Άσκηση 1. Έστω X σύνολο και $\{A_n\}$ ακολουθία υποσυνόλων του X. Θέτουμε $A = \lim_n \sup A_n$ και $B = \lim_n \inf A_n$. Τότε $\chi_A = \lim_n \sup \chi_{A_n}$ και $\chi_B = \lim_n \inf \chi_{A_n}$.

Λύση: Έστω $x \in A$. Επειδή από τον ορισμό $A = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$, έπεται ότι για κάθε n, υπάρχει $k \geq n$, ώστε $x \in A_k$. Άρα για κάθε n, υπάρχει $k \geq n$, ωστε $\chi_{A_k}(x) = 1$. Συνεπώς για κάθε n, $sup_{k\geq n}\chi_{A_k}(x) = 1$. Άρα και $\inf_n \sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 1$, ή πάλι από τον ορισμό, $\lim_n \sup \chi_{A_n}(x) = 1$.

Έστω $x \notin A$. Άρα, από τον ορισμό του A, υπάρχει n, ώστε για κάθε $k \geq n$, $x \notin A_k$. Επομένως, γι' αυτό το n και για κάθε $k \geq n$, $\chi_{A_k}(x) = 0$. Άρα για το ίδιο n, $\sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 0$ και συνεπώς $\inf_n \sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 0$, ή διαφορετικά από τον ορισμό, $\lim_n \sup \chi_{A_n}(x) = 0$.

Ανάλογα δουλεύουμε και στην περίπτωση του $\lim_n \inf$. □

Άσκηση 2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to \mathbb{R}$ ώστε το $[f \neq g]$ είναι μ-μηδενικό. Αν η f είναι μ-μετρήσιμη, τότε και η g είναι μ-μετρήσιμη.

Λύση: Έστω $r \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $A = [f \neq g]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}[g \leq r] &= ([g \leq r] \cap A) \cup ([g \leq r] \cap A^c)\\ &= ([g \leq r] \cap A) \cup ([f \leq r] \cap A^c).\end{aligned}$$

Το πρώτο σύνολο είναι μ-μηδενικό σαν υποσύνολο του A, ενώ το δεύτερο είναι μ-μετρήσιμο σαν τομή του $[f \leq r]$ που είναι εξ' ορισμού μ-μετρήσιμο και του A^c που είναι συμπλήρωμα μ-μηδενικού. □

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία μια ακολουθία μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων συγκλίνει, είναι μετρήσιμο.

Λύση: Παρατηρούμε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_n$ συγκλίνει, γράφεται $[\lim_n \sup f_n = \lim_n \inf f_n]$, επομένως, αφού οι συναρτήσεις $\lim_n \sup f_n$ και $\lim_n \inf f_n$ είναι μετρήσιμες, μετρήσιμο θα είναι και το παραπάνω σύνολο. □

Άσκηση 10, σελ. 87.

Λύση: Δοθέντος $x \in X$, το σύνολο $\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\}$ είναι κάτω φραγμένο και μη κενό.

Πραγματικά, $x \in X = \cup_{a\in\mathbb{R}} E_a$, άρα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$, ώστε $x \in E_a$ και το σύνολο είναι μη κενό.

Από την άλλη, $\cap_{a\in\mathbb{R}} E_a = \varnothing$ και άρα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $x \notin E_a$. Για $b \leq a$, $E_b \subseteq E_a$, άρα $x \notin E_b$ επίσης, δηλαδή το a είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\}$.

Ισχυρισμός: Για $\omega \in \mathbb{R}$, $[f \leq \omega] = \cap_{k\in\mathbb{N}} E_{\omega+1/k}$.

Έστω $x \in [f \leq \omega]$. Άρα $f(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\} \leq \omega$. Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\omega + 1/k > \inf\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\}$ και συνεπώς υπάρχει $a < \omega + 1/k$ ώστε $x \in E_a$.

Από τα δεδομένα τώρα, $E_a \subseteq E_{\omega+1/k}$, συνεπώς $x \in E_{\omega+1/k}$ επίσης. Έπεται $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} E_{\omega+1/k}$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} E_{\omega+1/k}$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\omega + 1/k \in \{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\}$ και συνεπώς για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $f(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\} \leq \omega + 1/k$, άρα και $f(x) \leq \omega$, δηλαδή $x \in [f \leq \omega]$.

Από τον παραπάνω ισχυρισμό, έπεται ότι για καθε $\omega \in \mathbb{R}$, το σύνολο $[f \leq \omega]$ είναι μετρήσιμο σαν αριθμήσιμη τομή μετρήσιμων συνόλων.

Αν τώρα $a \in \mathbb{R}$ και $x \in E_a$, τότε $a \in \{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\}$ συνεπώς $f(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\} \leq a$.

Αντίστροφα, αν $x \notin E_a$, τότε για κάθε $b \leq a$, $E_b \subseteq E_a$, άρα $x \notin E_b$. Έπεται ότι το a είναι κάτω φράγμα για το σύνολο $\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\}$, άρα $f(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} : x \in E_a\} \geq a$. □

Άσκηση 14, σελ. 88.

Λύση: Θέτουμε $Z = \lim_n \sup[f_n > a]$.

Παρατηρούμε πρώτα, ότι αν $'vx \in \mathbb{R} \setminus Z$, τότε $x \notin \cap_n \cup_{k=n}^{\infty} [f_k > a]$, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $k \geq n$, $f_k(x) \leq a$, συνεπώς και $\lim_n \sup f_n(x) \leq a$.

Αρκεί συνεπώς να δείξουμε ακόμα ότι $\lambda(Z) = 0$. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι η ακολουθία συνόλων $(\cup_{k=n}^{\infty}[f_k > a])_n$ είναι φθίνουσα και το μέτρο του πρώτου όρου είναι (από την υποπροσθετικότητα του μέτρου)

$$\lambda(\cup_{k=1}^{\infty}[f_k > a]) \leq \Sigma_{k=1}^{\infty}\lambda([f_k > a]) < \infty.$$

Άρα από σχετική πρόταση, θα έχουμε ότι

$$\lambda(Z) = \lambda(\cap_n \cup_{k=n}^{\infty} [f_k > a]) = \lim_n \lambda(\cup_{k=n}^{\infty}[f_k > a]).$$

Για να δείξουμε ότι το τελευταίο όριο είναι 0, έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\Sigma_{n=1}^{\infty}\lambda([f_k > a]) < \infty$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\Sigma_{k=n_0}^{\infty}\lambda([f_k > a]) < \epsilon.$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0$,

$$0 \leq \lambda(\cup_{k=n}^{\infty}[f_k > a]) \leq \Sigma_{k=n}^{\infty}\lambda([f_k > a]) \leq \Sigma_{k=n_0}^{\infty}\lambda[f_k > a] < \epsilon$$

και συνεπώς $\lim_n \lambda(\cup_{k=n}^{\infty}[f_k > a]) = 0$. □

Άσκηση 15, σελ. 88.

Λύση: Παρατήρηση: Οι f_n, $n \in \mathbb{N}$ οφείλουν να είναι μη αρνητικές:

Έστω π.χ. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε για οποιαδήποτε ακολουθία ϵ_n που τείνει στο 0, $[f_n > \epsilon_n] = \varnothing$ και συνεπώς $\Sigma_{n=1}^{\infty}\lambda([f_n > \epsilon_n]) = 0 < \infty$, αλλά προφανώς $\lim_n f_n(x) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω λοιπόν f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές. Δοθέντος $a > 0$, επειδή $\epsilon_n \to 0$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\epsilon_n < a$. Επομένως, για κάθε $n \geq n_0$,

$$[f_n > \epsilon_n] \supseteq [f_n > a], \quad \text{άρα και} \quad \lambda([f_n > \epsilon_n]) \geq \lambda([f_n > a]).$$

Έπεται ότι

$$\infty > \Sigma_{n=n_0}^{\infty}\lambda([f_n > \epsilon_n]) \geq \Sigma_{n=n_0}^{\infty}\lambda([f_n > a])$$

και συνεπώς $\Sigma_{n=1}^{\infty}\lambda([f_n > a]) < \infty$.

Από την άσκηση 14, προκύπτει ότι για κάθε $a > 0$, υπάρχει $Z_a \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z_a) = 0$, ώστε $\lim_n \sup f_n(x) \leq a$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z_a$. Θέτουμε $Z = \cup_{k\in\mathbb{N}} Z_{1/k}$. Προφανώς $\lambda(Z) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\lim_n \sup f_n(x) \leq 1/k$. Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, $\lim_n \sup f_n(x) = 0$ και επειδή οι f_n υποτέθηκαν μη αρνητικές, έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, $\lim_n f_n(x) = 0$. $\square$