *Επεκτείνουμε την* f *στο διάστημα* $[-1/2,0]$, *έτσι ώστε η* f *να είναι περιττή, περιοδική και κλάσης* C^1. *Η*

$$\{e_n\}\,, \quad \text{με } e_n = e^{2\pi i n x}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

είναι ορθοκανονική βάση του $L_2[-1/2,\, 1/2]$. *Επειδή η* f *είναι περιττή,*

$$\widehat{f}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx = 0\,.$$

Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} |f'(x)|^2 \, dx &= \sum_{n\neq 0} \left|\widehat{f'}(n)\right| \\
&= \sum_{n\neq 0} \left|2\pi i n \widehat{f}(n)\right|^2 \\
&= 4\pi^2 \sum_{n\neq 0} n^2 \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \\
&\geq 4\pi^2 \sum_{n\neq 0} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \\
&= 4\pi^2 \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|^2 \, dx \, .
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι επειδή η f είναι περιττή, τότε και η f' θα είναι περιττή συνάρτηση. Επομένως,

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{1/2} |f'(x)|^2 \, dx \, .$$

Τέλος παρατηρούμε ότι αν

$$f(x) = 2i \sin 2\pi x = e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x} \, ,$$

τότε

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{1/2} |f'(x)|^2 \, dx \, .$$

■

Θεώρημα 3.32 (Ανισότητα του Wirtinger) *(2η διατύπωση)*

Υποθέτουμε ότι η $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t) \, dt = 0 \, ,$$

τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 \, dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |u'(t)|^2 \, dt \, . \tag{3.20}$$

Η ισότητα ισχύει στην (3.20) αν και μόνο αν

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \, , \quad \text{όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. *Επειδή*

$$\widehat{u}(0) = 0 \quad \text{και} \quad \widehat{u'}(n) = in\widehat{u}(n) \, ,$$

από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 \, dt = \sum_{n\neq 0} |\widehat{u}(n)|^2$$

και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u'(t)\right|^2\,dt=\sum_{n\neq 0}n^2\left|\widehat{u}(n)\right|^2\,.$$

Επομένως,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(t)\right|^2\,dt\leq\int_{-\pi}^{\pi}\left|u'(t)\right|^2\,dt\,.$$

Η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\sum_{n\neq 0}\left|\widehat{u}(n)\right|^2=n^2\left|\widehat{u}(n)\right|^2\Leftrightarrow\sum_{n\neq 0}\left(n^2-1\right)\left|\widehat{u}(n)\right|^2=0\,,$$

δηλαδή αν $\widehat{u}(n)=0$, *για κάθε* $|n|\geq 2$.

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\widehat{u}(n)\,e^{int}=u(t)\;,$$

θα είναι

$$\begin{aligned}u(t)&=\widehat{u}(1)\,e^{it}+\widehat{u}(-1)\,e^{-it}\\&=\widehat{u}(1)\,e^{it}+\overline{\widehat{u}(1)\,e^{it}}\\&=2\Re\left(\widehat{u}(1)\,e^{it}\right)\\&=c_1\cos t+c_2\sin t\,,\quad \text{όπου }\; c_1,c_2\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

■

3.5.2 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Σχετικά με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα παραπέμπουμε στο άρθρο επισκόπησης του R. Osserman [59]. Το 1841 *ο Steiner με απλές γεωμετρικές μεθόδους απέδειξε το εξής :*

Θεώρημα 3.33 *Αν υπάρχει φραγμένο χωρίο D του επιπέδου του οποίου το εμβαδόν είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν κάθε άλλου χωρίου με την ίδια περίμετρο, τότε το D είναι δίσκος.*

Απόδειξη.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που το σύνορο του χωρίου είναι απλή, κλειστή και λεία καμπύλη.

1ος τρόπος. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Wirtinger. Έστω

$$\mathbf{r}(t)=(x(t)\,,\;y(t))\;,\quad t\in[0,2\pi]\;,$$

είναι μία διανυσματική παραμετρική εξίσωση της γ, *με* $t=(2\pi/L)\,S$, *όπου* L *είναι το μήκος της καμπύλης και είναι το μήκος τόξου της καμπύλης.*

Είναι

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2\pi} \quad .$$

Ως γνωστόν,

$$S\,(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'\,(\xi)\|\; d\xi = \int_0^t \left\{ \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 \right\}^{1/2} d\xi\,.$$

Επομένως,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}\,.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το κέντρο μάζας της γ *βρίσκεται στον άξονα των* x *και συνεπώς*

$$\int_\gamma y\,dS = 0\,.$$

Δηλαδή

$$\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0\,.$$

Ως γνωστόν, το εμβαδόν του χωρίου που έχει σύνορο τη γ *δίνεται από τους τύπους*

$$E = \oint_\gamma x\,dy = \oint_\gamma -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{L^2}{2\pi} - 2E &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + 2\oint_\gamma y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + 2\int_0^{2\pi} y(t)\,\frac{dx}{dt} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y(t)\right)^2 dt + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y(t)^2\right] dt\,.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Wirtinger έχουμε

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2E \geq \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y(t)\right)^2 dt\,.$$

Άρα,

$$E \leq \frac{L^2}{4\pi}\,.$$

Η ισότητα ισχύει, δηλαδή

$$E = \frac{L^2}{4\pi}\,,$$

αν και μόνο αν

$$\left\{\begin{aligned} y(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t \\ \frac{dx}{dt} + y(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t \\ \frac{dx}{dt} &= -c_1\cos t - c_2\sin t \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t \\ x(t) &= -c_1\cos t - c_2\sin t + c \end{aligned}\right\}.$$

Επομένως,

$$(x(t)-c)^2 + y(t)^2 = c_1^2 + c_2^2\,, \quad \text{όπου } c_1, c_2 \text{ και } c \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η καμπύλη γ είναι κύκλος. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι :

το εμβαδόν του χωρίου που έχει σύνορο τη γ είναι μέγιστο αν και μόνο αν η γ είναι κύκλος.

2ος τρόπος. Αν

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{και} \quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}\,,$$

τότε

$$\widehat{\dot{x}}(n) = in\widehat{x}(n) \quad \text{και} \quad \widehat{\dot{y}}(n) = in\widehat{y}(n)\,.$$

Από τον τύπο του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\dot{x}(t)|^2\, dt = \sum_{n\neq 0} (n\,|\widehat{x}(n)|)^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\dot{y}(t)|^2\, dt = \sum_{n\neq 0} (n\,|\widehat{y}(n)|)^2\,.$$

Επομένως,

$$\frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|\dot{x}(t)|^2 + |\dot{y}(t)|^2\right) dt = \sum_{n\neq 0} n^2 \left(|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2\right)\,. \tag{3.21}$$

Επειδή

$$E = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx\,,$$

από τον τύπο του Parseval έχουμε

$$\frac{E}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]\, dt = \sum_{n\neq 0} in\left(\overline{\widehat{x}(n)}\,\widehat{y}(n) - \widehat{x}(n)\,\overline{\widehat{y}(n)}\right)\,. \tag{3.22}$$

Από τις σχέσεις (3.21) *και* (3.22) *παίρνουμε*

$$\begin{aligned}\frac{L^2 - 4\pi E}{2\pi^2} &= \sum_{n\neq 0}\left[2n^2\left(|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2\right) + 2in\left(\widehat{x}(n)\,\overline{\widehat{y}(n)} - \overline{\widehat{x}(n)}\,\widehat{y}(n)\right)\right] \\ &= \sum_{n\neq 0}\left[|n\widehat{x}(n) - i\widehat{y}(n)|^2 + |n\widehat{y}(n) + i\widehat{x}(n)|^2 + \left(n^2-1\right)\left(|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2\right)\right]\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$L^2 \geq 4\pi E$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο όλες οι παρακάτω ισότητες ισχύουν για κάθε $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$:

(i) $n\widehat{x}(n) - i\widehat{y}(n) = 0$

(ii) $n\widehat{y}(n) + i\widehat{x}(n) = 0$

(iii) $\left(n^2-1\right)|\widehat{x}(n)| = 0$

(iv) $\left(n^2-1\right)|\widehat{y}(n)|=0.$

Από τις (iii) *και* (iv) *προκύπτει ότι*

$$\widehat{x}(n)=\widehat{y}(n)=0\,,\quad \text{για } n\neq 0,1,-1.$$

Άρα,

$$x(t)=\widehat{x}(-1)e^{-it}+\widehat{x}(0)+\widehat{x}(1)e^{it}\quad \text{και}\quad y(t)=\widehat{y}(-1)e^{-it}+\widehat{y}(0)+\widehat{y}(1)e^{it}\,.$$

Επειδή οι $x=x\left(t\right)$, $y=y\left(t\right)$ *είναι πραγματικές συναρτήσεις, τα* $x_0=\widehat{x}(0)\,,\, y_0=\widehat{y}(0)\in\mathbb{R}$.
Επειδή $\widehat{x}\left(-1\right)=\widehat{x}\left(1\right)$ *και* $\widehat{y}\left(-1\right)=\overline{\widehat{y}\left(1\right)}$, *από τη* (ii) *έχουμε*

$$\widehat{y}\left(-1\right)=\overline{\widehat{y}\left(1\right)}=i\,\overline{\widehat{x}(1)}\,.$$

Επομένως, αν θέσουμε $Re^{i\vartheta}=2\widehat{x}\left(1\right)$ *θα είναι*

$$\begin{aligned}
x\left(t\right)&=x_0+\widehat{x}\left(-1\right)e^{-it}+\widehat{x}\left(1\right)e^{it}\\
&=x_0+\overline{\widehat{x}\left(1\right)e^{it}}+\widehat{x}\left(1\right)e^{it}\\
&=x_0+2\Re\left(\widehat{x}\left(1\right)e^{it}\right)\\
&=x_0+\Re\left(Re^{i(t+\vartheta)}\right)\\
&=x_0+R\cos\left(t+\vartheta\right)
\end{aligned}$$

και παρόμοια

$$y\left(t\right)=y_0+R\sin\left(t+\vartheta\right)\,.$$

Τελικά έχουμε

$$\left(x\left(t\right),\ y\left(t\right)\right)=\left(x_0+R\cos\left(t+\vartheta\right),\ y_0+R\sin\left(t+\vartheta\right)\right)\,,\quad t\in\left[0,2\pi\right]\,.$$

Δηλαδή η γ *είναι κύκλος.* ■

3.6 Ομοιόμορφη προσέγγιση από τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Αν

$$S_n\left(f\right)\left(t\right)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}\left(k\right)e^{ikt}$$

είναι το n*-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της* $f\in L_1\left(\mathbb{T}\right)$, *τότε ορίζεται ο τελεστής*

$$S_n:L_1\left(\mathbb{T}\right)\to\mathcal{T}_n\,,$$

με

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikt},$$

όπου $\mathcal{T}_n$ *είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού* $\leq n$, *δηλαδή*

$$\mathcal{T}_n := \left\{ P : P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} \right\}.$$

Για τον τελεστή $S_n : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$ *(βλέπε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.26) είναι*

$$\|S_n\| = \|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

Το ίδιο ισχύει και για τον τελεστή $S_n : L_1(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$. *Πράγματι, επειδή για κάθε* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *είναι*

$$S_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, D_n(t-x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)\, D_n(x)\, dx,$$

από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ([61, 6.16 Theorem] ή [67, (10.44) Theorem]) έπεται ότι $\|S_n\| = \|D_n\|_1$.

Ορισμός 3.4 *Η n-οστή σταθερά του Lebesgue* L_n *ορίζεται ως εξής*

$$L_n := \|S_n\| = \|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι

$$L_n = \|S_n\| = o(\ln n).$$

Θεώρημα 3.34 *Αν* L_n *είναι η n-οστή σταθερά του Lebesgue, τότε*

$$\frac{4}{\pi^2} \ln n < L_n < \frac{4}{\pi^2} \ln n + 3 + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}. \tag{3.23}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{L_n}{\ln n} \right) = \frac{4}{\pi^2}.$$

Απόδειξη. *Ως γνωστόν*

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}} \\ &= \sin nt \cdot \cot \frac{t}{2} + \cos nt \\ &= 2\, \frac{\sin nt}{t} + \left(\cot \frac{t}{2} - \frac{2}{t} \right) \sin nt + \cos nt. \end{aligned}$$

Όμως για $0 < t \leq \pi$ *είναι*

$$-\frac{2}{\pi} \leq \cot \frac{t}{2} - \frac{2}{t} < 0.$$

Επομένως, για $0 < t \leq \pi$ *έχουμε*

$$|D_n(t)| \leq 2\,\frac{|\sin t|}{t} + \frac{2}{\pi} + 1\,.$$

Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι

$$L_n \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt + \frac{2}{\pi} + 1 = \frac{2}{\pi}I_n + \frac{2}{\pi} + 1\,, \tag{3.24}$$

όπου

$$I_n = \int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt = \int_0^{n\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,du\,.$$

Είναι

$$I_{k+1} - I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+k\pi} < \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin u\,du = \frac{2}{k\pi}\,,$$

οπότε

$$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(I_{k+1} - I_k) < \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\,. \tag{3.25}$$

Επομένως,

$$I_n < \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + I_1\,.$$

Επειδή

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1}\frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\,,$$

έχουμε :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1}\frac{1}{x}\,dx + 1 = \ln(n-1) + 1 < \ln n + 1\,.$$

Από την (3.25) *έπεται ότι* :

$$I_n < \frac{2}{\pi}(1 + \ln n) + I_1\,.$$

Επειδή

$$I_1 = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx < \int_0^{\pi}dx = \pi \quad ,$$

θα είναι :

$$I_n < \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln n + \pi\,.$$

Από την (3.24), *χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα έχουμε*

$$L_n < \frac{4}{\pi^2}\ln n + 3 + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\,.$$

Τέλος, από την απόδειξη του Λήμματος 3.23 είναι

$$L_n \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$$

και επειδή

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{2n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(2n+1) > \ln n\,,$$

έχουμε

$$L_n > \frac{4}{\pi^2} \ln n\,.$$

■

Υπενθυμίζεται ότι αν M *είναι ένας υπόχωρος του χώρου με νόρμα* E, *η γραμμική απεικόνιση* $P : E \to M$ *λέγεται προβολή του* E *επί του* M *αν η* P *είναι φραγμένη, επί και ισχύει* $P^2 = P$, *δηλαδή*

$$P(P(x)) = Px\,, \quad \text{για κάθε } x \in E.$$

Αν $x \in M$, *τότε* $Px = x$. *Πράγματι, αν* $Pz = x$ *όπου* $z \in E$ *τότε*

$$Px = P^2 z = Pz = x\,.$$

Μία συνεχής προβολή

$$P : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$$

λέγεται και τριγωνομετρικός πολυωνυμικός τελεστής βαθμού n. *Ένας τέτοιος τελεστής είναι το* S_n, *όπου* $S_n(f)$ *είναι το* n*-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της* f. *Θα αποδείξουμε ότι μεταξύ των τριγωνομετρικών πολυωνυμικών τελεστών βαθμού* n, *ο* S_n *έχει την μικρότερη νόρμα.*
Αν $f \in C(\mathbb{T})$ *τότε* $f_a(t) := t + a$. *Προφανώς*

$$\|f_a\|_\infty = \|f\|_\infty\,, \quad \text{και} \quad (f+g)_a = f_a + g_a\,.$$

Επίσης η f_a *είναι συνεχής συνάρτηση του* a. *Πράγματι,*

$$\|f_a - f_{a_0}\|_\infty \to 0 \quad \text{καθώς } a \to a_0\,.$$

Θεώρημα 3.35 *Αν η* $P_n : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$ *είναι μια συνεχής (φραγμένη) προβολή και* $f \in C(\mathbb{T})$, *τότε*

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(f_t)(x-t)\, dt\,. \tag{3.26}$$

Απόδειξη. *Έστω τα* t_0, x_0 *είναι σταθερά. Είναι*

$$\begin{aligned} |P_n(f_t)(x) - P_n(f_{t_0})(x_0)| &\leq |P_n(f_{t_0})(x) - P_n(f_{t_0})(x_0)| + |P_n(f_t)(x) - P_n(f_{t_0})(x)| \\ &\leq |P_n(f_{t_0})(x) - P_n(f_{t_0})(x_0)| + \|P_n\|\, \|f_t - f_{t_0}\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Επειδή η $P_n(f_{t_0})$ είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση $t \to f_t$ είναι συνεχής στο t_0, από την παραπάνω αανισότητα προκύπτει ότι η $g(t,x) := P_n(f_t)(x)$ είναι συνεχής στο (t_0, x_0). Επομένως, επειδή η $P_n(f_t)(x-t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του t, το ολοκλήρωμα (3.26) υπάρχει. Αν

$$A_n(f)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(f_t)(x-t)\, dt\,,$$

τότε

$$\begin{aligned}|A_n(f)(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(f_t)(x-t)|\, dt\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|P_n\|\,\|f_t\|_\infty\, dt\\ &= \|P_n\|\,\|f_t\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|A_n\| \le \|P_n\|\,. \tag{3.27}$$

Δηλαδή η A_n είναι γραμμική και συνεχής (φραγμένη) απεικόνιση.
Επειδή οι συναρτήσεις

$$f_k(x) = e^{ikx}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

είναι σύνολο πυκνό στο $C(\mathbb{T})$ και οι απεικονίσεις A_n, S_n είναι γραμμικές και συνεχείς, για να αποδείξουμε την (3.26) *αρκεί να δείξουμε ότι*

$$A_n(f_k) = S_n(f_k)\,, \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Έστω $|k| \le n$. Τότε $S_n(f_k) = f_k$ και επειδή $(f_k)_t \in \mathcal{T}_n$ θα είναι

$$P_n(f_k)_t = (f_k)_t\,.$$

Επομένως,

$$A_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_k)_t(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(x)\, dt = f_k(x)\,,$$

δηλαδή

$$S_n(f_k) = A_n(f_k)\,.$$

Αν $|k| > n$, τότε $S_n(f_k) = 0$. Επειδή $(f_k)_t = e^{ikt} f_k$, έχουμε

$$\begin{aligned}A_n(f_k)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n\left(e^{ikt} f_k\right)(x-t)\, dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} P_n(f_k)_t(x-t)\, dt\\ &= 0\,. && (\text{επειδή } P_n(f_k) \in \mathcal{T}_n)\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$S_n(f_k) = 0 = A_n(f_k) \ .$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι

$$A_n(f_k) = S_n(f_k) \ , \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z} \, .$$

Άρα, η (3.26) *ισχύει.* ∎

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.35 και την (3.27) *έχουμε :*

Θεώρημα 3.36 *Έστω η συνεχής προβολή* $P : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$. *Τότε* $\|P\| \geq \|S_n\|$. *Δηλαδή η* S_n *είναι μια ελάχιστη προβολή του χώρου των συνεχών και* 2π*-περιοδικών συναρτήσεων επί του χώρου των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού* $\leq n$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι αν $P_n : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$ *είναι συνεχείς προβολές,* $n = 1, 2, \ldots$, *τότε η ακολουθία* $(P_n(f))$ *δεν μπορεί να συγκλίνει σε όλο το* $C(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 3.37 *Αν οι προβολές* $P_n : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$ *είναι συνεχείς, τότε υπάρχει* $f \in C(\mathbb{T})$ *τέτοια ώστε η ακολουθία* $(P_n(f))$ *αποκλίνει (και δεν είναι φραγμένη).*

Απόδειξη. *Υποθέτουμε ότι η* $(P_n(f))$ *συγκλίνει για κάθε* $f \in C(\mathbb{T})$. *Τότε, για κάθε* $f \in C(\mathbb{T})$ *είναι*

$$\sup_n \|P_n(f)\|_\infty < \infty \, .$$

Επομένως, από το Θεώρημα Banach-Steinhaus έπεται ότι

$$\sup_n \|P_n\| < \infty \, .$$

Όμως από τα θεωρήματα 3.34 και 3.36 έχουμε

$$\|P_n\| \geq \|S_n\| > \frac{4}{\pi^2} \ln n$$

που είναι άτοπο. ∎

Πρόταση 3.38 *Αν η σειρά Fourier :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} \quad \text{της } \ f \in C(\mathbb{T})$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} \ .$$

Απόδειξη.

Έστω

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} \quad .$$

Επειδή η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, θα είναι $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$, *δηλαδή*

$$\left(\widehat{f-g}\right)(n) = 0 \ , \ \forall \, n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Επειδή η $f-g$ *είναι συνεχής συνάρτηση, θα είναι* $(f-g)(x) = 0$. *Άρα* $f(x) = g(x)$. ■

Παράδειγμα 3.7 *Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η* $\psi(x) = |\sin x|$.

Λύση. *Έστω*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \ ,$$

η σειρά Fourier της ψ. *Επειδή η* ψ *είναι άρτια συνάρτηση, είναι* $b_n = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Είναι*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

και

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) \ dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(n+1)\pi - 1}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2k+1 \ , \\ \frac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{αν } n = 2k \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως, η σειρά Fourier της ψ *είναι*

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \, .$$

Επειδή η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{συγκλίνει,}$$

η σειρά Fourier της ψ *συγκλίνει ομοιόμορφα και επομένως*

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \, . \tag{3.28}$$

■

Αν

$$S_n(\psi)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1},$$

τότε

$$S_n(\psi)(x) \in \mathcal{T}_n .$$

Πράγματι, αν ο n είναι άρτιος τότε το $S_n(\psi)(x)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n, ενώ αν ο n είναι περιττός το $S_n(\psi)(x)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Από την (3.28) *έχουμε*

$$||\sin x| - S_n(\psi)(x)| \le \frac{4}{\pi}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}, \quad \text{όπου } m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=m}^{N}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2N+1}\right)\\ &= \frac{1}{2(2m-1)},\end{aligned}$$

έχουμε

$$||\sin x| - S_n(\psi)(x)| \le \frac{2}{\pi}\frac{1}{2m-1} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2[n/2]+1}.$$

Όμως,

$$2\left[\frac{n}{2}\right] + 1 = \begin{cases} n, & \text{αν } n = 2k+1 \\ n+1, & \text{αν } n = 2k . \end{cases}$$

Άρα,

$$|\psi(x) - S_n(\psi)(x)| = ||\sin x| - S_n(\psi)(x)| \le \frac{2}{\pi n}. \tag{3.29}$$

Ορισμός 3.5 *Υποθέτουμε ότι $f \in C(K)$ και*

$$\|f - v^*\|_\infty \le \|f - v\|_\infty, \quad \forall v \in V,$$

όπου V είναι υπόχωρος του $C(K)$ πεπερασμένης διάστασης. Θα λέμε ότι το v^* είναι μια βέλτιστη προσέγγιση της f από το V. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$E_V(f) := \|f - v^*\|_\infty = \inf_{v\in V}\|f - v\|_\infty .$$

Επειδή ο χώρος $\mathcal{T}_n$ είναι υπόχωρος του $C(\mathbb{T})$, από την (3.29) έχουμε ότι

$$E_{\mathcal{T}_n}(\psi) \leq \frac{2}{\pi n}\,. \tag{3.30}$$

Επειδή

$$\cos mx = \sum_{k=0}^{[m/2]} \left((-1)^k \sum_{j=k}^{[m/2]} \binom{m}{2j} \binom{j}{k} \right) \cos^{m-2k} x\,,$$

το

$$S_n(\psi)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\,,$$

γράφεται στην μορφή

$$S_n(\psi)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x\,.$$

Από την ανισότητα (3.29) έχουμε

$$\left| \sqrt{1-\cos^2 x} - \sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x \right| \leq \frac{2}{\pi n}\,.$$

Επομένως, αν

$$\sigma(x) = \sqrt{1-x^2}\,, \quad -1 \leq x \leq 1\,,$$

είναι

$$\left| \sqrt{1-x^2} - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right| \leq \frac{2}{\pi n}$$

και

$$E_{\mathcal{P}_n}(\sigma) \leq \frac{2}{\pi n}$$

όπου $\mathcal{P}_n$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$. Επειδή

$$\begin{aligned} S_n(\psi)\left(y+\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos(2ky+k\pi)}{4k^2-1} \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\cos 2ky}{4k^2-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k y\,, \end{aligned}$$

από την (3.29) για $x = y + \pi/2$ προκύπτει ότι

$$\left| |\cos y| - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k y \right| \leq \frac{2}{\pi n}\,.$$

Ισοδύναμα, αν $x \in [-1, 1]$, τότε

$$\left| |x| - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leq \frac{2}{\pi n}\,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.39 *Η βέλτιστη προσέγγιση $E_{\mathcal{P}_n}(|x|)$ της συνάρτησης $f(x) = |x|$ στο διάστημα $[-1,1]$ με πολυώνυμα βαθμού $\leq n$ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$E_{\mathcal{P}_n}(|x|) \leq \frac{2}{\pi n}.$$

Παρατήρηση 3.9 *Στο Παράδειγμα 3.7 υπολογίσαμε το ανάπτυγμα Fourier της ψ και μετά, αποδεικνύοντας ότι η σειρά Fourier της ψ συγκλίνει ομοιόμορφα, εφαρμόσαμε την Πρόταση 3.38. Σε πολλλές περιπτώσεις η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς Fourier μιας συνάρτησης προκύπτει από τις ιδιότητες της συνάρτησης.*

Θεώρημα 3.40 *Υποθέτουμε ότι $f \in C(\mathbb{T})$ και η $f' \in Lip_\alpha$ (η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz τάξης α, $0 < \alpha \leq 1$), δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|f'(x) - f'(y)| \leq M\,|x-y|^\alpha .$$

Τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Απόδειξη. *Είναι*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{in}\widehat{f'}(n) \\
&= \frac{1}{2\pi i n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi i n}\int_{-\pi-\pi/n}^{\pi-\pi/n} f'\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-inx-i\pi}\, dx && (\text{αντικατάσταση } t = x+\pi/n) \\
&= -\frac{1}{2\pi i n}\int_{-\pi-\pi/n}^{\pi-\pi/n} f'\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}\, dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i n}\int_{-\pi}^{\pi} f'\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}\, dx ,
\end{aligned}$$

οπότε

$$2in\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f'(x) - f'\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right) e^{-inx}\, dx .$$

Επομένως,

$$2\,|n|\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f'(x) - f'\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right| dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\left|\frac{\pi}{n}\right|^\alpha dx = M\frac{\pi^\alpha}{|n|^\alpha}$$

και κατά συνέπεια

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{M}{2}\cdot\frac{\pi^\alpha}{|n|^{1+\alpha}}, \quad n \neq 0 .$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\, e^{inx}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \left|\widehat{f}(0)\right| + M\pi^\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}} .$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{1+\alpha}\right)$ *συγκλίνει, η σειρά Fourier* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\,e^{inx}$ *θα συγκλίνει ομοιόμορφα και*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\,e^{inx}\,.$$

■

Το παρακάτω θεώρημα αποδεικνύει ότι η προσέγγιση μιας συνάρτησης $f\in C(\mathbb{T})$ *από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της* f *είναι λίγο "χειρότερη" από την βέλτιστη προσέγγιση*

$$E_{\mathcal{T}_n}(f)=\min_{T_n\in\mathcal{T}_n}\|f-T_n\|_{\infty}\,.$$

Θεώρημα 3.41 (Lebesgue) *Αν* $f\in C(\mathbb{T})$*, τότε υπάρχει* $M>0$ *τέτοιο ώστε*

$$\|S_n(f)-f\|_{\infty}\leq ME_{\mathcal{T}_n}(f)\cdot\ln n\,.$$

Απόδειξη. *Έστω* $T_n\in\mathcal{T}_n$ *τέτοιο ώστε*

$$\|f-T_n\|_{\infty}=E_{\mathcal{T}_n}(f)\,.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\|S_n(f)-f\|_{\infty}&=\|(f-T_n)-S_n(f-T_n)\|_{\infty}\\&\leq\|f-T_n\|_{\infty}+\|S_n(f-T_n)\|_{\infty}\\&\leq\|f-T_n\|_{\infty}+\|S_n\|\,\|f-T_n\|_{\infty}\\&=\|f-T_n\|_{\infty}(1+\|S_n\|)\\&=E_{\mathcal{T}_n}(f)(1+\|S_n\|)\,.\end{aligned}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει από την ανισότητα (3.23) *του Θεωρήματος 3.34.* ■

Στο Θεώρημα 3.27 αποδείξαμε ότι υπάρχει $f\in C(\mathbb{T})$ *η οποία δεν αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης το οποίο οφείλεται στον Fejér. Χρειαζόμαστε τις παρακάτω βοηθητικές προτάσεις.*

Λήμμα 3.42 *Για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *και για κάθε* $n\in\mathbb{N}$ *είναι*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leq 2\sqrt{\pi}\,. \tag{3.31}$$

Απόδειξη. *Έστω* $0<x<\pi$ *και έστω* m *ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε*

$$m\leq\frac{\sqrt{\pi}}{x}<m+1\,.$$

Τότε

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| . \tag{3.32}$$

(Στο δεξιό μέλος της παραπάνω ανισότητας το πρώτο άθροισμα μηδενίζεται για $m = 0$ *και το δεύτερο για* $m \ge n$*).*

Επειδή ως γνωστόν $|\sin a| \le |a|$, *έχουμε*

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin kx}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{m}\frac{kx}{k} = mx \le \sqrt{\pi} . \tag{3.33}$$

Είναι

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|\frac{e^{i(n+1)x} - e^{i(m+1)x}}{e^{ix}-1}\right| \le \frac{2}{|e^{ix}-1|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} ,$$

οπότε

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\sin kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} .$$

Αν

$$S_k = \sum_{j=m+1}^{k}\sin jx ,$$

τότε

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = S_{m+1}\cdot\frac{1}{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n}\frac{1}{k}\left(S_k - S_{k-1}\right) = \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}\cdot S_k - \sum_{k=m+2}^{n}\frac{1}{k}\cdot S_{k-1} \quad ,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=m+1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + S_n\cdot\frac{1}{n} .$$

Επομένως,

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{(m+1)\left|\sin\frac{x}{2}\right|} .$$

Όμως για $0 < x < \pi$ *έχουμε*

$$\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi} \quad \textit{και} \quad m+1 > \frac{\sqrt{\pi}}{x} .$$

Συνεπώς :

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \le \frac{1}{(x/\pi)\left(\sqrt{\pi}/x\right)} = \sqrt{\pi} \quad . \tag{3.34}$$

Από τη (3.32), *χρησιμοποιώντας τις* (3.33) *και* (3.34), *προκύπτει η απόδειξη της* (3.31) *για* $0 < x < \pi$.

Επειδή η συνάρτηση

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|$$

είναι άρτια, η (3.31) *ισχύει για* $-\pi \leq x \leq \pi$ (*η απόδειξη για* $x = 0$, $x = \pm\pi$ *είναι προφανής*). *Λόγω της* 2π-*περιοδικότητας του αθροίσματος* :

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \,,$$

η (3.31) *ισχύει για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. ■

Λήμμα 3.43 *Αν*

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1-k)x}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1+k)x}{k} \\ &= \left[\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos nx}{1}\right] - \left[\frac{\cos(n+2)x}{1} + \frac{\cos(n+3)x}{2} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)x}{n}\right] \,, \end{aligned} \tag{3.35}$$

τότε

$$|\varphi_n(x)| \leq 4\sqrt{\pi} \,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

Απόδειξη. *Είναι*

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left[\cos(n+1-k)x - \cos(n+1+k)x\right] = 2\sin(n+1)x \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \,.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.42 έχουμε

$$|\varphi_n(x)| = 2\,|\sin(n+1)x| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq 4\sqrt{\pi} \,.$$

■

Παράδειγμα 3.8 *Επειδή η συνάρτηση* φ_n *του Λήμματος 3.43 είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο, ο τύπος* (3.35) *είναι ταυτόχρονα και το ανάπτυγμα της* φ_n *σε σειρά Fourier. Το* m-*οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της* φ_n *είναι*

$$S_m(\varphi_n)(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos mx}{n+1-m} & \text{αν } 1 \leq m \leq n \,, \\ \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos nx}{1} & \text{αν } m = n+1 \,, \\ \left[\frac{\cos x}{n} + \cdots + \frac{\cos nx}{1}\right] - \left[\frac{\cos(n+2)x}{1} + \cdots + \frac{\cos mx}{m-n-1}\right] & \text{αν } n+2 \leq m \leq 2n+1 \,, \\ \left[\frac{\cos x}{n} + \cdots + \frac{\cos nx}{1}\right] - \left[\frac{\cos(n+2)x}{1} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)x}{n}\right] & \text{αν } m \geq 2n+1 \,. \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ *είναι*

$$S_m(\varphi_n)(0) \geq 0 \,.$$

Ορίζουμε την 2π-*περιοδική, συνεχή συνάρτηση* f *ως εξής*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{2^{n^3}}(x) \,.$$

Σημειώνεται ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα. Είναι

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx\,, \quad \text{όπου} \quad a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx\,.$$

Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{2^{n^3}}(x) \right) \cos kx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2^{n^3}}(x) \cos kx \, dx\,,$$

δηλαδή

$$a_k(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a_k\left(\varphi_{2^{n^3}}\right)\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} S_m(f)(x) &= \sum_{k=1}^{m} a_k(f) \cos kx \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a_k\left(\varphi_{2^{n^3}}\right) \right) \cos kx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k\left(\varphi_{2^{n^3}}\right) \cos kx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot S_m\left(\varphi_{2^{n^3}}\right)(x)\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$S_m(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot S_m\left(\varphi_{2^{n^3}}\right)(x)\,. \tag{3.36}$$

Επειδή $S_m(\varphi_n)(0) \geq 0$, *από την* (3.36) *έχουμε*

$$S_m(f)(0) \geq \frac{1}{n^2} \cdot S_m\left(\varphi_{2^{n^3}}\right)(0)\,. \tag{3.37}$$

Είναι

$$S_m(\varphi_n)(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos nx}{1}\,,$$

οπότε

$$S_{2^{n^3}}\left(\varphi_{2^{n^3}}\right)(0) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n^3}}\,.$$

Επειδή

$$\frac{1}{k} > \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x} \, dx\,,$$

θα είναι

$$S_{2^{n^3}}\left(\varphi_{2^{n^3}}\right)(0) > \int_{1}^{2^{n^3}+1} \frac{1}{x} \, dx = \ln\left(2^{n^3}+1\right) > n^3 \ln 2\,.$$

Λόγω της παραπάνω ανισότητας, από την (3.37) *προκύπτει ότι*

$$S_{2^{n^3}}(f)(0) > n \ln 2\,.$$

Άρα, η σειρά Fourier της f *αποκλίνει στο σημείο* $x = 0$.

3.7 Ασκήσεις

1. *Έστω* $u_n \in L_2(\mathbb{T})$ *με* $u_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbb{N}$. *Να αποδειχθεί ότι*

   (α΄) Το σύνολο $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι κλειστό και φραγμένο, όμως δεν είναι συμπαγές.*

   (β΄) $\lim_{n\to\infty}\langle f, u_n\rangle = 0\,, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$.

2. *Έστω η* f *είναι απόλυτα συνεχής στο* $\mathbb{T}$ *και η* $f' \in L_2(\mathbb{T})$. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \|f\|_1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_2\,.$$

   Υπόδειξη. Είναι $\sum_{n\neq 0}\left|n\widehat{f}(n)\right|^2 = \|f'\|_2^2$. *Ως γνωστόν,* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right) = \pi^2/6$.

3. *Υποθέτουμε ότι* $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$, $c_n \leq A/n$, *όπου* $A > 0$ *και* $n = 1, 2, \ldots$. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$ *συγκλίνει (κριτήριο Dirichlet για σειρές). Έστω*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx\,.$$

   Να αποδειχθεί ότι η $f \in L_1(\mathbb{T})$ *και ότι* $c_n = \widehat{f}(n)$. *Δηλαδή,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}(n)\sin nx\,.$$

   Υπόδειξη. Από το Λήμμα 3.42 είναι $\left|\sum_{n=1}^{N} c_n \sin nx\right| \leq 2A\sqrt{\pi}$.

4. *Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων* $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ *ορίζεται ως εξής:*

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta\,.$$

   Αν η $f \in L_2(\mathbb{T})$ *είναι τέτοια ώστε* $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, *να αποδειχθεί ότι ο υπόχωρος* $\{f * h : h \in L_2(\mathbb{T})\}$ *είναι πυκνός στον* $L_2(\mathbb{T})$.

5. *Αν* $f \in L_2(\mathbb{T})$, *ορίζουμε τη συνάρτηση* f_h *με* $f_h(x) := f(x-h)$, $h \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Αν $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)\, e^{inx}$ *είναι η σειρά Fourier της* f, *να αποδειχθεί ότι*

$$\|f_h - f\|_2 = 2\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sin^2\left(\frac{nh}{2}\right)\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{1/2}.$$

   (β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\liminf_{h\to 0}\frac{\|f_h - f\|_2}{|h|} > 0\,,$$

   εκτός εάν η f *είναι σταθερά σχεδόν παντού.*

6. *Έστω η συνάρτηση* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(ή* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) είναι Lebesgue μετρήσιμη, φραγμένη και περιοδική με περίοδο* $T > 0$ *και έστω* $f \in L_1(a,b)$*. Να αποδειχθεί ότι*
$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)\, dx + \varepsilon\,, \quad \textit{με } \varepsilon < T\,\|f\|_\infty . \tag{3.38}$$
Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την (3.38) *να αποδειχθεί το λήμμα Fejér.*

7. *(α΄) Αν το σύνολο* $E \subset [0,2\pi]$ *είναι μετρήσιμο, να αποδειχθεί ότι*
$$\lim_{n\to\infty}\int_E \cos nx\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_E \sin nx\, dx\,.$$
(β΄) Έστω $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ *γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο*
$$E = \{x \in [0,2\pi] : \textit{ η ακολουθία } (\sin(k_n x)) \textit{ συγκλίνει}\}\,.$$
Αν $m(E)$ *είναι το μέτρο Lebesgue του* E*, να αποδειχθεί ότι* $m(E) = 0$*.*
Υπόδειξη. Επειδή $\lim_{n\to\infty}\int_E \cos(2k_n x)\ \mathrm{d}x = 0$*, όπου* E *μετρήσιμο υποσύνολο του* $[0,2\pi]$*, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα* $1 - 2\sin^2(k_n x) = \cos(2k_n x)$*, να αποδειχθεί ότι* $\lim_{n\to\infty}\sin(k_n x) = \pm 1/\sqrt{2}$ *σχεδόν παντού στο* E*.*

8. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο* 1*, δηλαδή για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *είναι* $f(x+1) = f(x)$*. Αν ο* α *είναι άρρητος αριθμός, να αποδειχθεί ότι*
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$
Υπόδειξη. Πρώτα αποδείξτε το ζητούμενο στην περίπτωση που το $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2ik\pi x}$*,* $k \in \mathbb{Z}$*, είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο.*

9. *Έστω* E *είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του* $[0,2\pi]$ *και* $m \in \mathbb{N}$*. Αν* (k_n) *είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και* (a_n) *είναι μία οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία, να αποδειχθεί η ταυτότητα*
$$\cos^{2m} t = 2^{-2m}\binom{2m}{m} + 2^{1-2m}\sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{m-k}\cos 2kt$$
και να υπολογιστεί το $\lim_{n\to\infty}\int_E \cos^{2m}(k_n x + a_n)\, dx$*.*

10. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε* $\phi(0) = 1$ *και* $\varphi, \varphi' \in L_1[0,\infty)$*. Αν* $a > 0$*, να αποδειχθεί ότι*
$$\int_0^\infty \varphi(ax)\sin x\, \mathrm{d}x = 1 + \int_0^\infty \varphi'(t)\cos(t/a)\ \mathrm{d}t\,.$$
Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \varphi(ax)\sin x\, \mathrm{d}x$*.*
Υπόδειξη. Το $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 1 + \lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = 1 + \int_0^\infty \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$ *υπάρχει. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_0^\infty \varphi(x)\ \mathrm{d}x$ *συγκλίνει, θα είναι* $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$*.*

11. (α′) *Αν* $k \in \mathbb{N}$, *να αποδειχθεί ότι*

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos kt \, dt = \frac{1}{k^2} \, .$$

(β′) *Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kt}\right) = \frac{\cos\left[(n+1)\,t/2\right] \cdot \sin\left(nt/2\right)}{\sin\left(t/2\right)} \, , \quad t \neq 0 \, ,$$

να αποδειχθεί ότι

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} f\left(t\right) \sin\left(n + 1/2\right) t \, dt + \frac{\pi^2}{3} \, ,$$

όπου

$$f\left(t\right) = \begin{cases} \frac{t^2 - 2\pi t}{2\pi \sin(t/2)} & \text{αν } 0 < t \leq \pi \ , \\ -2 & \text{αν } t = 0 \ . \end{cases}$$

(γ′) *Να αποδειχθεί ότι* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

12. *Υποθέτουμε ότι το* $E \subset [0, 2\pi]$ *είναι μετρήσιμο σύνολο και ότι* $\int_E x^n \cos x \, dx = 0$, *για* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. *Αν* $m\left(E\right)$ *είναι το μέτρο Lebesgue του* E, *να αποδειχθεί ότι* $m\left(E\right) = 0$.

13. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f \in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ *είναι τέτοια ώστε*

$$f\left(x\right) = f\left(x + 1\right) = f\left(x + \sqrt{2}\right) \, , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι η f *είναι σταθερή σχεδόν παντού.*

Υπόδειξη. *Να αποδειχθεί ότι* $\widehat{f}\left(n\right) = e^{2\pi i n\sqrt{2}} \cdot \widehat{f}\left(n\right)$.

14. *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, *τέτοια ώστε*

$$\int_0^1 x f\left(x\right) \, \mathrm{d}x = 1 \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^n f\left(x\right) \, dx = 0$$

για $n = 0, 2, 3, 4 \ldots$;

Υπόδειξη. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $\widehat{f}\left(n\right) = \int_0^1 f\left(x\right) e^{-2\pi i n x} \, dx = -2\pi n i$.

15. *Έστω η αναλυτική συνάρτηση* $f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$, $z \in D\left(z_0, R\right) \subset \mathbb{C}$.

(α′) *Για τη συνάρτηση* $F_r \in L_2\left(\mathbb{T}\right)$, *με*

$$F_r\left(t\right) := f\left(z_0 + re^{it}\right) \, , \quad 0 < r < R \, ,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\widehat{F_r}\left(n\right) = \begin{cases} c_n r^n & \text{αν } n \geq 0 \ , \\ 0 & \text{αν } n < 0 \ . \end{cases}$$

(β′) *Να αποδειχθεί ότι* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \|F_r\|_2^2$.

16. *Έστω* $f : G \to \mathbb{C}$ *μια μη-σταθερή αναλυτική συνάρτηση, όπου* G *είναι ένας τόπος του* $\mathbb{C}$. *Υποθέτουμε ότι η* $|f|$ *έχει τοπικό μέγιστο στο* $z_0 \in G$, *δηλαδή υπάρχει* $R > 0$ *τέτοιο ώστε* $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, *για κάθε* $z \in D(z_0, R)$. *Αν* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, *χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση να συμπεράνετε ότι* $f(z) = c_0 = f(z_0)$, *για κάθε* $z \in G$, *που είναι άτοπο.*

   Δηλαδή η f *δεν μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο (αρχή μεγίστου για αναλυτικές συναρτήσεις).*

17. *Αν* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *και* $g(t) := f(mt)$, *για κάποιο* $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *να αποδειχθεί ότι*

$$\widehat{g}(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν το } m \text{ δεν διαιρεί το } n\ , \\ \widehat{f}\left(\frac{n}{m}\right) & \text{αν το } m \text{ διαιρεί το } n\ . \end{cases}$$

   Χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι η $f \in L_1(\mathbb{T})$ *προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Δηλαδή, για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ *τέτοιο ώστε* $\|f - P\|_1 < \epsilon$.

18. *Έστω τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα* $f(t) = \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{-ijt}$ *και* $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{-ikt}$.

   (α′) *Αν* $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$, *να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \varphi(t) e^{-it}\, dt = \sum_{j,\,k=-N}^{N} a_j b_k \widehat{\varphi}(j+k+1)\,.$$

   (β′) *Αν* $\varphi(t) = t - \pi$, *να αποδειχθεί ότι*

$$\widehat{\varphi}(0) = 0 \quad \text{και} \quad \widehat{\varphi}(n) = \frac{i}{n}\,,\ n \neq 0\,.$$

   (γ′) *Αν για* $j, k < 0$ *είναι* $a_j, b_k = 0$, *χρησιμοποιώντας την (α′) με* $\varphi(t) = t - \pi$ *να αποδειχθεί ότι*

$$\left| \sum_{j,\,k=0}^{N} \frac{a_j b_k}{j+k+1} \right| \leq \pi \left(\sum_{j=0}^{N} |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{N} |b_k|^2 \right)^{1/2}\,.$$

   Αν $a = (a_j) \in \ell_2$ *και* $b = (b_k) \in \ell_2$, *τότε*

$$\left| \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \frac{a_j b_k}{j+k+1} \right| \leq \pi \|a\|_2 \|b\|_2\ .$$

   Η παραπάνω ανισότητα είναι η κλασσική ανισότητα του Hilbert.

19. (α′) *Είναι το* $\operatorname{span}\left\{1, x^2, x^4, x^8, x^{16}, \ldots\right\}$ *πυκνό στον* $C[0,1]$;

   (β′) *Αν* p_n *είναι ο* n*-οστός πρώτος αριθμός, είναι το* $\operatorname{span}\{1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_n} \ldots\}$, *πυκνό στον* $C[0,1]$;

   Ως γνωστόν, από το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{p_n} = 1\,.$$

   Υπόδειξη. Θεωρήματα Müntz.

20. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *είναι περιττή, οπότε*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) f(x)\, dx \,.$$

Εφαρμογή. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

Υπόδειξη. *Είναι*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n} = \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}\right) f(x)\, dx \,.$$

Χρησιμοποιείστε το Λήμμα (3.42) *και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.*

21. *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \,.$$

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n/n)$ *συγκλίνει και ότι*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} &= \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \frac{f(x) + f(-x)}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx \,. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4

Σημειακή Σύγκλιση Σειρών Fourier

4.1 Αθροιστικοί πυρήνες Dirichlet, Fejér και Poisson

Ορισμός 4.1 *Ένας αθροιστικός πυρήνας (summability kernel) είναι μια ακολουθία (k_n) συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων που έχουν τις παρακάτω ιδιότητες*

(α)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)dt = 1\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(β) Υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)|dt \leq M \quad .$$

(γ) Για όλα τα δ, $0 < \delta < \pi$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\, dt = 0\,.$$

Αν επιπλέον είναι $k_n(t) \geq 0$ για όλα τα t και όλα τα n, τότε έχουμε ένα θετικό αθροιστικό πυρήνα. Είναι προφανές ότι σ' αυτή την περίπτωση η ιδιότητα (β) είναι περιττή.

Παρατηρήσεις 4.1 *(i) Εύκολα φαίνεται ότι η ιδιότητα (γ) είναι ισοδύναμη με την παρακάτω ιδιότητα*

(γ′) Για όλα τα δ, $0 < \delta < \pi$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|t|>\delta} |k_n(t)|\, dt = 0\,.$$

(ii) Στη βιβλιογραφία αντί της (γ) χρησιμοποιείται η εξής συνθήκη :

για κάθε δ, $0 < \delta < \pi$, η ακολουθία (k_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$. Δηλαδή,

$$\max\{k_n(x) : \delta \leq x \leq 2\pi - \delta\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Προφανώς η παραπάνω συνθήκη είναι ισχυρότερη της (γ).

(iii) *Μερικές φορές αντί της* (k_n) *έχουμε μια οικογένεια* $\{k_r\}$ *που εξαρτάται από μία συνεχή παράμετρο* r *και όχι από το* $n \in \mathbb{Z}$. *Για παράδειγμα, ο πυρήνας του Poisson* P_r *ορίζεται για* $0 \le r < 1$ *και στη (γ) το "* $\lim_{n\to\infty}$ *" αντικαθίσταται από το "* $\lim_{r\to 1}$ *".*

Ορισμός 4.2 *(α΄) Έστω* $n \in \mathbb{N}$. *Ορίζουμε τις συναρτησεές* D_n *και* K_n *στο* $\mathbb{R}$ *ως εξής*

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \quad \textit{και} \quad K_n(t) := \sum_{k=0}^{n} D_k(t)\,.$$

Ο πυρήνας Dirichlet είναι η ακολουθία (D_n) *και ο πυρήνας Fejér είναι η ακολουθία* (K_n).

(β΄) Για $0 \le r < 1$, *η συνάρτηση* P_r *ορίζεται ως εξής*

$$P_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt\,.$$

Η οικογένεια $\{P_r\}, 0 \le r < 1$, *λέγεται πυρήνας Poisson.*

Λήμμα 4.1 *(α΄)*

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \textit{αν } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \textit{αν } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(β΄)

$$K_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right]^2 & \textit{αν } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ n+1 & \textit{αν } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(γ΄)

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\,.$$

Απόδειξη.

(α΄) Η απόδειξη προκύπτει από την ταυτότητα

$$D_n(t) = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it}-1} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}\,.$$

(β΄) Είναι

$$(n+1)K_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-k}^{k} e^{ijt} = \sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=|j|}^{n} e^{ijt} = \sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|)\, e^{ijt}\,,$$

οπότε

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}\,.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cdot K_n(t) &= \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\cos(kt)-\cos(k+1)t\right]\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left[1-\cos(n+1)t\right]\\
&= \frac{1}{n+1}\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right).
\end{aligned}$$

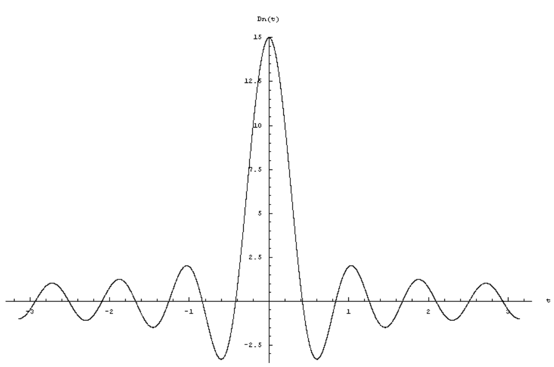
(γ′) *Είναι*

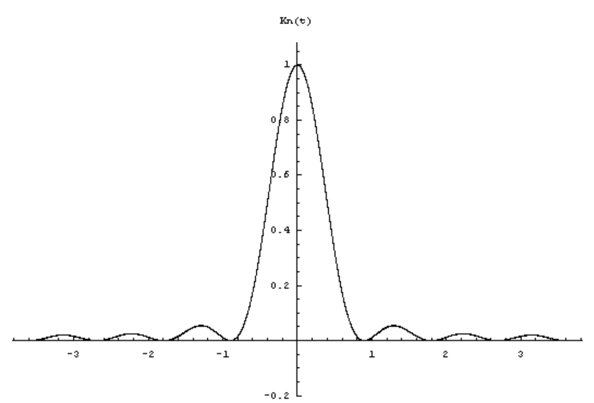
$$\sum_{k=-n}^{n} r^{|k|}e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} r^k e^{-ikt}$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} = \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

■





Λήμμα 4.2 *Για τον πυρήνα Fejér* (K_n) *και τον πυρήνα Poisson* $\{P_r\}, 0 \le r < 1$, *ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :*

(i) $\quad \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 1.$

(ii) $\quad K_n(t) = K_n(-t)$ *και* $P_r(t) = P_r(-t)$.

(iii) $\quad 0 \le K_n(t) \le n+1$ *και* $\dfrac{1-r}{1+r} \le P_r(t) \le \dfrac{1+r}{1-r}.$

(iv) $\quad 0 \le K_n(t) \le \dfrac{1}{(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \le \dfrac{\pi^2}{(n+1)\,t^2}, \quad 0 < |t| \le \pi.$

Απόδειξη.

(i)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = 1\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα για* $t \in [-\pi,\pi]$, *έχουμε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = 1\,.$$

(ii) *Είναι προφανές.*

(iii) *Επειδή* $|D_k(t)| \le 2k+1$, *έχουμε*

$$|K_n(t)| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|D_k(t)| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = n+1\,.$$

Είναι προφανές ότι

$$\frac{1-r}{1+r} \le P_r(t) \le \frac{1+r}{1-r}\,.$$

(iv) *Η απόδειξη προκύπτει από τη γνωστή ανισότητα*

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \ge \frac{t}{\pi}, \quad \text{για } 0 \le t \le \pi.$$

■

Πρόταση 4.3 *Οι πυρήνες Fejér και Poisson είναι θετικοί αθροιστικοί πυρήνες. Ο πυρήνας Dirichlet δεν είναι αθροιστικός πυρήνας.*

Απόδειξη. *Αρκεί να αποδείξουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(t)\,dt = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{r\to 1}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P_r(t)\,dt = 0\,, \quad \text{για όλα τα } \delta,\ 0<\delta<\pi.$$

Για $t \in (\delta,\, 2\pi-\delta)$ *είναι* $\sin(t/2) \ge \sin(\delta/2)$. *Επομένως,*

$$K_n(t) \le \frac{1}{(n+1)\sin^2(\delta/2)} \le \frac{\pi^2}{(n+1)\,\delta^2}\,.$$

Άρα,

$$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(t)\,dt \le \frac{2(\pi-\delta)}{(n+1)\,\delta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Επειδή για $t \in (\delta,\, 2\pi-\delta)$ *είναι*

$$1-2r\cos t+r^2 = (1-r)^2+2r(1-\cos t) \ge (1-r)^2+2r(1-\cos\delta)\,,$$

έχουμε

$$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P_r(t)\, dt = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \leq \frac{2(\pi-\delta)\left(1-r^2\right)}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos\delta)} \xrightarrow[r\to 1]{} 0\,.$$

Ο πυρήνας Dirichlet (D_n) *δεν είναι θετικός και δεν είναι αθροιστικός επειδή*

$$\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty\,.$$

■

Πρόταση 4.4 *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *και*

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}\,, \quad \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)\,, \quad a_r(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)\, e^{ikx}\,.$$

Τότε

(α′) $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt.$

(β′) $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, K_n(t)\, dt.$

(γ′) $a_r(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, P_r(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, P_r(t)\, dt.$

Απόδειξη. *Οι αποδείξεις είναι εύκολες. Δίνουμε μόνο την απόδειξη της (γ′). Επειδή η σειρά που ορίζει την* $P_r(x-t)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα για* $t \in [-\pi, \pi]$*, έχουμε :*

$$\begin{aligned}
a_r(f)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)\, e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, r^{|k|} e^{ik(x-t)}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(x-t)}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, P_r(x-t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

■

4.2 Σημειακή Σύγκλιση του $\sigma_n(f)$

Θεώρημα 4.5 (Fejér) *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$.

(α΄) Αν το $x \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε τα πλευρικά όρια

$$f\left(x^{-}\right) = \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t) \quad \textit{και} \quad f\left(x^{+}\right) = \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t)$$

υπάρχουν και είναι πεπερασμένα, τότε

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{f(x^{-}) + f(x^{+})}{2}.$$

(β΄) Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ (υποθέτουμε ότι η f είναι από αριστερά και δεξιά συνεχής στα σημεία a και b) τότε ο αριθμητικός μέσος της σειράς Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δηλαδή

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_{\infty} = \lim_{n \to \infty} \max_{x \in [a,b]} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| = 0.$$

Επομένως τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \cdot \widehat{f}(k) \cdot e^{ikx}$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f στο διάστημα $[a, b]$.

Απόδειξη.

(α΄) Είναι

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x-t) + f(x+t)] K_n(t)\, dt.$$

Για να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{f(x^{-}) + f(x^{+})}{2},$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\, dt = \frac{f(x^{-})}{2} \tag{4.1}$$

και

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) K_n(t)\, dt = \frac{f(x^{+})}{2}. \tag{4.2}$$

Η απόδειξη των (4.1) και (4.2) είναι παρόμοια, αποδεικνύουμε μόνο την (4.2).

Επειδή

$$\frac{f(x^{+})}{2} = f\left(x^{+}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} K_n(t)\, dt,$$

για την απόδειξη της (4.2) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[f(x+t) - f\left(x^{+}\right)\right] K_n(t)\, dt = 0.$$

Για $\varepsilon>0$ *υπάρχει* $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0, 0<\delta<\pi$, *τέτοιο ώστε για* $0<t<\delta$ *είναι*

$$\left|f(x+t)-f\left(x^{+}\right)\right|<\varepsilon\,. \tag{4.3}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f\left(x^{+}\right)\right]K_n(t)\,dt\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)\left|f(x+t)-f\left(x^{+}\right)\right|K_n(t)\,dt \\ &<\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}K_n(t)\,dt \\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|f(x+t)-f\left(x^{+}\right)\right|K_n(t)\,dt \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|f(x+t)-f\left(x^{+}\right)\right|K_n(t)\,dt\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Επειδή (K_n) *είναι αθροιστικός πυρήνας, υπάρχει* $N=N(\delta)=N(x,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n\geq N$ *είναι*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}K_n(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2\left(\|f\|_1+\left|f\left(x^{+}\right)\right|\right)}\,. \tag{4.5}$$

Άρα, για $n\geq N$ *από την* (4.4) *έχουμε*

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f\left(x^{+}\right)\right]K_n(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left(\|f\|_1+\left|f\left(x^{+}\right)\right|\right)\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}K_n(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad.$$

(β′) *Από την ομοιόμορφη συνέχεια της* f *στο* $[a,b]$, *υπάρχει* $\delta_1>0$, $0<\delta_1<\pi$, *τέτοιο ώστε*

$$|f(u)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\,,\quad \text{για } |u-x|<\delta_1 \text{ και } u,x\in[a,b].$$

Επειδή η f *είναι συνεχής στο σημείο* b, *υπάρχει* $\delta_2>0$, $0<\delta_2<\pi$, *τέτοιο ώστε για* $|u-b|<\delta_2$, $u\in\mathbb{R}$, *είναι*

$$|f(u)-f(b)|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Τότε, για $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $0<\delta<\pi$ *και* $0<t<\delta$ *είναι*

$$|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon\,,\quad \text{για κάθε } x\in[a,b]. \tag{4.6}$$

Αρκεί να αποδείξουμε την (4.6) *στην περίπτωση που είναι* $b<x+t$, $0<t<\delta$. *Τότε,*

$$0<x+t-b\leq t<\delta\leq\delta_2\,,\quad 0\leq b-x<t<\delta\leq\delta_1$$

και επομένως

$$|f(x+t)-f(x)|=|f(x+t)-f(b)+f(b)-f(x)|\leq|f(x+t)-f(b)|+|f(b)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Αν $M=\max\{f(x):a\leq x\leq b\}$, *τότε υπάρχει* $N=N(\delta)\in\mathbb{N}$ (*Το* N *δεν εξαρτάται από το* $x\in[a,b]$) *τέτοιο ώστε για κάθε* $n\geq N$ *είναι*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\ dt < \frac{\varepsilon}{2\left(\|f\|_1 + M\right)}\,. \tag{4.7}$$

Αν εργαστούμε όπως και στη περίπτωση (α΄), χρησιμοποιώντας τις (4.6) *και* (4.7), *τελικά για* $n \geq N$ *έχουμε*

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left[f(x+t) - f(x)\right] K_n(t)\ dt\right| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$

Δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\,K_n(t)\ dt = \frac{f(x)}{2}$$

ομοιόμορφα στο $[a,b]$. *Ανάλογα αποδεικνύεται ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\,K_n(t)\ dt = \frac{f(x)}{2}$$

ομοιόμορφα στο $[a,b]$. *Άρα,*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x) = f(x)$$

ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

■

Παρατηρήσεις 4.2 *(α΄) Το θεώρημα Fejér ισχύει και για την αθροιστικότητα κατά Abel, δηλαδή αν αντικαταστήσουμε τα μερικά αθροίσματα* $\sigma_n(f)$ *με τα* $a_r(f)$ *(φυσικά τα* $a_r(f)$ *δεν είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα).*

(β΄) Στο θεώρημα Fejér δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη σύγκλιση του αριθμητικού μέσου της σειράς Fourier με τη σύγκλιση της σειράς Fourier. Είναι γνωστό ότι για οποιοδήποτε $x_0 \in [-\pi,\pi]$ *υπάρχει συνάρτηση* $f \in C(\mathbb{T})$ *τέτοια ώστε η σειρά Fourier της* f *στο* x_0 *δεν συγκλίνει στο* $f(x_0)$. *Ο λόγος που η απόδειξη του θεωρήματος Fejér παύει να ισχύει αν αντί του πυρήνα Fejér* K_n *χρησιμοποιήσουμε τον πυρήνα Dirichlet* D_n, *οφείλεται στο γεγονός ότι*

$$\overline{\lim}\int_{0}^{\delta}|D_n(t)|dt = \infty\ \ ,$$

για όλα τα $\delta > 0$ *(γιατί ;).*

(γ΄) Αν $f \in C(\mathbb{T})$ *και πάρουμε* $[a,b] = [-\pi,\pi]$ *στο θεώρημα Fejér, τότε το* $\sigma_n(f)$ *συγκλίνει στην* f *ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$. *Επομένως, άμεση συνέπεια του θεωρήματος Fejér είναι το θεώρημα Weierstrass. Δηλαδή, κάθε* $f \in C(\mathbb{T})$ *προσεγγίζεται ομοιόμορφα από τριγωνομετρικά πολυώνυμα.*

Αν $f \in C(\mathbb{T})$, *τότε για* $[a,b] = [-\pi,\pi]$ *το θεώρημα Fejér γενικεύεται.*

Θεώρημα 4.6 *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και (k_n) είναι ένας αθροιστικός πυρήνας. Αν*

$$\varphi_n(f)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,k_n(t)\,dt\,,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(f) - f\|_\infty = 0\,.$$

Απόδειξη. *Είναι*

$$\varphi_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,k_n(t)\,dt - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]\,k_n(t)\,dt\,.$$

Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για $|t| < \delta$ είναι

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{για κάθε } x.$$

Από τον ορισμό του αθροιστικού πυρήνα, υπάρχει $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ είναι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} |k_n(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}\,.$$

Άρα, για $n \geq N$ και για κάθε x έχουμε

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} [f(x-t) - f(x)]\,k_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} [f(x-t) - f(x)]\,k_n(t)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)|\,|k_n(t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} |f(x-t) - f(x)|\,|k_n(t)|\,dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} |k_n(t)|\,dt + \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

■

Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, τότε ο αριθμητικός μέσος της σειράς Fourier της f συγκλίνει στην f ως προς την L_1-νόρμα. Αποδεικνύουμε το παρακάτω πιο γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.7 *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και (k_n) είναι ένας αθροιστικός πυρήνας. Αν*

$$\varphi_n(f)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,k_n(t)\,dt\,,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(f) - f\|_1 = 0\,.$$

Ειδικά αν ο αθροιστικός πυρήνας είναι ο πυρήνας Fejér (K_n), τότε

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0\,.$$

Απόδειξη.

Επειδή ο χώρος $C(\mathbb{T})$ *είναι πυκνός στον* $L_1(\mathbb{T})$*, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $g \in C(\mathbb{T})$ *τέτοιο ώστε*

$$\|f-g\|_1 < \varepsilon\,. \tag{4.8}$$

Είναι

$$\begin{aligned} 2\pi\,\|\varphi_n(f)-\varphi_n(g)\|_1 &= 2\pi\,\|\varphi_n(f-g)\|_1 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(f-g)(x)|\; dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f-g)(x-t)\, k_n(t)\; dt \right| dx \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(f-g)(x-t)|\,|k_n(t)|\; dt\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(f-g)(x-t)|\; dx \right) dt && \text{(θεώρημα Fubini)} \\ &= 2\pi\,\|k_n\|_1\,\|f-g\|_1\;. \end{aligned}$$

Επομένως, αν $\|k_n\|_1 \le M$ *έχουμε*

$$\|\varphi_n(f)-\varphi_n(g)\| \le \|k_n\|_1\,\|f-g\|_1 < M\varepsilon\,. \tag{4.9}$$

Όμως, από το Θεώρημα 4.6 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \ge n_0$ *είναι*

$$\|\varphi_n(g)-g\|_\infty < \varepsilon\,.$$

Επειδή

$$\|\varphi_n(g)-g\|_1 \le \|\varphi_n(g)-g\|_\infty\,, \quad \text{για κάθε } n \ge n_0,$$

έχουμε

$$\|\varphi_n(g)-g\|_1 < \varepsilon\,. \tag{4.10}$$

Τελικά, για κάθε $n \ge n_0$ *είναι*

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(f)-f\|_1 &= \|(\varphi_n(f)-\varphi_n(g)) + (\varphi_n(g)-g) + (g-f)\|_1 \\ &\le \|\varphi_n(f)-\varphi_n(g)\|_1 + \|\varphi_n(g)-g\|_1 + \|f-g\|_1 \\ &< (M+2)\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(f)-f\|_1 = 0\,.$$

■

Το 1926 ο A.N.Kolmogorov [41] έδωσε ένα παράδειγμα συνάρτησης στον $L_1(\mathbb{T})$ της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει σε κάθε σημείο $t \in \mathbb{R}$. Όμως, για κάθε $f \in L_1(\mathbb{T})$ ο αριθμητικός μέσος της σειράς Fourier της f συγκλίνει στην f σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 4.8 (Fejér-Lebesgue) *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x) \ ,$$

για κάθε x που ανήκει στο σύνολο Lebesgue της f, δηλαδή για εκείνα τα x για τα οποία

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| \ dt = 0 \, .$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x) \ , \quad \textit{σχεδόν παντού στο } \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. *Αν $\{K_n\}$ είναι ο πυρήνας Fejér, τότε*

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] \cdot K_n(t) dt \ \ .$$

Από τις (iii) και (iv) του Λήμματος 4.2 υπάρχει $M > 0$ ($M = \pi^2$) τέτοιο ώστε

$$K_n(t) < \begin{cases} M/nt^2 & \text{αν } 0 < |t| \le \pi \ , \\ Mn & \text{αν } |t| \le 1/n \ . \end{cases}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|t|\le 1/n} + \int_{1/n \le |t| \le \pi} \right) [f(x-t) - f(x)] \, K_n(t) \ dt \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|t|\le 1/n} + \int_{1/n \le |t| \le \pi} \right) |f(x-t) - f(x)| \, K_n(t) \ dt \\ &< \frac{M}{2\pi} \left\{ n \int_{|t|\le 1/n} |f(x-t) - f(x)| \ dt + \frac{1}{n} \int_{1/n\le|t|\le\pi} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t^2} \, dt \right\} . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Αν το x είναι σημείο Lebesgue της f, τότε

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)| \ dt = 0 \, . \tag{4.12}$$

Επίσης, αν

$$F(u) := \int_0^u |f(x-t) - f(x)| \ dt \, ,$$

τότε

$$\lim_{u\to 0} \frac{F(u)}{u} = 0 \, .$$

Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$0 < u < \delta \Rightarrow F(u) < \frac{\pi}{2M}\varepsilon u\,.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^{\pi} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t^2}\,dt &= \left.\frac{F(t)}{t^2}\right|_{1/n}^{\pi} + 2\int_{1/n}^{\pi} \frac{F(t)}{t^3}\,dt \\
&\le \frac{F(\pi)}{\pi^2} + 2\int_{1/n}^{\pi} \frac{F(t)}{t^3}\,dt \\
&= \frac{F(\pi)}{\pi^2} + 2\int_{1/n}^{\delta} \frac{F(t)}{t^3}\,dt + 2\int_{\delta}^{\pi} \frac{F(t)}{t^3}\,dt \\
&< \frac{F(\pi)}{\pi^2} + \frac{\pi}{M}\varepsilon\int_{1/n}^{\delta} \frac{dt}{t^2} + 2\int_{\delta}^{\pi} \frac{F(t)}{t^3}\,dt \\
&< \frac{F(\pi)}{\pi^2} + \frac{\pi}{M}n\varepsilon + 2\int_{\delta}^{\pi} \frac{F(t)}{t^3}\,dt\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\overline{\lim}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t^2}\,dt \le \frac{\pi}{M}\varepsilon$$

και παρόμοια

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-1/n} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t^2}\,dt = \overline{\lim}\,\frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t^2}\,dt \le \frac{\pi}{M}\varepsilon\,.$$

Δηλαδή

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\int_{1/n\le|t|\le\pi} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t^2}\,dt \le \frac{2\pi}{M}\varepsilon\,. \tag{4.13}$$

Από την (4.11), *λόγω των* (4.12) *και* (4.13), *για κάθε* $\varepsilon > 0$ *έχουμε*

$$0 \le \underline{\lim}\,|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \le \overline{\lim}\,|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x)\ ,$$

όπου το x *είναι ένα σημείο Lebesgue της* f. ■

Πόρισμα 4.9 *Το τριγωνομετρικό σύστημα είναι πλήρες, δηλαδή βάση του χώρου* $L_2(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *με* $\widehat{f}(n) = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$. *Τότε* $\sigma_n(f) = 0$, *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$. *Από το Θεώρημα Fejér-Lebesgue έπεται ότι* $f = 0$ *σχεδόν παντού. Για την απόδειξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το Θεώρημα 4.7. Είναι* $\|f\|_1 = 0$, *όποτε* $f = 0$ *σχεδόν παντού.* ■

Παρατηρήσεις 4.3 *(α΄) Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και για την αθροιστικότητα κατά Abel. Δηλαδή, αν $f \in L_1(\mathbb{T})$ τότε*

$$\lim a_r(f)(x) = f(x)\ , \quad \textit{σχεδόν παντού}.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια.

(β΄) Ως γνωστόν, αν $f \in L_2(\mathbb{T})$ τότε έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x) \ \textit{σχεδόν παντού}.$$

Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 4.7 και το Θεώρημα Fejér-Lebesgue, έχουμε ανάλογα αποτελέσματα για τον αριθμητικό μέσο της σειράς Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Δηλαδή, αν $f \in L_1(\mathbb{T})$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x) \ \textit{σχεδόν παντού}.$$

4.3 Σημειακή Σύγκλιση του $S_n(f)$

Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά λεία αν η f είναι παραγωγίσιμη εκτός από πεπερασμένο το πλήθος σημεία και οι $f'(x^+)$, $f'(x^-)$ υπάρχουν για κάθε $x \in [a,b]$ (εκτός από τα άκρα όπου μόνο οι $f'(a^+)$ και $f'(b^-)$ πρέπει να υπάρχουν).
Το 1829 ο Dirichlet απέδειξε το παρακάτω πολύ γνωστό θεώρημα σημειακής σύγκλισης.

Θεώρημα 4.10 (Θεώρημα σημειακής σύγκλισης του Dirichlet) *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και οι παράγωγοι $f'(x^+)$, $f'(x^-)$ υπάρχουν σε όλα τα σημεία x (αυτό ισχύει αν η f είναι μια τμηματικά λεία συνάρτηση). Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Ειδικά αν η f είναι συνεχής στο x, τότε

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)\ .$$

Ο Jordan όρισε και μελέτησε τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης. Ως γνωστόν, μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης αν και μόνο αν $f = f_1 - f_2$, όπου οι f_1 και f_2 είναι αύξουσες συναρτήσεις. Επομένως, αν η f είναι φραγμένης κύμανσης τότε η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού, για κάθε $t \in [a,b]$ τα πλευρικά όρια $f(t^+)$, $f(t^-)$ υπάρχουν (επίσης τα $f(a^+)$, $f(b^-)$ υπάρχουν) και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και η f' είναι φραγμένη, τότε προφανώς η f είναι φραγμένης κύμανσης.

Παράδειγμα 4.1 *Η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{αν } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} , \\ 0 & \text{αν } x = 0 . \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi,\pi]$ και το $\lim_{x\to o^+} f'(x)$ δεν υπάρχει. Επομένως η f δεν είναι τμηματικά λεία. Όμως η f είναι φραγμένης κύμανσης.

Το 1881 ο Jordan γενίκευσε το Θεώρημα Dirichlet για συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε δύο βοηθητικές προτάσεις.

Λήμμα 4.11 *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και*

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) , \quad (|n| \to \infty) .$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\lambda > 1$ τέτοιο ώστε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{n<|k|\le\lambda n} \left|\widehat{f}(k)\right| < \varepsilon \ .$$

Απόδειξη. *Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $|n| \ge n_0$ είναι*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| < M \cdot \frac{1}{|n|} \ .$$

Αν $\lambda > 1$, τότε για κάθε $n \ge n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n<|k|\le\lambda n} \left|\widehat{f}(k)\right| &< 2M\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{[\lambda n]}\right) \\ &\le 2M\left(\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{[\lambda n_0]}\right) \\ &< 2M\frac{[\lambda n_0]-n_0}{n_0+1} \\ &\le 2M\frac{\lambda n_0 - n_0}{n_0+1} ,\end{aligned}$$

όπου $[\lambda n]$ είναι το ακέραιο μέρος του λn. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$2M\frac{\lambda n_0 - n_0}{n_0+1} < \varepsilon ,$$

αν και μόνο αν

$$1 < \lambda < \frac{2Mn_0 + \varepsilon n_0 + \varepsilon}{2Mn_0} .$$

Επομένως, για ένα τέτοιο λ και για κάθε $n \ge n_0$ έχουμε

$$\sum_{n<|k|\le\lambda n} \left|\widehat{f}(k)\right| < \varepsilon .$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\lambda > 1$ τέτοιο ώστε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{n<|k|\le\lambda n} \left|\widehat{f}(k)\right| < \varepsilon\,.$$

■

Παρατήρηση 4.1 *Είναι γνωστό ότι αν η $f \in L_1(\mathbb{T})$ είναι φραγμένης κύμανσης, τότε*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| < \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{2\pi\,|n|}\,.$$

Δηλαδή

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (|n|\to\infty)\,.$$

Θεώρημα 4.12 *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και*

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (|n|\to\infty)\,.$$

Τότε τα $S_n(f)(x)$ και $\sigma_n(f)(x)$ συγκλίνουν για τα ίδια x και έχουν το ίδιο όριο. Επίσης, αν το $\sigma_n(f)(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το ίδιο ισχύει και για το $S_n(f)(x)$.

Απόδειξη. *Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x) = \sigma(f)(x)$, τότε και $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \sigma(f)(x)$. Από το Λήμμα 4.11, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\lambda > 1$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \ge n_1$, έχουμε*

$$\sum_{n<|k|\le\lambda n} \left|\widehat{f}(k)\right| < \varepsilon\,. \tag{4.14}$$

Παρατηρούμε ότι για $N \in \mathbb{N}$, με $N > n$, είναι

$$\begin{aligned}
\sum_{n<|k|\le\lambda n}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\widehat{f}(k)\,e^{ikx} &= \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\widehat{f}(k)\,e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\widehat{f}(k)\,e^{ikx}\\
&= \sigma_n(f)(x) - \frac{n+1}{N+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{N+1}{n+1}-\frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)\,e^{ikx}\\
&= \sigma_n(f)(x) - \frac{n+1}{N+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{N+1}{n+1}-1\right)\widehat{f}(k)\,e^{ikx}\\
&\quad - \frac{n+1}{N+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}\\
&= \sigma_n(f)(x) - \frac{N-n}{N+1}\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\,e^{ikx} - \frac{n+1}{N+1}\sigma_n(f)(x)\\
&= \sigma_n(f)(x) - \frac{N-n}{N+1}S_n(f)(x) - \frac{n+1}{N+1}\sigma_n(f)(x)\,.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$S_n(f)(x) = \frac{N+1}{N-n}\sigma_n(f)(x) - \frac{n+1}{N-n}\sigma_n(f)(x) - \frac{N+1}{N-n}\sum_{n<|k|\le N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Επομένως, παίρνοντας $N=[\lambda n]$, *όπου* $n \ge n_1$ *και το* n_1 *είναι αρκετά μεγάλο ώστε* $[\lambda n] > n$, *έχουμε*

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - \sigma(f)(x) &= \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\big(\sigma_{[\lambda n]}(f)(x) - \sigma(f)(x)\big) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n}\left(\sigma_n(f)(x) - \sigma(f)(x)\right) \\ &\quad - \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<|k|\le N}\left(1-\frac{|k|}{[\lambda n]+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.14) *έχουμε*

$$\begin{aligned} \left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<|k|\le\lambda n}\left(1-\frac{|k|}{[\lambda n]+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}\right| &\le \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<|k|\le\lambda n}\frac{[\lambda n]+1-|k|}{[\lambda n]+1}\left|\widehat{f}(k)\right| \\ &< \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<|k|\le\lambda n}\left([\lambda n]+1-(n+1)\right)\left|\widehat{f}(k)\right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Υπάρχει $M>0$ *και* $n_2 \in \mathbb{N}$ *αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε για κάθε* $n \ge n_2$

$$\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n},\ \frac{n+1}{[\lambda n]-n} < M. \tag{4.17}$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x) = \sigma(f)(x),$$

υπάρχει $n_3 = n_3(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \ge n_3$ *είναι*

$$\left|\sigma_{[\lambda n]}(f)(x) - \sigma(f)(x)\right|, \quad \left|\sigma_n(f)(x) - \sigma(f)(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Αν $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, *από την* (4.15) *για κάθε* $n \ge n_0$ *έχουμε*

$$\left|S_n(f)(x) - \sigma(f)(x)\right| < 2\varepsilon.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \sigma(f)(x).$$

Αν $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x) = \sigma(f)(x)$ *ομοιόμορφα σε κάποιο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$, *τότε το* n_3 *εξαρτάται μόνο από το* ε *και επομένως σ᾽ αυτό το σύνολο θα είναι και* $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \sigma(f)(x)$ *ομοιόμορφα.* ■

Θεώρημα 4.13 (Dirichlet-Jordan) *Αν η* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *είναι φραγμένης κύμανσης, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x) \ .$$

Αν η f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Επειδή

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (|n| \to \infty) \ .$$

η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος και του θεωρήματος Fejér. ■

Παραδείγματα 4.1 *Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Dirichlet-Jordan έχουμε*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} &= \frac{\pi}{4} && 0 < x < \pi \,, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} &= \frac{\pi - x}{2} && 0 < x < 2\pi \,, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} &= \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} && 0 \le x \le 2\pi \,, \\
\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} &= |\sin x| && x \in \mathbb{R} \,.
\end{aligned}$$

Για ορισμένες τιμές του x οι παραπάνω σειρές Fourier μας δίνουν μερικές ενδιαφέρουσες σειρές. Για $x = \pi/2$, από την πρώτη σειρά Fourier έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \,.$$

Για $x = 0$, από την τρίτη σειρά Fourier παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η συμπεριφορά της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_1(\mathbb{T})$ σε ένα σημείο t_0 εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f σε κάποια περιοχή $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ του t_0. Αν $g \in L_1(\mathbb{T})$ είναι μια άλλη συνάρτηση, με $g(t) = f(t)$ για κάθε $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, οι σειρές Fourier των f και g στο t_0 είτε και οι δύο συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο ή αποκλίνουν και μάλιστα με τον ίδιο τρόπο. Ο τρόπος που συμπεριφέρονται οι σειρές Fourier είναι διαφορετικός απ' αυτόν των δυναμοσειρών. Πράγματι, αν δύο δυναμοσειρές συμπίπτουν σε μια περιοχή του σημείου t_0, τότε οι δυναμοσειρές είναι ίσες στην κοινή περιοχή που συγκλίνουν.

Λήμμα 4.14 *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $\int_{-1}^{1} |f(t)/t| \, dt < \infty$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = 0 \,.$$

Απόδειξη. *Είναι* $S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt$, *οπότε*

$$\begin{aligned} S_n(f)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(n+1/2)\,t}{\sin t/2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)\cos t/2}{\sin t/2}\sin nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t)\cos t/2}{\sin t/2}\right| dt &\le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t)}{t}\cos\frac{t}{2}\right| dt \qquad (|\sin t/2| \ge |t/\pi|) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(t)}{t}\cos\frac{t}{2}\right| dt + \frac{1}{2}\int_{1\le|t|\le\pi}\left|\frac{f(t)}{t}\cos\frac{t}{2}\right| dt \\ &\le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt + \frac{1}{2}\int_{1\le|t|\le\pi}|f(t)|\, dt < \infty\,, \end{aligned}$$

η συνάρτηση $g(t) := \frac{f(t)\cos t/2}{\sin t/2} \in L_1(\mathbb{T})$. *Επομένως, από την* (4.18) *χρησιμοποιώντας το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε ότι* $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = 0$. ■

Θεώρημα 4.15 (Αρχή εντοπισμού του Riemann) *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *και υποθέτουμε ότι η* f *μηδενίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα* I. *Τότε, για κάθε* $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = 0$$

και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κλειστά και φραγμένα υποδιαστήματα του I.

Απόδειξη. *Αν* $t \in I$, *από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι* $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = 0$ *(άσκηση).*
Αν I_0 *είναι κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του* I, *ορίζουμε τις συναρτήσεις* $\varphi : I_0 \to L_1(\mathbb{T})$ *με* $\varphi(t_0) = \varphi_{t_0}$, *όπου*

$$\varphi_{t_0}(t) := \frac{f(t_0 - t)\cos t/2}{\sin t/2}\,, \quad t_0 \in I_0\,.$$

Έστω η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{T} \to L_1(\mathbb{T})$ *με* $\varphi(\tau) = f_\tau$, *όπου* $f_\tau(t) := f(t-\tau)$. *Όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος η* $\varphi_{t_0} \in L_1(\mathbb{T})$. *Επομένως, από την Πρόταση 3.13 το* $\{\varphi_{t_0} : t_0 \in I_0\}$ *είναι συμπαγές στον* $L_1(\mathbb{T})$. *Παρόμοια και τοΕπειδή* $S_n(f)(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - t)\, D_n(t)\, dt$, *είναι*

$$\begin{aligned} S_n(f)(t_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - t)\,\frac{\sin(n+1/2)\,t}{\sin t/2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t_0 - t)\cos t/2}{\sin t/2}\sin nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - t)\cos nt\,dt\,. \end{aligned}$$

■

4.4 Ολοκλήρωση και Παραγώγιση Σειρών Fourier

Αν

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$$

είναι η σειρά Fourier της $f \in L_1(\mathbb{T})$*, τότε η σειρά Fourier της* f *γράφεται και στη μορφή*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \ ,$$

όπου

$$a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \ \text{ και } \ b_n = i\left(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)\right) \ .$$

Δηλαδή

$$\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2} \ \text{ και } \ \widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2} \ .$$

Είναι

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt \ \text{ και } \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt \ .$$

Πρόταση 4.16 (Ολοκλήρωση σειρών Fourier) *Έστω*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

η σειρά Fourier της $f \in L_1(\mathbb{T})$*. Τότε*

(α′) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n/n)$ *συγκλίνει.*

(β′) Αν ολοκληρώσουμε σ᾽ ένα διάστημα κάθε όρο της σειράς Fourier, η σειρά Fourier που προκύπτει συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό. Δηλαδή

$$\int_0^x f(t)dt = a_0\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right) \ . \tag{4.19}$$

(γ′) Για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}(\sin nb - \sin na) - \frac{b_n}{n}(\cos nb - \cos na)\right] \ . \tag{4.20}$$

Απόδειξη. *Έστω*

$$F(x) := \int_0^x \left(f(t) - \frac{1}{2}a_0\right)dt \ .$$

Τότε η F *είναι απόλυτα συνεχής και επομένως φραγμένης κύμανσης. Είναι*

$$F'(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0 \ \text{ σχεδόν παντού } \ .$$

και

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t) - \frac{1}{2}a_0\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \pi a_0 = \pi a_0 - \pi a_0 = C \ .$$

Έστω

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \ .$$

Είναι η σειρά Fourier της F. Επομένως

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[F(\pi)-F(-\pi)\right] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n}a_n\,. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[F(\pi)\sin n\pi - F(-\pi)\sin(-n\pi)\right] - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}a_0\right)\sin nx\,dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx - \frac{1}{n\pi}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}b_n\,. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Dirichlet-Jordan η σειρά Fourier της F συγκλίνει ομοιόμορφα στην F. Δηλαδή

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}a_0x + \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right) \quad .$$

Για $x=0$ είναι

$$\frac{1}{2}A_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

και επομένως προκύπτει η (4.19). Επειδή

$$\int_a^b f(t)dt = \int_0^b f(t)dt - \int_0^a f(t)dt \quad ,$$

χρησιμοποιώντας την (4.19) αποδεικνύεται η (4.20). ■

Πόρισμα 4.17 *Η τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$$

δεν είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $f\in L_1(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. *Επειδή*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} = \infty\,,$$

η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια άμεσα της Πρότασης 4.16(α′). ■

Πρόταση 4.18 (Παραγώγιση σειρών Fourier) *Υποθέτουμε ότι η $f\in L_1(\mathbb{T})$ είναι απόλυτα συνεχής με σειρά Fourier*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)\,.$$

Αν η f' είναι φραγμένης κύμανσης και παραγωγίσουμε κάθε όρο της σειράς Fourier, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nt - na_n \sin nt) = \frac{f'(t^+) + f'(t^-)}{2} \quad . \tag{4.21}$$

Απόδειξη.

Ως γνωστόν η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Έστω

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad .$$

είναι η σειρά Fourier της f'. Είναι

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)dt = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0$$

και

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cdot \cos ntdt = \left[\frac{1}{\pi}f(t)\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cdot \sin ntdt = nb_n \quad .$$

Παρόμοια $B_n = -na_n$. Η (4.21) αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το Θεώρημα Dirichlet-Jordan. ∎

4.5 Σειρές Lacunary

Ορισμός 4.3 *Μία ακολουθία φυσικών αριθμών (K_n) λέγεται Hadamard-lacunary ή άπλα lacunary αν υπάρχει $c > 1$ τέτοιο ώστε $K_{n+1} > C \cdot K_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή*

$$\inf_n \frac{K_{n+1}}{K_n} > 1 \quad .$$

Π.χ. η ακολουθία $K_n = 2^n$ είναι lacunary. Όμως η ακολουθία $K_n = 2n$ (ή $K_n = 2n+1$) δεν είναι Iacunary. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

και η σειρά Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

είναι lacunary αν η ακολουθία (λ_n) είναι lacunary. Αν $a_n = \widehat{f}(\lambda_n)$, όπου $f \in L_1(\mathbb{T})$ τότε είναι $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $\lambda_n < k < \lambda_{n+1}$ (αν $\lambda_{n-1} < \lambda_n < \lambda_{n+1}$, τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in (\lambda_{n-1}, \lambda_{n+1})$, $k \neq \lambda_n$).

Αν

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

είναι ο πυρήνας Dirichlet, ο πυρήνας του Fejér είναι ο

$$K_n(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k(t) \quad .$$

Υπενθυμίζουμε μερικές ιδιότητες του πυρήνα Fejér.

Λήμμα 4.19 *Είναι*

$$K_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikt} = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \left[\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right]^2 & \text{αν } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ N+1 & \text{αν } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Επίσης,

$$0 \leq K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{\pi^2}{(N+1)\,t^2}, \quad 0 < |t| \leq \pi \,.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας $\sin(t/2) \geq t/\pi$, $0 \leq t \leq \pi$.

Το παρακάτω τεχνικό αλλά πολύ χρήσιμο λήμμα οφείλεται στον Y. Katznelson [40, Chapter V, Lemma 1.2]. Μας λέει ότι ένας συντελεστής Fourier που βρίσκεται μακριά από τους άλλους συντελεστές Fourier εξαρτάται από τη συμπεριφορά της συνάρτησης στην περιοχή ενός σημείου.

Λήμμα 4.20 *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ *και* $N \in \mathbb{N}$. *Αν* $\widehat{f}(k) = 0$ *για όλα τα* $k \in \mathbb{Z}$ *τέτοια ώστε* $1 \leq |n_0 - k| \leq 2N$ *και* $f(t) = O(t)$, $(t \to 0)$, *τότε*

$$\left|\widehat{f}(n_0)\right| \leq 2\pi^4 \left[N^{-1} \sup_{|t|<N^{-\frac{1}{4}}} \left|t^{-1} f(t)\right| + N^{-2}\|f\|_1\right] . \tag{4.22}$$

Απόδειξη. *Το*

$$g_N(t) := \frac{K_N^2(t)}{\|K_N\|_2^2} = \frac{1}{\|K_N\|_2^2} \cdot \left[\sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikt}\right]^2 = \sum_{k=-2N}^{2N} \widehat{g}_N(k) e^{ikt}$$

είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $2N$. *Είναι*

$$\widehat{g}_N(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_N(t)\, dt = 1 \,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in_0 t} f(t)\, g_N(t)\, dt = \sum_{k=-2N}^{2N} \widehat{g}_N(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-in_0 t}\, dt = \sum_{k=-2N}^{2N} \widehat{g}_N(k)\, \widehat{f}(n_0 - k) \,. \tag{4.23}$$

Από την υπόθεση, για $1 \leq |n_0 - (n_0 - k)| = |k| \leq 2N$ *είναι* $\widehat{f}(n_0 - k) = 0$. *Επομένως, από την* (4.23) *έχουμε*

$$\widehat{f}(n_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in_0 t} f(t)\, g_N(t)\, dt \,. \tag{4.24}$$

Για την νόρμα $\|K_N\|_2^2$ *είναι*

$$\begin{aligned}
\|K_N\|_2^2 &= \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)^2 \\
&= 1+2\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)^2 \\
&= 1+2\frac{N^2+(N-1)^2+\cdots+1^2}{(N+1)^2} \\
&= 1+\frac{2}{(N+1)^2}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\
&= 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{(2N+1)N}{N+1} > \frac{N}{2}\,.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω κάτω φράγμα για την $\|K_N\|_2^2$, *καθώς επίσης και το Λήμμα 4.19, έχουμε*

$$g_N(t) = \frac{K_N^2(t)}{\|K_N\|_2^2} < \frac{\pi^4}{(N+1)^2 t^4}\cdot\frac{2}{N} < 2\pi^4 N^{-3} t^{-4}\,. \tag{4.25}$$

Από τη (4.24) *παίρνουμε*

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(n_0)\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)||g_N(t)|\,dt \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<N^{-1}}|f(t)||g_N(t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{N^{-1}<|t|<N^{-1/4}}|f(t)||g_N(t)|\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{N^{-1/4}<|t|<\pi}|f(t)||g_N(t)|\,dt \quad .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<N^{-1}}|f(t)|\,|g_N(t)|\;dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<N^{-1}}|t|\left|t^{-1}f(t)\right|\,|g_N(t)|\;dt \\
&\le N^{-1}\sup_{|t|<N^{-1}}\left|t^{-1}f(t)\right|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<N^{-1}}|g_N(t)|\;dt \\
&\le N^{-1}\sup_{|t|<N^{-1}}\left|t^{-1}f(t)\right|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(t)|\;dt\,.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ανισότητα (4.25) *έχουμε*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{N^{-1}<|t|<N^{-\frac14}}|f(t)|\,|g_N(t)|\;dt &\le 2\pi^4N^{-3}\frac{1}{2\pi}\int_{N^{-1}<|t|<N^{-\frac14}}\left|t^{-1}f(t)\right|\,|t|^{-3}\;dt \\
&\le \pi^3N^{-3}\sup_{|t|<N^{-\frac14}}\left|t^{-1}f(t)\right|\cdot\int_{N^{-1}<|t|<N^{-\frac14}}|t|^{-3}\,dt \\
&= \pi^3N^{-3}\sup_{|t|<N^{-\frac14}}\left|t^{-1}f(t)\right|\cdot\int_{N^{-1}}^{N^{-\frac14}}t^{-3}\,dt \\
&\le \pi^3N^{-1}\sup_{|t|<N^{-\frac14}}\left|t^{-1}f(t)\right|
\end{aligned} \tag{4.28}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{N^{-\frac{1}{4}}<|t|<\pi}|f(t)|\,|g_N(t)|\;dt &\leq 2\pi^4 N^{-3}\frac{1}{2\pi}\int_{N^{-\frac{1}{4}}<|t|<\pi} t^{-4}\,|f(t)|\;dt \\ &= \pi^3 N^{-3}\int_{N^{-\frac{1}{4}}<|t|<\pi} t^{-4}\,|f(t)|\;dt \\ &< \pi^3 N^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\;dt = 2\pi^4 N^{-2}\|f\|_1\,.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Από τη (4.26)*, χρησιμοποιώντας τις* (4.27)*,* (4.28) *και* (4.29) *τελικά έχουμε*

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(n_0)\right| &\leq N^{-1}\sup_{|t|<N^{-1}}\left|t^{-1}f(t)\right| + \pi^3 N^{-1}\sup_{|t|<N^{-\frac{1}{4}}}\left|t^{-1}f(t)\right| + 2\pi^4 N^{-2}\|f\|_1 \\ &< \pi^4 N^{-1}\sup_{|t|<N^{-\frac{1}{4}}}\left|t^{-1}f(t)\right| + \pi^4 N^{-1}\sup_{|t|<N^{-\frac{1}{4}}}\left|t^{-1}f(t)\right| + 2\pi^4 N^{-2}\|f\|_1 \\ &= 2\pi^4\left[N^{-1}\sup_{|t|<N^{-\frac{1}{4}}}\left|t^{-1}f(t)\right| + N^{-2}\|f\|_1\right].\end{aligned}$$

■

Πρόταση 4.21 *Έστω*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos K_n(t)$$

είναι η σειρά Fourier της $f \in L_1(\mathbb{T})$*, όπου* (K_n) *είναι μία Iacunary ακολουθία. Αν η* f *είναι παραγωγίσιμη σ᾽ ένα σημείο, τότε*

$$a_n = o\left(K_n^{-1}\right) \quad .$$

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η f *είναι παραγωγίσιμη στο* $t = 0$ *(αν η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* t_0*, τότε θεωρούμε τη* $g(t) := f(t + t_0)$*). Αντικαθιστώντας την* f *με την*

$$h(t) := f(t) - f(0)\cos t - f'(0)\sin t \ \ ,$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι : $f(0) = f'(0) = 0$.

Σ᾽ αυτή την περίπτωση είναι

$$f(t) = o(t)\ ,\ (t \to 0) \ \ .$$

Επειδή η ακολουθία (K_n) *είναι Iacunary, υπάρχει σταθερά* $C > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *κανένας από τους αριθμούς* $j \in \mathbb{N}$ *που ικανοποιούν την ανισότητα* $1 \leq |K_n - j| \leq CK_n$ *δεν ανήκει στην ακολουθία* (K_n)*. Τότε για όλα αυτά τα* $j \in \mathbb{N}$ *είναι* $\widehat{f}(j) = 0$*. Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενο Λήμμα 4.20 για* $n_0 = K_n$ *και* $2N = [CK_n]$*, τότε*

$$\left|\widehat{f}\,(K_n)\right| \leq 2\pi^4\left[N^{-1}\sup_{|t|<N^{-\frac{1}{4}}}\left|t^{-1}f\,(t)\right| + N^{-2}\|f\|_1\right].$$

Από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\widehat{f}(K_n) = o\left(K_n^{-1}\right) .$$

Άρα και

$$a_n = 2\widehat{f}(K_n) = o\left(K_n^{-1}\right) .$$

■

Παρατήρηση 4.2 *Η Πρόταση 4.21 ισχύει και στην περίπτωση που η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin K_n(t)$$

είναι σειρά Fourier κάποιας $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Πόρισμα 4.22 *Η συνάρτηση του Weierstrass:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^n t ,$$

δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. *Επειδή η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ *συγκλίνει, η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^n t$ *συγκλίνει ομοιόμορφα. Αν*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^n t .$$

η f *είναι συνεχής (η* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^n t$ *είναι η σειρά Fourier της* f*). Αν η* f *ήταν παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο, από την Πρόταση 4.21 θα έπρεπε να είναι* $a_n = o\left(K_n^{-1}\right)$*. Όμως αυτό δεν ισχύει αφού* $a_n = 2^{-n}$ *και* $K_n = 2^n$*. Άρα, η* f *δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο.* ■

Παρατήρηση 4.3 *Ο Weierstrass (1815–1897) παρουσίασε στην Ακαδημία του Βερολίνου στις* 18 *Ιουλίου* 1872 *ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη. Το παράδειγμα δημοσιεύτηκε στο DuBois-Reymond (1875). Η συνάρτηση* f *ορίζεται ως εξής*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos\left(a^k \pi x\right) ,$$

όπου ο a *είναι περιττός αριθμός και* $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$ *και* $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$*. Ας σημειωθεί ότι* $(ab)^k \nrightarrow 0$*. Η παραπάνω συνάρτηση εξετάστηκε από τον G.H. Hardy το* 1916 *στην εργασία [31]. Ο Hardy απέδειξε ότι η συνάρτηση έχει αυτές τις ιδιότητες και στην περίπτωση που είναι* $ab \geq 1$*. Στην ίδια εργασία ο Hardy απέδειξε ότι η*

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n^2 \pi x\right)}{n^2}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο.

Έστω (K_n) *είναι μία lacunary ακολουθία, δηλαδή* $K_{n+1} > CK_n$*, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *όπου* $C > 1$*. Επομένως*

$$K_{j+p} > CK_{j+p-1} > C^2 K_{j+p-2} > \cdots > C^p K_j \,.$$

Τότε, για $N = 0, 1, 2, \ldots$ *είναι*

$$\sum_{n=j}^{N} \frac{1}{K_N^2} = \sum_{p=0}^{N-j} \frac{1}{K_{j+p}^2} < \sum_{p=0}^{N-j} \frac{1}{C^{2p} K_j^2} = \frac{1}{K_j^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{C^{2p}} = \frac{C}{K_j^2}\,,$$

όπου $C = \sum_{p=0}^{\infty} \left(1/C^2\right)^p$*. Δηλαδή,*

$$\sum_{n=j}^{N} \frac{1}{K_N^2} < \frac{C}{K_j^2}\,. \tag{4.30}$$

Θεώρημα 4.23 (A.N. Kolmogorov) *Έστω η* (K_n) *είναι μία lacunary ακολουθία και* $f \in L_1(\mathbb{T})$*. Αν*

$$S_{K_n}(f)(t) = \sum_{m=-K_N}^{K_n} \widehat{f}(m) e^{imt} \quad ,$$

η υπακολουθία $(S_{K_n}(f))$ *της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων* $(S_n(f))$ *της σειράς Fourier της* f *συγκλίνει σχεδόν παντού στην* f*.*

Απόδειξη.

Αν

$$\sigma_{K_n}(f)(t) = \sum_{j=-K_n}^{K_n} \left(1 - \frac{|j|}{K_n + 1}\right) \widehat{f}(j) e^{ijt} \quad ,$$

θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma_{K_n}(f) - S_{K_n}(f)\|_2^2 < \infty \quad . \tag{4.31}$$

Αν ισχύει η (4.31)*, τότε :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\sigma_{K_n}(f)(t) - S_{K_n}(f)(t)|^2 \, dt < \infty \quad .$$

Η ακολουθία (g_N)*, με*

$$g_N = \sum_{n=1}^{N} |\sigma_{K_n}(f) - S_{K_n}(f)|^2$$

είναι αύξουσα που συγκλίνει στο

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{K_n}(f) - S_{K_n}(f)|^2 \quad .$$

Από το Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{K_n}(f)(t) - S_{K_n}(f)(t)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\sigma_{K_n}(f)(t) - S_{K_n}(f)(t)|^2 \, dt < \infty\,,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sigma_{K_n}(f)(t) - S_{K_n}(f)(t)\right|^2$ *συγκλίνει σχεδόν παντού. Επομένως,*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sigma_{K_n}(f)(t) - S_{K_n}(f)(t)\right| = 0 \quad \text{σχεδόν παντού}.$$

Όμως, από το Θεώρημα Fejér-Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \sigma_{K_n}(f)(t) = f(t)$ *σχεδόν παντού. Άρα,*

$$\lim_{n\to\infty} S_{K_n}(f)(t) = f(t) \quad \text{σχεδόν παντού}.$$

Για να αποδείξουμε τη (4.31) *παρατηρούμε ότι*

$$\begin{aligned}
\left\|\sigma_{K_n}(f) - S_{K_n}(f)\right\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-K_n}^{K_n} \left|\left[\left(1 - \frac{|m|}{K_n+1}\right) - 1\right]\widehat{f}(m)\, e^{imt}\right|^2 dt \\
&= \frac{1}{(K_n+1)^2} \sum_{m=-K_n}^{K_n} m^2 \left|\widehat{f}(m)\right|^2 .
\end{aligned}$$

Επομένως (*παίρνοντας* $K_0 = 0$) *είναι* :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left\|\sigma_{K_n}(f) - S_{K_n}(f)\right\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(K_n+1)^2} \sum_{m=-K_n}^{K_n} m^2 \left|\widehat{f}(m)\right|^2\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{K_n^2} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{K_{j-1}\leq|m|\leq K_j} m^2 \left|\widehat{f}(m)\right|^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left\{\left(\sum_{K_{j-1}\leq|m|\leq K_j} m^2 \left|\widehat{f}(m)\right|^2\right)\left(\sum_{n=j}^{N} \frac{1}{K_n^2}\right)\right\} .
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.30), *για* $N = 1, 2, \ldots$ *έχουμε*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left\|\sigma_{K_n}(f) - S_{K_n}(f)\right\|_2^2 &\leq \sum_{j=1}^{N} \left\{K_j^2 \sum_{K_{j-1}\leq|m|\leq K_j} \left|\widehat{f}(m)\right|^2 \frac{C}{K_j^2}\right\} \\
&= C \sum_{m=-K_N}^{K_n} \left|\widehat{f}(m)\right|^2 \\
&\leq C \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(m)\right|^2 \\
&= C \left\|f\right\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\sigma_{K_n}(f) - S_{K_n}(f)\right\|_2^2 < \infty .$$

■

4.6 Ασκήσεις

1. *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$. *Αν* $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ *σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fejér-Lebesgue να αποδειχθεί οτι* $f(x) = g(x)$ *σχεδόν παντού.*

2. *(α΄) Αν*

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & \text{αν } -\pi \le x \le 0 \ , \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{αν } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

και

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\pi-1)x}{2} & \text{αν } -1 \le x \le 1 \ , \\ \frac{\pi-x}{2} & \text{αν } 1 \le x \le \pi \ , \end{cases}$$

να αποδειχθεί ότι $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$, $x \neq 0$ *και* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx$.

(β΄) Χρησιμοποιώντας την (α΄) να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \frac{\pi - 1}{2} .$$

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6} .$$

3. *Έστω η συνάρτηση φραγμένης κύμανσης*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-iax} & \text{αν } 0 < x < 2\pi \ , \\ e^{-i\pi a}\cos(\pi a) & \text{αν } x = 0 \ , \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. *Αν* $0 < x < 2\pi$, *να αποδειχθεί ότι*

(α΄)

$$\frac{\pi e^{i\pi a}}{\sin(\pi a)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n+a)x}}{n + a}$$

(β΄)

$$\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\sin(\pi a)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(n+a)x}}{n + a}$$

(γ΄)

$$\pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(n + a)x]}{n + a}$$

(δ΄)

$$\pi \cot(\pi a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(n + a)x]}{n + a}$$

(ϵ′)

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} \,.$$

Ποιός από τους παραπάνω τύπους ισχύει για $x = 0$*;*

Να αποδειχθεί ότι οι τύποι (α′), (β′), (γ′) και (δ′) δεν ισχύουν όταν $x = 2\pi$ *(Ισχύει μόνο ο τύπος (γ′) στην περίπτωση που το* $4a$ *είναι περιττός ακέραιος).*

4. (α′) *Έστω* $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$*. Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \cos tx \,, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

και να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\pi \cos tx}{\sin t\pi} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} (-1)^n \cos nx \,, \quad -\pi \leq x \leq \pi \,.$$

Για $x = \pi$ *είναι*

$$\frac{\pi \cos t\pi}{\sin t\pi} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} \,, \quad t \notin \mathbb{Z} \,.$$

(β′) *Αν* $0 < t < 1$*, να αποδειχθεί ότι*

$$\ln \sin t\pi = \ln t\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \,.$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\sin t\pi}{\pi} = t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \,, \quad 0 < t < 1 \,.$$

(γ′) *Έστω*

$$f_N(t) := t \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \,, \quad t \notin \mathbb{Z} \,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$f_N(t) = (-1)^N (N!)^2 \prod_{n=-N}^{N} (t - n)$$

και

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f_{N+1}(t)}{f_N(t)} = -1 \,.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\sin t\pi}{\pi} = t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \,, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

5. Έστω η συνάρτηση $f(t) = e^{iat/p}(p\cos a - it\sin a)$, $-p \le t \le p$, όπου το $a \in \mathbb{R}$ δεν είναι πολλαπλάσιο του π. Να αποδειχθεί ότι
$$f(t) = p\sin^2 a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a-n\pi)^2} e^{in\pi t/p}.$$
Εφαρμογή. Είναι
$$\frac{\cos a}{\sin^2 a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a-n\pi)^2} \quad \textit{και} \quad \frac{1}{\sin^2 a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n\pi)^2}.$$

6. Έστω οι συναρτήσεις f, g είναι Lebesgue μετρήσιμες και 2π-περιοδικές με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Αν $f \in L_1[-\pi,\pi]$ και η g είναι φραγμένης κύμανσης, έστω
$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \textit{και} \quad g(t) \sim \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nt + d_n \sin nt).$$
(α΄) Να αποδειχθεί ότι
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(kt)\, dt = \frac{1}{2}a_0c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{nk}c_n + b_{nk}d_n).$$
(β΄) Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fejér (Θεώρημα 3.22), να αποδειχθεί ότι
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(kt)\, dt = \frac{1}{2}a_0c_0.$$
Επομένως,
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty}(a_{nk}c_n + b_{nk}d_n) = 0.$$
Εφαρμογή. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι σειρές
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \quad \textit{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{2n+1}$$
είναι σειρές Fourier συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης, να αποδειχθεί ότι
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{kn}}{n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{k(2n+1)}}{2n+1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{k(2n+1)}}{2n+1} = 0.$$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) := \int_{-R}^{R} e^{ixt}\, d\alpha(x)$, όπου $\alpha : [-R,R] \to \mathbb{C}$ είναι μία συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, με $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι
$$ite^{-i\pi t/2R} = \frac{4R}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{n\pi i t/R}, \quad -R \le t \le R$$
και ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

(β′) Να αποδειχθεί ότι

$$f'(x) = \int_{-R}^{R} ite^{ixt}\,dt = \frac{4R}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} f\left(x + \frac{2n+1}{2R}\pi\right). \tag{4.32}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.32) με $f(x) = \sin(Rx)$ *και* $x = 0$, *να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(1/(2n+1)^2\right)$ *και να αποδειχθεί ότι*

$$|f'(x)| \le MR\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Παρατήρηση : *Αν* $R = N$ *και* $-N < -N+1 < -N+2 < \cdots < N-1 < N$, *υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* α *είναι σταθερή σε κάθε υποδιάστημα* $(n, n+1)$, $n = -N, \ldots, N-1$, *με* $\alpha(n^+) - \alpha(n^-) = c_n$. *Τότε,*

$$\int_{-N}^{N} g(t)\, d\alpha(t) = \sum_{n=-N}^{N} g(n)\, c_n\,,$$

όπου $g(t) = e^{ixt}$. *Επομένως,*

$$f(x) = \int_{-N}^{N} e^{ixt}\, d\alpha(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\,.$$

Δηλαδή το f *είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ* N. *Αν* $|f(x)| \le M$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, *το συμπέρασμα της άσκησης είναι ότι*

$$|f'(x)| \le MN\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι η κλασσική " ανισότητα του Bernstein για τριγωνομετρικά πολυώνυμα ". Παραπέμπουμε στα συγγράμματα των R.P. Boas [8] και B. Ya. Levin [48] για γενικεύσεις της ανισότητας Bernstein.

Παράρτημα Α΄

Ορθοκανονικές Βάσεις σε Χώρους Hilbert

Πρόταση Α΄.1 *Έστω M είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και $x \in H$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :*

(α) Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| :\ y \in M\}$.

(β) Το $y_0 \in M$ με $\langle x - y_0, y\rangle = 0$, $\forall\, y \in M$.

Απόδειξη.
$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και κάθε $y \in M$ είναι*

$$\|x - y_0 + \lambda y\| = \|x - (y_0 - \lambda y)\| \geq \|x - y_0\| \ , \tag{Α΄.1}$$

Επειδή $y_0 - \lambda y \in M$. Από την (Α΄.1) *συνεπάγεται ότι $\langle x - y_0, y\rangle = 0$, $\forall\, y \in M$.*
$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ *Αν $y \in M$, επειδή $\langle x - y_0, y_0 - y\rangle = 0$ έχουμε :*

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2 \ . \tag{Α΄.2}$$

Από την (Α΄.2) *το $\{\|x - y\| :\ y \in M\}$ γίνεται ελάχιστο αν $y = y_0$. Αν $\|x - y_0\| = \|x - y_1\|$, για κάποιο $y_1 \in M$, τότε*

$$\|x - y_0\|^2 = \|x - y_1\|^2 = \|(x - y_0) + (y_0 - y_1)\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y_1\|^2 \ .$$

Άρα $\|y_0 - y_1\| = 0$. Δηλαδή $y_0 = y_1$. ■

Θεώρημα Α΄.2 *Έστω M κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $M \neq H$ και $x \in M^C$. Τότε υπάρχει μοναδικό $z_0 \in M^\perp$ τέτοιο ώστε $\|z_0\| = 1$ και*

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x-y\| : \ y \in M\} = \sup\{|\langle x, z\rangle| : \ z \in M^\perp \ \ \textit{και} \ \ \|z\| \le 1\} = \langle x, z_0\rangle \ \ .$$

Απόδειξη.

Αν $z \in M^\perp$, $\|z\| \le 1$, *τότε*

$$|\langle x, z\rangle| = |\langle x - y_0, z\rangle| \le \|x - y_0\| \cdot \|z\| \le \|x - y_0\| = \min\{\|x-y\| : \ y \in M\} \ \ .$$

Επομένως

$$\sup\{|\langle x, z\rangle| : \ z \in M^\perp, \ \|z\| \le 1\} \le \min\{\|x-y\| : \ y \in M\} \ \ . \tag{A΄.3}$$

Έστω

$$z_0 = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} \ \ .$$

Τότε από την Πρόταση Α΄.1 οπότε :

$$\|x - y_0\| = \langle x - y_0, z\rangle = \langle x, z_0\rangle \le \sup\{|\langle x, z\rangle| : \ z \in M^\perp, \ \|z\| \le 1\} \tag{A΄.4}$$

Από τις (Α΄.3) *και* (Α΄.4) *προκύπτει το ζητούμενο.*

Το z_0 *είναι μοναδικό. Πράγματι, αν* $z_1 \in M^\perp$ *με* $\langle x, z_0\rangle = \langle x, z_1\rangle$ *τότε*

$$\|x - y_0\| = \langle x, z_1\rangle = \langle x - y_0, z_1\rangle \le \|x - y_0\| \cdot \|z\|_1 \le \|x - y_0\| \ \ .$$

Δηλαδή

$$\langle x - y_0, z_1\rangle = \|x - y_0\| \cdot \|z_1\| \ \ .$$

Επομένως

$$z_1 = \lambda(x - y_0) \ \ \textit{και} \ \ \lambda = \frac{1}{\|x - y_0\|} \ \ .$$

Άρα

$$z_1 = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} = z_0 \ \ .$$

■

Ορισμοί Α΄.1 *Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{u_a : a \in A\}$ ένα υποσύνολο του H.*

(α΄) Το σύνολο $\{u_a : a \in A\}$ λέγεται ορθοκανονικό αν

$$\langle u_a, u_b\rangle = \begin{cases} 0 & \textit{αν } a \neq b \ , \\ 1 & \textit{αν } a = b \ . \end{cases}$$

(β′) *Έστω η συνάρτηση* $\widehat{x} : A \to \mathbb{C}$, *με* $\widehat{x}(a) := \langle x, u_a\rangle$, *όπου το* $\{u_a : a \in A\}$ *είναι ορθοκανονικό σύνολο. Τα* $\widehat{x}(a)$ *είναι οι συντελεστές Fourier του* x *ως προς το* $\{u_a : a \in A\}$.

(γ′) *Το ορθοκανονικό σύνολο* $\{u_a : a \in A\}$ *λέγεται μεγιστικό (ή πλήρες) αν δεν περιέχεται σε κανένα άλλο ορθοκανονικό σύνολο.*

Παρατήρηση Α′.1 *Αποδεικνύεται ότι κάθε ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *περιέχεται σε ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.*

Πρόταση Α′.3 *Έστω* $E = \{u_a : a \in A\}$ *ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου με εσωτερικό γινόμενο* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :*

(α) *Το* E *είναι μεγιστικό (πλήρες) ορθοκανονικό σύνολο.*

(β) *Αν* $x \in H$ *είναι τέτοιο ώστε* $x \perp E$, *τότε* $x = 0$.

Απόδειξη.
$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ *Αν* $x \in H, x \neq 0$ *και* $x \perp E$, *τότε το* $E \cup \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ *είναι ορθοκανονικό σύνολο που περιέχει το* E *(άτοπο). Επομένως αν* $x \perp E$, *τότε* $x = 0$.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ *Υποθέτουμε ότι το* E *δεν είναι μεγιστικό. Τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο* F *που περιέχει το* E, *δηλαδή* $F \supset E$. *Αν* $x \in F \backslash E$, *τότε* $\|x\| = 1$ *και* $x \perp E$ *(άτοπο).*
Άρα το E *είναι μεγιστικό.* ■

Θεώρημα Α′.4 *Έστω* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *χώρος με εσωτερικό γινόμενο και* $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *ορθοκανονικό σύνολο του* H. *Τότε*

(α) *Το* E *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

(β)
$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 , \quad a_k \in \mathbb{C} \quad .$$

(γ) *Για κάθε* $x \in spanE$ *είναι*
$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(k) e_k \quad .$$

(δ) *Ο* $M = spanE$ *είναι κλειστός υπόχωρος του* H.

(ε) *Για κάθε* $x \in H$, *το*
$$y_0 = \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(k) e_k \in M = spanE$$
είναι το μοναδικό στοιχείο του $M = spanE$ *τέτοιο ώστε*
$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : \ y \in M\} \quad .$$

(στ) Για κάθε $x \in H$ είναι

$$\sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(k)|^2 \leq \|x\|^2 \ . \qquad (\text{ανισότητα Bessel})$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη των (α), (β) και (γ) είναι εύκολη.

(δ) *Ο $M = spanE$ είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης και επομένως είναι κλειστός υπόχωρος του H.*
Από την Πρόταση Α΄.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle x - y_0, e_k \rangle = 0 \ , \quad k = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\langle x - y_0, e_k \rangle &= \langle x, e_k \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} \widehat{x}(j) e_j, e_k \right\rangle = \\
&= \widehat{x}(k) - \sum_{j=1}^{n} \widehat{x}(j) \langle e_j, e_k \rangle = \\
&= \widehat{x}(k) - \widehat{x}(k) = \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

<u>(β' **τρόπος**)</u> :

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 &= \|x\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 - 2 \cdot \Re \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k \langle x, e_k \rangle \right) = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(k)|^2 - 2 \cdot \Re \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k \widehat{x}(k) \right) - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(k)|^2 = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \widehat{x}(k)|^2 - \sum_{k=1}^{n} - |\widehat{x}(k)|^2 \ .
\end{aligned}$$

Επομένως το

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

γίνεται ελάχιστο αν και μόνο αν $\lambda_k = \widehat{x}(k), \ k = 1, \ldots, n$. Δηλαδή αν και μόνο αν

$$y_0 = \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(k) e_k \ .$$

(στ) Η απόδειξη προκύπτει από το γεγονός ότι :

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(k)|^2 \quad .$$

■

Παρατηρήσεις Α΄.1 *1. Αν $dimH = n$, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι :*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(k)|^2 \qquad \text{(ταυτότητα Parseval)}$$

Δηλαδή έχουμε ισότητα στην ανισότητα Bessel. Επίσης είναι :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(k) e_k \ , \quad \forall\, x \in H \quad .$$

2. Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε χώρο Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ αν $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο με

$$\overline{span\{u_n : n \in \mathbb{N}\}} = H \quad ,$$

τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2 = \|x\|^2 \qquad \text{(ταυτότητα Parseval)}$$

και

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \qquad \text{(σύγκλιση ως προς τη νόρμα)} \quad .$$

Άσκηση : *Αν $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι η κανονική ορθοκανονική βάση του ℓ_2, όπου $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots)$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $x = (x_n) \in \ell_2$ είναι*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(k) e_k \ , \quad \text{όπου} \ \ \widehat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle = x_k \quad .$$

Θεώρημα Α΄.5 *(Riesz-Fischer)*

Έστω $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Τότε οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \quad \text{όπου} \ \ c_n \in \mathbb{C} \quad ,$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Αν οι σειρές συγκλίνουν, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \right\|^2 \quad .$$

Επιπλέον, αν

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

τότε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ ,$$

δηλαδή

$$c_n = \widehat{x}(n) \ .$$

Απόδειξη.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν* $\forall\, \varepsilon > 0$, *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n > m \geq n_0$ *είναι :*

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k u_k \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \ .$$

Ισοδύναμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{συγκλίνει} \ .$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \right\|^2 \ .$$

Αν

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \ ,$$

δηλαδή

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n u_n \right\|^2 \ .$$

επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση έχουμε

$$\widehat{x}(k) = \langle x, u_k \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n, u_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle u_n, u_k \rangle = c_k \ .$$

■

Ορισμός Α΄.1 *Έστω* $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ *και* $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ *δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο και* $\varphi : H_1 \to H_2$ *μια γραμμική απεικόνιση. Η* φ *είναι μία ισομετρία αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή*

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \ , \quad \forall\, x, y \in H_1 \ .$$

Αν επιπλέον η φ *είναι "1-1" και επί, τότε η* φ *είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός. Σ' αυτή την Περίπτωση λέμε ότι οι χώροι* H_1 *και* H_2 *είναι ισομετρικοί.*

Πρόταση Α΄.6 *Αν οι* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *και* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο, τότε η* $\varphi : H_1 \to H_2$ *είναι μία ισομετρία αν και μόνο αν διατηρεί τη νόρμα. Δηλαδή αν και μόνο αν* $\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_1$.

Απόδειξη.

Είναι προφανές ότι μία ισομετρία διατηρεί τη νόρμα. Αντίστροφα, αν η φ *διατηρεί τη νόρμα και οι χώροι* H_1, H_2 *είναι πραγματικοί, τότε*

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle_2 &= \frac{1}{4}\cdot\left\{\|\varphi(x)+\varphi(y)\|_2^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_2^2\right\} = \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left\{\|\varphi(x+y)\|_2^2 - \|\varphi(x-y)\|_2^2\right\} = \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left\{\|x+y\|_1^2 - \|x-y\|_1^2\right\} = \\
&= \langle x,y\rangle_1 \ .
\end{aligned}$$

Αν οι χώροι H_1, H_2 *είναι μιγαδικοί, τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο :*

$$\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \frac{1}{4}\cdot\left\{\left(\|\varphi(x)+\varphi(y)\|_2^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_2^2\right) + \frac{i}{4}\cdot\left(\|\varphi(x)+i\varphi(y)\|_2^2 - \|\varphi(x)-i\varphi(y)\|_2^2\right)\right\} \ .$$

■

Θεώρημα Α΄.7 *Έστω* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *και* $P = span\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$

(α) Για κάθε $x \in H$ *είναι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2 \le \|x\|^2 \ . \qquad (\textit{ανισότητα Bessel}) \tag{A'.5}$$

Η συνάρτηση

$$f :\ H \to \ell_2 \ , \ \ \textit{με} \ \ f(x) = \widehat{x} \ , \ \ \textit{όπου} \ \ \widehat{x} = (\widehat{x}(n)) \ \ ,$$

είναι μία συνεχής γραμμική απεικόνιση του H *επί του* ℓ_2.

(β) Η ισότητα ισχύει στην (Α΄.5) *αν και μόνο αν* $x \in \overline{P}$. *Επομένως οι χώροι* $\overline{P}$ *και* ℓ_2 *είναι ισομετρικοί.*

Απόδειξη.

(α) Ως γνωστόν

$$\sum_{n=1}^{N} |\widehat{x}(n)|^2 \le \|x\|^2 \ , \ \forall\, N \in \mathbb{N} \ .$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Από την ανισότητα (A′.5) *έπεται ότι* $\widehat{x} = (\widehat{x}(n)) \in \ell_2$. *Προφανώς η* f *είναι συνεχής και γραμμική. Θα αποδείξουμε ότι η* f *είναι επί. Πράγματι, αν* $c_n \in \ell_2$, *από το Θεώρημα Riesz-Fischer υπάρχει* $x \in H$ *τέτοιο ώστε* $\widehat{x}(n) = c_n$. *Επιπλέον*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \in \overline{P} \ \text{ και } \ \|x\| = \|\widehat{x}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

(β) Αν $x \in H$, *επειδή*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ \text{ συγκλίνει } \ .$$

Το

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \in \overline{P} \ .$$

Επειδή

$$\left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n, u_k \right\rangle = 0 \ , \ \forall \ k \in \mathbb{N} \ ,$$

το

$$x - \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \in P^{\perp} = P^{-\perp} \ .$$

(*Εύκολα αποδεικνύεται ότι* $P^{\perp} = P^{-\perp}$).

Από το Θεώρημα Προβολής το

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n$$

είναι το μοναδικό στοιχείο του $\overline{P}$ *του οποίου η απόσταση από το* x *είναι η μικρότερη δυνατή.*

Επειδή

$$x - \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \perp \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ ,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \right\|^2 = \\ &= \left\| x - \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \right\|^2 \ . \end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \left\| x - \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \right\|^2 \le \|x\|^2 \ .$$

Άρα η ισότητα ισχύει στην (Α′.5) *αν και μόνο αν*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ .$$

Δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \overline{P}$.

■

<u>Σημείωση</u> : *Η σειρά* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n$ *λέγεται σειρά του* x *ως προς το ορθοκανονικό σύστημα* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός Α′.2 *Έστω* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *υποσύνολο του χώρου Hilbert* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. *Το* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονική βάση του* H *αν*

1. *Το* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονικό σύνολο.*

2. *Για κάθε* $x \in H$ *υπάρχουν* $c_n \in \mathbb{C}$ *τέτοια ώστε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \ .$$

Είναι $c_n = \langle x, u_n \rangle = \widehat{x}(n)$. *Δηλαδή*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ .$$

Πόρισμα Α′.8 *Αν το* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *με* $\overline{P} = \overline{span\{u_n : n \in \mathbb{N}\}}$ *τότε η* $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονική βάση.*

Παρατήρηση Α′.2 *Επειδή*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2 \le \|x\|^2 < \infty \ ,$$

από το Θεώρημα Riesz-Fischer υπάρχει $y \in H$ *τέτοιο ώστε*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ .$$

Επομένως

$$\widehat{x}(n) = \widehat{y}(n) \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Ισοδύναμα,

$$\langle x - y, u_n \rangle = 0 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Άρα, το ορθοκανονικό σύνολο $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι μεγιστικό (πλήρες) αν και μόνο αν είναι ορθοκανονική βάση.*

Θεώρημα Α΄.9 *(Χαρακτηρισμός ορθοκανονικών βάσεων)*

Έστω $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και $P = span\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

(α) Το $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μεγιστικό (πλήρες).

(β) Το $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση. Επομένως για κάθε $x \in H$ είναι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ .$$

Δηλαδή η σειρά Fourier του x, ως προς την ορθοκανονική βάση $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, συγκλίνει ως προς τη νόρμα στο x.

(γ) Το P είναι πυκνό στον H, δηλαδή $\overline{P} = H$.

(δ) Για κάθε $x \in H$ η ισότητα ισχύει στην ανισότητα Bessel. Δηλαδή

$$\|x\| = \|\widehat{x}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

(ε) Για κάθε $x, y \in H$ είναι

$$\langle x, y\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle \ .$$

Ισοδύναμα,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)} \ .$$

Απόδειξη.

$(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ *Η απόδειξη έγινε στην προηγούμενη παρατήρηση.*

$(\beta) \Leftrightarrow (\gamma)$ *Προκύπτει από το Θεώρημα Α΄.7 (Πόρισμα).*

$(\gamma) \Leftrightarrow (\delta)$ *Προκύπτει από το Θεώρημα Α΄.7.*

$(\delta) \Leftrightarrow (\varepsilon)$ *Αρκεί να αποδειχθεί ότι $(\delta) \Rightarrow (\varepsilon)$. Επειδή για κάθε $x, y \in H$ είναι*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) u_n \ , \ \ y = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{y}(k) u_k$$

και το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση, είναι

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x}(n)u_n, \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{y}(k)u_k \right\rangle = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(k)}\langle u_n,u_k\rangle = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)} \ .
\end{aligned}
$$

<u>(β' **τρόπος**)</u> :

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\cdot\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right\} = \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left\{\|\widehat{x}+\widehat{y}\|^2-\|\widehat{x}-\widehat{y}\|^2+i\,\|\widehat{x}+i\widehat{y}\|^2-i\,\|\widehat{x}-i\widehat{y}\|^2\right\} = \\
&= \langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle \ .
\end{aligned}
$$

$(\varepsilon) \Leftrightarrow (\alpha)$ *Αν* $x\in H$, *τότε*

$$
\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{x}(n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2 \ .
$$

Επομένως αν $\langle x,u_n\rangle=0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$, *τότε* $\|x\|=0$. *Δηλαδή* $x=0$. *Άρα από την Πρόταση Α΄.3 το* $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ *είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύστημα.* ■

Παράρτημα Β′

Σειρές Διανυσμάτων

Ορισμοί Β′.1 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα και $\{x_k\}$ μία ακολουθία διανυσμάτων του X.*

(α) *Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απόλυτα αν $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$*

(β) *Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει χωρίς συνθήκη (converges unconditionally) αν για κάθε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ συγκλίνει.*

(γ) *Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη αν συγκλίνει και δεν συγκλίνει χωρίς συνθήκη.*

Παρατηρήσεις Β′.1 *Αν $X = \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι :*

(α) *Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k,\ x_k \in \mathbb{R}$ συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν συγκλίνει χωρίς συνθήκη.*

(β) *Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει χωρίς συνθήκη και $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = x$.*

Για τις πραγματικές σειρές ισχύει το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα :

Θεώρημα Β′.1 (Θεώρημα Riemann) *Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ a_k \in \mathbb{R}$ συγκλίνει υπό συνθήκη (δεν συγκλίνει απόλυτα). Αν $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$, τότε υπάρχει μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\underline{\lim} S_n = a$ και $\overline{\lim} S_n = \beta$, όπου $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ειδικά, υπάρχει μετάθεση π τέτοια ώστε η $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ να αποκλίνει $[\alpha \neq \beta$ ή $|a| = \infty]$ ή να συγκλίνει σε οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό a $[\alpha = \beta]$.*

Θεώρημα Β′.2 *Ένας χώρος με νόρμα X είναι πλήρης (Banach) αν και μόνο αν κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει.*

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος Banach. Έστω η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \ \ \text{συγκλίνει απόλυτα} \ \ ,$$

δηλαδή η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \ \ \text{συγκλίνει} \ \ .$$

Αν

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \ , \ \ \text{για κάθε} \ \ \varepsilon > 0$$

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και $p \in \mathbb{N}$ είναι :

$$\sigma_{n+p} - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon \ \ .$$

Επομένως, αν

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

έχουμε :

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon \ \ .$$

Δηλαδή η $\{S_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο χώρο X. Άρα η $\{S_n\}$ θα συγκλίνει στο X. Ισοδύναμα, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \ \ \text{συγκλίνει} \ \ .$$

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι ο χώρος X δεν είναι Banach. Τότε υπάρχει ακολουθία Cauchy $\{x_n\}$ που δεν συγκλίνει στο X. Επειδή η $\{x_n\}$ είναι Cauchy, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $m, p \geq k_n$ είναι :

$$\|x_m - x_p\| < \frac{1}{2^n} \ \ . \tag{B΄.1}$$

Μπορούμε να πάρουμε : $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$.

Τότε η υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$ δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $x_{k_n} \to x \in X$, επειδή η $\{x_n\}$ είναι Cauchy θα είναι και $x_n \to x$ (άτοπο).

Είναι

$$\sum_{n=1}^{N} (x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) = x_{k_{N+1}} - x_{k_1} \ \ .$$

Επομένως η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) \ \ \text{δεν συγκλίνει} \ \ .$$

Όμως αυτή η σειρά συγκλίνει απόλυτα επειδή από την (B′.1) *είναι* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \ .$$

Άτοπο. Άρα ο X είναι χώρος Banach. ■

Πόρισμα B′.3 *Σε ένα χώρο Banach X κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά αυγκλίνει χωρίς συνθήκη.*

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απόλυτα. Δηλαδή η σειρά θετικών αριθμών :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \ \ \textit{συγκλίνει} \ .$$

Τότε όμως για κάθε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{\pi(k)}\| \ \ \textit{θα συγκλίνει} \ .$$

Από το Θεώρημα B′.2 και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} \ \ \textit{θα συγκλίνει} \ .$$

■

Γενικά, το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος δεν ισχύει για χώρους άπειρης διάστασης.

Παράδειγμα B′.1 *Έστω $X = \ell_2$ και $\{x_k\}$ η ακολουθία με $x_k = \left(\underbrace{0, \ldots, 0, 1/k}_{k}, 0, \ldots\right)$. Τότε για κάθε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = x \ \ ,$$

δηλαδή η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \ \ \textit{συγκλίνει χωρίς συνθήκη} \ .$$

Επειδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \ \ ,$$

η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \ \ \textit{δεν συγκλίνει απόλυτα} \ .$$

Σ' ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση χωρίς συνθήκη :

Θεώρημα Β΄.4 *Υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης. Τότε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ διανυσμάτων του X συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν συγκλίνει χωρίς συνθήκη.*

Απόδειξη.

Από το Πόρισμα, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε θα συγκλίνει χωρίς συνθήκη.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ συγκλίνει χωρίς συνθήκη } .$$

Αν $dim X = N$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = \ell_1^N$. Θεωρούμε τα γραμμικά συναρτησιακά $f_k,\ k = 1, \ldots, N$, τέτοια ώστε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \ell_1^N$ είναι :

$$f_k(x) = x_k \ , \ \ k = 1, \ldots, N \ \ .$$

Επειδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ συγκλίνει χωρίς συνθήκη } ,$$

τότε και η αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x_n) \ , \ k = 1, \ldots, N \ , \ \ \text{συγκλίνει χωρίς συνθήκη } .$$

Επομένως η αριθμητική σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_n) \ \ \text{συγκλίνει απόλυτα } ,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_n)| < \infty \ \ \text{για } \ k = 1, \ldots, N \ \ .$$

Άρα :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k(x_n)| \right) < \infty \ \ .$$

■

Παρατήρηση Β΄.1 *Πιο γενικά, αν ο X είναι χώρος Banach, οι A. Dvoretzky-C.A.Rogers απέδειξαν ότι :*
“ Αν στο X κάθε συγκλίνουσα χωρίς συνθήκη σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε ο X είναι πεπερασμένης διάστασης ”. Ισοδύναμα,
“ Αν ο X είναι άπειρης διάστασης, τότε υπάρχει σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ που συγκλίνει χωρίς συνθήκη με $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \infty$. ”

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του επόμενου πιο γενικού θεωρήματος :

Θεώρημα Β΄.5 (Θεώρημα DVORETZKY-ROGERS) *Έστω X είναι ένας χώρος Banach άπειρής διάστασης και $\{a_n\}$ μία ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία διανυσμάτων $\{x_n\}$ του X τέτοια ώστε $\|x_n\| = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει χωρίς συνθήκη.*

Το επόμενο θεώρημα γενικεύει γνωστό αποτέλεσμα των αριθμητικών σειρών.

Θεώρημα Β΄.6 *Αν σ' ένα χώρο με νόρμα X η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει χωρίς συνθήκη, τότε για κάθε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad .$$

Απόδειξη. *Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$ και ότι για κάποια μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = y\,, \quad \text{με } x \neq y.$$

Τότε υπάρχει συναρτησιακό $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$. Επομένως θα έχουμε :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = f(x) \neq f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\pi(k)}) \quad .$$

Δηλαδή οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \ \text{ και } \ \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\pi(k)}) \ \text{ συγκλίνουν}$$

και είναι :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \neq \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\pi(k)}) \quad .$$

Επομένως η αριθμητική σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \ \text{ συγκλίνει υπό συνθήκη}$$

(δεν συγκλίνει απόλυτα) και από το Θεώρημα Riemann υπάρχει μετάθεση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\sigma(k)}) = \infty \quad .$$

Κατά συνέπεια και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} \ \text{ θα αποκλίνει } \ .$$

Άρα, για οποιαδήποτε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ θα είναι

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} \quad .$$

∎

Βιβλιογραφία

[1] *L. V. Ahlfors,* Complex Analysis (3rd edition)*, McGraw-Hill, 1979.*

[2] *G. Alexits,* Convergence Problems of Orthogonal Series*, Pergamon, 1961.*

[3] *D. Amir,* Characterizations of inner product spaces*. Operator Theory: Advances and Applications, 20. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.*

[4] *J. Arias de Reyna,* Pointwise Convergence of Fourier Series*, Springer–Verlag (Series: Lecture Notes in Mathematics , Vol. 1785), 2002.*

[5] *G. Bachmann, L. Narici and E. Beckenstein,* Fourier and Wavelet Analysis (2nd printing)*, Springer–Verlag (Series: Universitext), 2002.*

[6] *N.K. Bary,* A Treatise on Trigonometric Series (volumes $I\,\&\,II$) *(translated from the Russian by Margaret F. Mullins), Pergamon Press Ltd. , 1964.*

[7] *E. F. Beckenbach, E. Bellman,* Inequalities (fourth printing)*, Springer–Verlag, 1983.*

[8] *R. P. Boas,* Entire functions*, Academic Press, 1954.*

[9] *S. Bochner, K. Chandrasekharan,* Fourier Transforms (reprinted)*, Princeton University Press, 1953.*

[10] *L. Carleson,* On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math.* **116** *(1966), 135–157.*

[11] *E. W. Cheney,* Introduction to Approximation Theory *(2nd ed., 2nd AMS printing), AMS Chelsea Publishing, 2000.*

[12] *M. M. Day,* Normed linear spaces*. Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.*

[13] *L. Debnath, P. Mikusiński,* Introduction to Hilbert Spaces with Applications *(3rd ed.), Academic Press, 2005.*

[14] *A. Deitmar,* A First Course in Harmonic Analysis *(2nd ed.), Springer–Verlag (Series: Universitext), 2005.*

[15] *J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge,* Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press (Series: Cambridge Studies in Advanced Mathematics (No. 43)), 1995.*

[16] *J. Diestel; J. H. Fourie; J. Swart,* The metric theory of tensor products. Grothendieck's résumé revisited*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.*

[17] *R. G. Douglas,* Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, (2nd ed.), Series: Graduate Texts in Mathematics , Vol. 179. Springer-Verlag, 1998.*

[18] *H. Dym, H.P. McKean,* Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1985.*

[19] *R. E. Edwards,* Fourier Series, vol. 1 *(2nd edition), Springer–Verlag, 1979.*

[20] *R. E. Edwards,* Fourier Series, vol. 2 *(2nd edition), Springer–Verlag, 1982.*

[21] *P. Enflo,* A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math.,* **130** *(1973), 309–317.*

[22] *C. Fefferman,* Pointwise convergence of Fourier series*, Ann. of Math. (2)* **98** *(1973), 551–571.*

[23] *D. J. H. Garling,* Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.*

[24] *C. Gasquet, P. Witomski,* Fourier Analysis and Applications (Filtering, Numerical Computation, Wavelets)*, Springer–Verlag (Series: Texts in Applied Mathematics , Vol. 30), 1999.*

[25] *B. R. Gelbaum,* Problems in Real and Complex Analysis*, Springer–Verlag (Series: Problem Books in Mathematics), 1992.*

[26] *I.M. Gelfand, G.E. Shilov,* Generalized Functions–Volume 2: Fundamentals and Generalized Functions*, Academic Press, 1968.*

[27] *C. George,* Exercises in Integration *, Springer–Verlag, 1984.*

[28] *R. R. Goldberg ,* Fourier Transforms*, Series: Cambridge Tracts in Mathematics (No. 52), Cambridge University Press, 2009.*

[29] *J. P. Gram,* Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate*, Journal Reine Angew Math.* **94** *(1883), 41–73.*

[30] *U. Haagerup,* The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Math.* **70** *(1981), no. 3, 231–283 (1982).*

[31] *G. H. Hardy,* Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc.* **17** *(1916), no. 3, 301–325.*

[32] *G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya,* Inequalities (2nd ed.)*, Cambridge University Press, 1988.*

[33] *H. Helson,* Harmonic Analysis *(2nd ed.), Henry Helson, 1995.*

[34] *E. Hewitt, K.A. Ross,* Abstract Harmonic Analysis *(2nd ed. 1979, 2nd printing), Springer–Verlag, 1994.*

[35] *R. A. Hunt,* On the convergence of Fourier series*, 1968 Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967) pp. 235–255 Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill..*

[36] *S. Igari ,* Real Analysis – With an introduction to wavelet theory *, American Mathematical Society (Translations of Mathematical Monographs , vol. 177) , 1998.*

[37] *F. Jones ,* Lebesgue Integration on Euclidean Space (revised edition) *, Jones and Bartlett Publishers International, 2001.*

[38] *P. Jordan, J. Von Neumann,* On inner products in linear, metric spaces*, Ann. of Math. (2)* **36** *(1935), no. 3, 719–723*

[39] *B.S. Kashin, A.A. Saakyan,* Orthogonal Series*, American Mathematical Society (Translations of Mathematical Monographs), 2005.*

[40] *Y. Katznelson,* An Introduction to Harmonic Analysis (3rd edition) *, Cambridge University Press, 2004.*

[41] *A. N. Kolmogoroff [Kolmogorov],* Une série de Fourier-Lebesque divergente partout*, C. R. Acad. Sci. Paris* **183** *(1926), 1327–1329.*

[42] *T.W. Körner,* Fourier Analysis *, Cambridge University Press, 1988.*

[43] *T.W. Körner,* Exercises in Fourier Analysis *, Cambridge University Press, 1993.*

[44] *S.G. Krantz,* A Panorama of Harmonic Analysis*, The Mathematical Association of America (Series: Carus Mathematical Monographs, no. 27), 1999.*

[45] *E. Kreyszig,* Introductory Functional Analysis with Applications *, John Wiley & Sons (Wiley Classics Library Edition), 1989.*

[46] *M. Lacey; C. Thiele,* A proof of boundedness of the Carleson operator*, Math. Res. Lett.* **7** *(2000), no. 4, 361–370.*

[47] *R. Lasser,* Introduction to Fourier Series*, Marcel Dekker Inc., 1996.*

[48] *B. Ya. Levin,* Lectures on entire functions*, American Mathematical Society (Translations of Mathematical Monographs , vol.), 1996.*

[49] *G.G. Lorentz,* Approximation of functions*, AMS Chelsea Publishing, 2005.*

[50] *L.H. Loomis,* An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, 1953.*

[51] *L.H. Loomis,* Harmonic analysis: [lectures presented at the] 1965 MAA Cooperative Summer Seminar*, The Mathematical Association of America, 1965.*

[52] *W. A. J. Luxemburg,* A property of the Fourier coefficients of an integrable function*, Amer. Math. Monthly* **69** *(1962), 94–98.*

[53] *B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, A. N. Podkorytov,* Selected Problems in Real Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1998.*

[54] *J. Mashreghi,* Representation Theorems in Hardy Spaces*, Cambridge University Press, Series: London Mathematical Society Student Texts (No. 74), 2009.*

[55] *M.A. Naimark ,* Normed rings *(translated from the Russian by Leo F. Boron), P. Noordhoff , 1964.*

[56] *I. P. Natanson ,* Theory of functions of a real variable (vol.2) *(translated from the Russian by Leo F. Boron , fourth printing), Frederick Ungar Publishing Co. , 1960.*

[57] *I. P. Natanson ,* Constructive Function Theory- Volume 1: Uniform Approximation *(translated from the Russian by Alexis N. Obolensky), Frederick Ungar Publishing Co., 1964*

[58] *B.G. Osgood ,* Lectures on the Fourier transform and its applications *, American Mathematical Society (Series: Pure and applied undergraduate texts , vol. 33) , 2019.*

[59] *R. Osserman,* The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc.* **84** *(1978), no. 6, 1182–1238.*

[60] *G. Pólya, G. Szegö,* Problems and Theorems in Analysis I*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.*

[61] *W. Rudin,* Real and Complex Analysis (3rd ed.) *, McGraw-Hill, 1987.*

[62] *W. Rudin,* Functional Analysis (2nd ed.) *, McGraw-Hill, 1991.*

[63] *W. Rudin,* Fourier Analysis on Groups *, John Wiley & Sons (Wiley Classics Library Edition), 1990.*

[64] *E. M. Stein and R. Shakarchi ,* Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.*

[65] K. R. Stromberg , Introduction to Classical Real Analysis , *Chapman & Hall, 1981.*

[66] E. C. Titchmarsh , The Theory of Functions, *Oxford University Press, 1979.*

[67] R. L. Wheeden and A. Zygmund , Measure and integral , *Marcel Dekker, Inc. , 1977.*

[68] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets , *Cambridge University Press (Series: London Mathematical Society Student Texts (No. 37)), 2003.*

[69] R. M. Young, An elementary proof of a trigonometric identity, *Amer. Math. Monthly 86 (1979), no. 4, 296–297.*

[70] A. C. Zaanen , Continuity, Integration and Fourier Theory, *Springer- Verlag (Universitext), 1989.*

[71] A. Zygmund, Trigonometric series (3rd ed.)(volumes $I \& II$ combined) , *Cambridge University Press, 2003.*