Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

Βελτιστοποίηση δικτύων

20 Ιανουαρίου 2023

Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι – Ορισμοί

- Ο πολυωνυμικός αλγόριθμος $\mathcal{A}$ που επιλύει ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\mathcal{P}$ λέγεται δ–προσεγγιστικός αν για κάθε περίσταση I του $\mathcal{P}$ η λύση $\mathcal{A}(I)$ που επιτυγχάνει συγκρινόμενη με τη βέλτιστη λύση $\mathrm{OPT}(I)$ έχει την ιδιότητα

$$\frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)} \leq \delta$$

  όπου $\delta > 1$.
- Ο λόγος

$$R_{\mathcal{A}}(I) = \frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)}$$

  είναι ο λόγος επίδοσης του αλγ. $\mathcal{A}$ για την περίσταση I.
- Ο απόλυτος λόγος επίδοσης ενός προσεγγιστικού αλγόριθμου ορίζεται ως

$$R_{\mathcal{A}} = \inf\{r \geq 1 | R_{\mathcal{A}}(I) \leq r, \ \forall I\}$$

Τρόποι εκτίμησης της επίδοσης προσεγγιστικού αλγόριθμου

- Η προηγούμενη μέθοδος ορισμού της επίδοσης είναι αυτή της χειρότερης εκδοχής, επειδή προφανώς αρκεί μια περίσταση *I* για να χειροτερέψει το δ.
- Η μέση επίδοση είναι μια άλλη μέθοδος αποτύπωσης της επίδοσης. Ωστόσο προϋποθέτει γνώση της κατανομής των περιστάσεων.
- Πρακτικά η αποδοτικότητα (πλήθος πράξεων) ενός πολυωνυμικού αλγόριθμου είναι σημαντικό ζήτημα και μπορεί κανείς να κληθεί να επιλέξει αν θα ανεχθεί περισσότερο χρόνο εκτέλεσης για να επιτύχει μικρότερο δ.

Σχήμα προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου

- Μια οικογένεια προσεγγιστικών αλγορίθμων $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_\epsilon$ για ένα πρόβλημα $\mathcal{P}$ λέγεται *σχήμα προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου* (polynomial-time approximation scheme, PTAS) αν
  - ο αλγόριθμος $\mathcal{A}_\epsilon$ είναι $1+\epsilon$ - προσεγγιστικός και
  - ο χρόνος εκτέλεσής του είναι πολυωνυμικός ως προς το μέγεθος της εισόδου για σταθερό ϵ.
- Μια οικογένεια προσεγγιστικών αλγορίθμων $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_\epsilon$ για ένα πρόβλημα $\mathcal{P}$ λέγεται *πλήρως πολυωνυμικό σχήμα προσέγγισης* (fully polynomial-time approximation scheme, FPTAS) αν
  - ο αλγόριθμος $\mathcal{A}_\epsilon$ είναι $1+\epsilon$ - προσεγγιστικός και
  - ο χρόνος εκτέλεσής του είναι πολυωνυμικός ως προς το μέγεθος της εισόδου και ως προς το $\frac{1}{\epsilon}$.

Καταμερισμός εργασίας σε m μηχανές

- Πιθανώς η παλαιότερη ανάλυση της χείριστης συμπεριφοράς ενός προσεγγιστικού αλγόριθμου είναι εκείνη του Ron Graham, 1966, για το παρακάτω πρόβλημα [Hochbaum, 1997]:

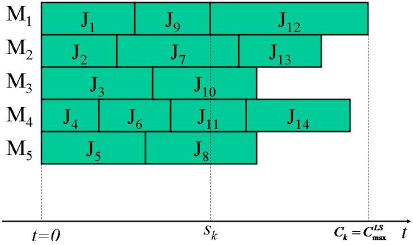
Δεδομένων n εργασιών J_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ διάρκειας $p_i > 0$ αντίστοιχα και m όμοιων μηχανών M_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, να υπολογισθεί ο ελάχιστος συνολικός χρόνος περάτωσης των εργασιών.

- Υποτίθεται ότι κάθε εργασία πρέπει να εκτελεσθεί σε μια οποιαδήποτε μηχανή χωρίς διακοπή.

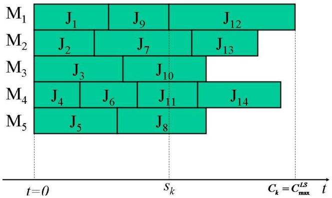
Χρονοπρογραμματισμός με αυθαίρετη σειρά

- Τι θα γίνει αν αναθέσουμε τις εργασίες με τυχούσα σειρά; Την απάντηση δίνει ο επόμενος αλγόριθμος.
- Αλγόριθμος *list scheduling*:
  - Σχηματίζεται ένας κατάλογος των εργασιών με αυθαίρετη σειρά.
  - Αρχικά οι πρώτες m εργασίες ανατίθενται σύμφωνα με τη σειρά του καταλόγου στις πρώτες m μηχανές.
  - Κατόπιν, και μόλις ελευθερώνεται μια μηχανή, ανατίθεται σ' αυτήν η επόμενη στον κατάλογο εργασία.
- Ο Graham παρατήρησε ότι ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος απο τον ελάχιστο δυνατό χρόνο επί $2 - \frac{1}{m}$ φορές.

Γεωμετρική απόδειξη:



- Έστω s_j και C_j η αρχή και το τέλος της εργασίας J_j, που έχει διάρκεια $p_j = C_j - s_j$.
- Έστω επίσης J_k η εργασία που ολοκληρώνεται τελευταία όταν ακολουθείται η σειρά του καταλόγου.
- Καμμιά μηχανή δεν μπορεί να έχει σταματήσει να εργάζεται πριν τη στιγμή s_k, διαφορετικά αυτή θα είχε αρχίσει να εκτελείται νωρίτερα.

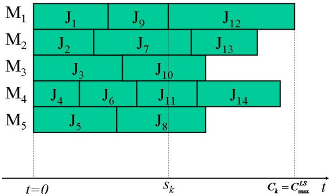


- Έστω $C^*_{\max}$ ο ελάχιστος χρόνος περάτωσης.
- Έστω $C^{LS}_{\max}$ ο χρόνος περάτωσης όταν οι εργασίες εκτελούνται με τη σειρά του καταλόγου.
- Ισχύει ότι

$$C^*_{\max} \geq p_k$$

και

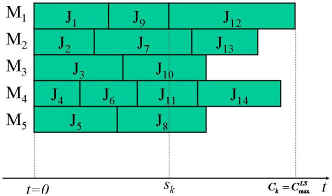
$$C^*_{\max} \geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} p_j$$



- Η τελευταία εργασία, αν οι μηχανές τελείωναν τις άλλες εργασίες συγχρόνως, θα άρχιζε τη στιγμή $\frac{1}{m}\sum_{j\neq k} p_j$.
- Επειδή όμως εν γένει δεν συμβαίνει να τερματίζουν οι μηχανές συγχρόνως, η τελευταία εργασία θα αρχίσει ενωρίτερα, δηλαδή

$$s_k \leq \frac{1}{m}\sum_{j\neq k} p_j$$

- Επομένως



$$
\begin{aligned}
C_{\max}^{LS} &= C_k = s_k + p_k \leq \frac{1}{m} \sum_{j \neq k} p_j + p_k \\
&= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} p_j + \left(1 - \frac{1}{m}\right) p_k \\
&\leq C_{\max}^{*} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) C_{\max}^{*} = \left(2 - \frac{1}{m}\right) C_{\max}^{*}
\end{aligned}
$$

Συμπέρασμα:

Η εκτέλεση εργασιών σε σύνολο m όμοιων μηχανών με αυθαίρετη σειρά χρειάζεται χρόνο το πολύ $2 - 1/m$ φορές μεγαλύτερο από τον ελάχιστο δυνατό.

Διάταξη εργασιών για την ελαχιστοποίηση των καθυστερήσεων

- Δίνεται **μόνο μια μηχανή** και εργασίες J_j με αντίστοιχη διάρκεια p_j και προθεσμία περάτωσης d_j.
- Αν στο χρονοπρόγραμμα Σ ο χρόνος περάτωσης της εργασίας j είναι $C_j(\Sigma)$, η εργασία j καθυστερεί κατά

$$L_j(\Sigma) = C_j(\Sigma) - d_j$$

- Στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η μέγιστη από τις καθυστερήσεις των διαφόρων εργασιών

$$L_{\max} = \max_{1 \le j \le n} L_j$$

- Την ελάχιστοποιημένη μέγιστη καθυστέρηση παριστάνουμε με $L^*_{\max}$.

Παρατηρήσεις ως προς το κατάλληλο μέτρο σφάλματος

Το να επιζητείται στην προηγούμενη περίπτωση το μέτρο του σφάλματος ενός προσεγγιστικού αλγόριθμου $\mathcal{A}$ να περιγραφεί από συντελεστή $\rho = \mathcal{A}/\,\mathrm{OPT}$, που σημαίνει ότι το προσεγγιστικό αποτέλεσμα είναι ρ φορές μεγαλύτερο από το βέλτιστο ($\rho > 1$), αποτελεί μεθοδολογικό σφάλμα για δύο λόγους:

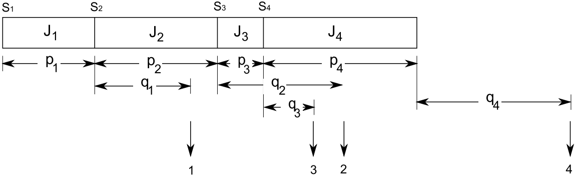
1. Αν $L^*_{\max} < 0$, η απαίτηση να δίνει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος αποτέλεσμα μικρότερο από $\rho L^*_{\max}$ όπου $\rho > 1$ δεν αποτελεί ανοχή, αλλά απαίτηση για λύση καλύτερη από τη βέλτιστη, πράγμα αδύνατο.
2. Αν από κάθε προθεσμία d_j αφαιρεθεί το ίδιο ποσό K, το $L^*_{\max}$ γίνεται ακριβώς μεγαλύτερο κατά K. Μάλιστα ένας τρόπος να αποφευχθεί η περίπτωση $L^*_{\max} < 0$ είναι να γίνουν όλες οι προθεσμίες μη θετικές.

Εργασίες με χρόνους ωρίμανσης - Παράδειγμα

Ένας επιπλοποιός έχει συγκεντρώσει πριν τις θερινές του διακοπές παραγγελίες για n διαφορετικά έπιπλα, που αφού τα κατασκευάσει και τα βάψει τα αφήνει να στεγνώσουν για μερικές μέρες πριν την τελική παράδοση. Τα έπιπλα έχουν διαφορετικές μπογιές και διαφορετικούς χρόνους στεγνώματος. Πώς θα τα παραδώσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο για να φύγει για διακοπές;

Χρονοπρογραμματισμός εργασιών με χρόνους ωρίμανσης

- Στο προηγούμενο πρόβλημα ας υποτεθεί επιπροσθέτως ότι μετά το τέλος μιας εργασίας στη μία και μοναδική μηχανή, χρειάζεται για την τελική παράδοση του προϊόντος και πρόσθετο χρονικό διάστημα q_j εκτός μηχανής.
- Δηλαδή ο τελικός χρόνος παράδοσης είναι $s_j + p_j + q_j$.



- Ζητείται και πάλι να ελαχιστοποιηθεί το

$$L_{\max} = \max_{1 \le j \le n} \{s_j + p_j + q_j\}$$

τοποθετώντας τις εργασίες στη μηχανή σε κατάλληλη σειρά.

Λύση:

- Η λύση είναι απλή και συνίσταται στο να τοποθετηθούν οι εργασίες κατά σειρά φθίνοντος χρόνου ωρίμανσης q_j.
- Η απόδειξη είναι απλή: Αν δεν είναι στη σειρά αυτή, έστω ζεύγος διαδοχικών εργασιών J_j, J_k, που όμως έχουν $q_j < q_k$. Αν αντιστραφεί η σειρά τους το $L_{\max}$ είτε βελτιώνεται είτε μένει ως έχει. Εκτελώντας όλες τις δυνατές αντιστροφές φτάνουμε στη σειρά που περιγράφτηκε παραπάνω.

Διαφορετικοί χρόνοι άφιξης των εργασιών

- Στην παραλλαγή αυτή του προβλήματος χρονοπρογραμματισμού η εργασία J_j μπορεί να αρχίσει να εκτελείται μόνο μετά από τη στιγμή r_j, από την οποία και μετά είναι διαθέσιμη.
- Το μοντέλο αυτό ονομάζεται $1|r_j|L_{\max}$ και είναι ισχυρώς NP-hard με εύκολη αναγωγή από το 3-PARTITION.[1]
- Μια γενίκευση του αλγόριθμου list scheduling (LS) του Graham προκύπτει αν θεωρηθεί ότι μόλις ελευθερωθεί η μηχανή, προωθείται προς αυτήν η πρώτη στη σειρά από τις *διαθέσιμες* εργασίες.

[1] Στο 3-PARTITION δίνεται ένα πολυσύνολο φυσικών αριθμών και ζητείται να χωριστεί σε τριάδες με το ίδιο άθροισμα.

Όριο επίδοσης LS, μέρος I

Θεώρημα: $L_{\max}^{LS} < 2L_{\max}^{*}$.

Απόδειξη:

- Ισχύουν οι εξής δύο παρατηρήσεις:
  1. Ο βέλτιστος χρόνος ολοκλήρωσης δεν μπορεί να είναι μικρότερος από το άθροισμα των χρόνων μόνο επεξεργασίας όλων μαζί των εργασιών:

$$L_{\max}^{*} \geq P = \sum_{j=1}^{n} p_j \qquad (1)$$

Όριο επίδοσης LS, μέρος II

2. Επίσης δεν μπορεί να είναι μικρότερος από τον συνολικό χρόνο (άφιξης και επεξεργασίας και ωρίμανσης) οποιασδήποτε εργασίας:

$$L^*_{\max} \geq r_j + p_j + q_j, \text{ για } j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

- Έστω k η εργασία που ολοκληρώνεται τελευταία και έχει επομένως χρόνο έναρξης s_k. Ισχύει

$$L^{LS}_{\max} = s_k + p_k + q_k$$

- Ισχύει όμως για την τελευταία εργασία και ότι

$$s_k \leq r_k + P$$

όπου r_k είναι ο χρόνος που γίνεται διαθέσιμη, διότι:

Όριο επίδοσης LS, μέρος III

- Έστω ότι η J_k είναι τελευταία επειδή έγινε διαθέσιμη μετά την περάτωση των άλλων. Τότε ισχύει $s_k = r_k$.
- Έστω ότι η J_k έγινε διαθέσιμη πριν τελειώσουν οι άλλες. Μετά την άφιξή της δεν μπορεί να υπάρχει κενό στην εκτέλεσή τους (διαφορετικά θα είχε παρεμβληθεί και η εκτέλεσή της θα άρχιζε ακόμη νωρίτερα). Επομένως δεν μπορεί να καθυστερήσει η εκτέλεσή της περισσότερο από $\sum_{j \neq k}^{n} p_j < P$. Άρα ο χρόνος έναρξης της εργασίας k δεν μπορεί να περάσει το $r_k + P$, δηλαδή $s_k < r_k + P$.

- Άρα
$$L_{\max}^{LS} = s_k + p_k + q_k < (r_k + P) + p_k + q_k$$
- Με βάση τις αρχικές δυο παρατηρήσεις
$$L_{\max}^{LS} < (r_k + p_k + q_k) + P \leq 2L_{\max}^{*}$$

Θεώρημα: Το όριο $2L^*_{\max}$ είναι επιτεύξιμο.

Απόδειξη:

- Να θεωρήσετε την ακόλουθη περίπτωση, κατά την οποία δίνονται δύο εργασίες ως εξής:
  - Εργασία J_1 με $r_1 = 0, p_1 = M, q_1 = 0$
  - Εργασία J_2 με $r_2 = 1, p_1 = 1, q_2 = M$
- Αμφότερες οι λίστες $\{1, 2\}$ και $\{2, 1\}$ δίνουν προς εκτέλεση την J_1 πριν από J_2 επειδή η τελευταία δεν είναι διαθέσιμη σε χρόνο $t = 0$. Το γεγονός αυτό δίνει χρόνο περάτωσης ίσο με $M + 1 + M$. Ωστόσο η βέλτιστη λύση είναι να τεθεί η J_2 πρώτη, επειδή τότε δίνει $1 + 1 + M$.
- Ο λόγος των παραπάνω επιδόσεων είναι $\frac{2M+1}{M+2}$. Με M αρκετά μεγάλο μπορεί να φτάσει οσοδήποτε κοντά στο 2.

Ο κανόνας του Jackson

Οι εργασίες τοποθετούνται σύμφωνα με μη αύξοντες χρόνους ωρίμανσης. Στην περίπτωση αυτή παριστάνουμε τον βέλτιστο χρόνο περάτωσης με $L^J_{\max}$.

Θεώρημα: $L^J_{\max} < 2L^*_{\max}$ και μάλιστα το όριο είναι επιτεύξιμο (σφιχτό).

Άλλοι αλγόριθμοι:

- Αλγόριθμος του Potts [Potts, 1980] 1980: Επιτυγχάνει προσέγγιση με συντελεστή 3/2 και τρέχει σε χρόνο $O(n^2 \log n)$.
- Hall & Shmoys [Hall-Shmoys, 1992] 1992: Προσέγγιση με συντελεστή 4/3 σε χρόνο $O(n^2 \log n)$.
- Αλγόριθμος των Nowicki - Smutnicki [Nowicki-Smutnicki, 1994] 1994: Επιτυγχάνει προσέγγιση με συντελεστή 3/2 και τρέχει σε χρόνο $O(n \log n)$.
- Kacem, Kellerer [Kacem-Kellerer, 2014] PTAS, 2014.

Βιβλιογραφία, I

- Dorit S. Hochbaum (editor), "Approximation Algorithms for NP-hard problems," PWS, Boston 1997.
- C. N. Potts, "Analysis of a Heuristic for One Machine Sequencing with Release Dates and Delivery Times," *Operations Research*, Vol. 28, No. 6, pp. 1436-1441, Nov.-Dec., 1980.
- L.A. Hall, D.B. Shmoys, "Jacksons rule for single machine scheduling: making a good heuristic better," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 17, 1992. 22-35.

Βιβλιογραφία, II

Eugeniusz Nowicki, Czeslaw Smutnicki, "An approximation algorithm for a single-machine scheduling problem with release times and delivery times," *Discrete Applied Mathematics*, Volume 48, Issue 1, pp. 69-79, Jan. 1994.

Imed Kacem, Hans Kellerer, "Approximation algorithms for no idle time scheduling on a single machine with release times and delivery times," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 164, Part 1, pp. 154-160, Febr. 2014.