Εξωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Ισχύει ότι
$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

Ορίζουμε ως <u>εξωτερικό γινόμενο</u> των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και το συμβολίζουμε ως $\vec{a} \times \vec{b}$ το <u>διάνυσμα</u>

$$\vec{a} \times \vec{b} := \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες

i) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ και $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \forall a \in \mathbb{R}^3$

Πράγματι,

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{0} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$= -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} k$$

$$= -\vec{b} \times \vec{a}$$

iii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

και

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Πράγματι:

$$\vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1,\ b_2 + c_2,\ b_3 + c_3)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

iv) $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ ③

$$\lambda \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

Παρατήρηση

Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι προσεταιριστικό

δηλ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Θεώρημα

Για κάθε $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

(α) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, c \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$

(β) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

(γ) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

Απόδειξη

(α) Είναι $\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right)$

$\rightarrow$

Έτσι με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και λόγω των ιδιοτήτων της ορίζουσας έχουμε:

$$\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\rangle = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & \alpha_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}\rangle$$

(β) $$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_2 & B_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, \; -a_1 b_3 + a_3 b_1, \; a_1 b_2 - \alpha_2 b_1)$$

Άρα

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} -a_1 b_3 + \alpha_3 b_1 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \vec{i} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_2 b_3 - \alpha_3 b_2 & a_1 b_2 - \alpha_2 b_1 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_2 b_3 - \alpha_3 b_2 & -\alpha_1 b_3 + \alpha_3 b_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-a_1 b_3 \gamma_3 + \alpha_3 b_1 \gamma_3 - \alpha_1 b_2 \gamma_2 + \alpha_2 b_1 \gamma_2)\vec{i} -$$
$$- (a_2 b_3 \gamma_3 - \alpha_3 b_2 \gamma_3 - \alpha_1 b_2 \gamma_1 + a_2 b_1 \gamma_1)\vec{j} + (a_2 b_3 \gamma_2 - \alpha_3 b_2 \gamma_2 + \alpha_1 b_3 \gamma_1 - a_3 b_1 \gamma_1)\vec{k}$$

Εξάλλω

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{\alpha} =$$

$$= (a_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + a_3\gamma_3)(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) -$$

$$-(b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3)(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$$

$$= (a_2\gamma_2 b_1 + \alpha_3\gamma_3 b_1 - \alpha_1 b_2\gamma_2 - \alpha_1 b_3\gamma_3)\vec{i} - (-a_1\gamma_1 b_2 - \alpha_3\gamma_3 b_2 + \alpha_2 b_1\gamma_1$$

$$+ a_2 b_3\gamma_3)\vec{j} + (a_1\gamma_1 b_3 + \alpha_2\gamma_2 b_3 - \alpha_3 b_1\gamma_1 - \alpha_3 b_2\gamma_2)\vec{k}$$

Άρα =

$$(\delta)\ \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= (a_2 b_3 - \alpha_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - \alpha_3 b_1)^2 + (\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \alpha_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3)^2$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$$

<u>Σημείωση</u>

Το γινόμενο $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ λέγεται <u>μικτό γινόμενο</u> των $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{c}$ και συμβολίζεται με $[\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{c}]$ ή $[\vec{\alpha}\vec{b}\vec{c}]$

Από ⑧ $\Longrightarrow$

$$\|\vec a \times \vec b\|^2 = \|\vec a\|^2 \|\vec b\|^2 - \|\vec a\|^2 \|\vec b\|^2 \sigma\upsilon\nu^2(\vec \alpha, \vec b)$$

$$= \|\vec a\|^2 \|\vec b\|^2 \left(1 - \sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec a, \vec b})\right)$$

$$= \|\vec a\|^2 \|\vec b\|^2 \left[\eta\mu(\widehat{\vec \alpha, \vec b})\right]^2$$

Άρα $\boxed{\|\vec a \times \vec b\| = \|\vec a\| \, \|\vec b\| \, |\eta\mu(\widehat{\vec \alpha, \vec b})|}$

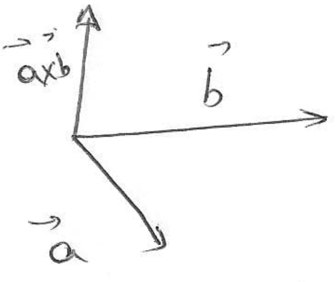
Επομένως τα $\vec a, \vec b$ συγγραμμικά $\Longleftrightarrow \vec a \times \vec b = \vec 0$

Από το θεώρημα και από την ιδιότητα αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίσες τότε $|A| = 0$

$\langle \vec a \times \vec b, \vec a \rangle = 0$ δλδ $(\vec a \times \vec b) \perp \vec a$

και $\langle \vec a \times \vec b, \vec b \rangle = 0$ $\quad (\vec a \times \vec b) \perp \vec b$

Άρα το διάνυσμα $\vec \alpha \times \vec b$ είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec \alpha, \vec b$



Το $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ και $\vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ διπλά εξωτερικά γινόμενα → (ταυτότητα Jacobi);

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\langle (a\times b), (c\times d)\rangle = \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle = \begin{vmatrix} \langle a,c\rangle & \langle a,d\rangle \\ \langle b,c\rangle & \langle b,d\rangle \end{vmatrix}$$

Λύση

Θέτουμε $w = c\times d$:

$$\langle (a\times b), (c\times d)\rangle = \langle (a\times b), w\rangle$$
$$= \langle a, (b\times w)\rangle = \langle a, [b\times(c\times d)]\rangle$$
$$= \langle a, [\langle b,d\rangle c - \langle b,c\rangle d]\rangle$$
$$= \langle a,c\rangle\cdot\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle$$

Πρόταση

i) Το εμβαδόν παρ/μου με πλευρές $\vec{\alpha}, \vec{b}$ $= \|\vec{a}\times\vec{b}\|$

ii) Ο όγκος παρ/δου με ακμές $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{c}$ $= |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$