Logic Design 19/10/21

Τρίτη, 19 Οκτωβρίου 2021 16:47

Καλησπέρα αγαπητοί

- Συμπλήρωμα ως προς 2
- Μετατρέπουμε την αφαίρεση σε πρόσθεση

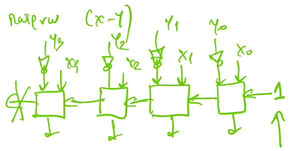
$X > Y \qquad X - Y$

$X + (2^n - Y) \Rightarrow$ αγνοούμε το most significant bit

↑ Συμπλ 2(Y)

$2^n + (X - Y)$

έχει 1 στο n+1 bit → αν το αγνοήσω παίρνω $(X-Y)$

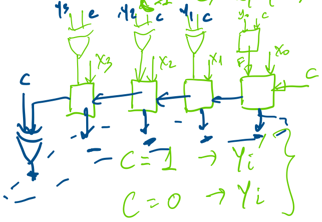


$X + (2^n - Y - 1) + 1$

$2^n + \underline{(X - Y)}$

Κύκλωμα $C=0$ → πρόσθεση

$C=1$ → αφαίρεση

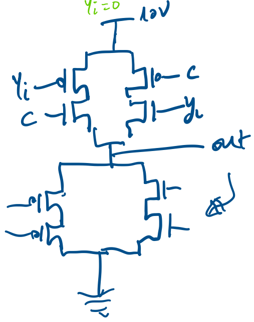


$C=1 \to Y_i'$

$C=0 \to Y_i$

$$\boxed{F(C,Y_i) = C \cdot Y_i' + C' \cdot Y_i}$$

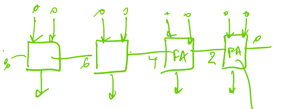
F=1 όταν η $C=1$ $Y_i=0$ ή όταν $C=0$ $y_i=1$



$X<Y$, $X>Y$ } $X-Y$ $|X-Y|$

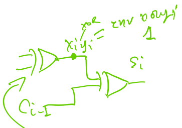
Sign → 0 +

1 −



2N → καθυστέρηση!

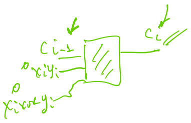
άθροισμα γινομένων



C_i σε 1

χρειάζεται ουσιαστικά απ'όψεως επόμενη

το $\boxed{C_{i-1}}$ χρ.



Άλγεβρα Boole

$(\underline{B}\{..\}\ (+)\ (\cdot))$

Δεν είναι οι αλγεβρικές πράξεις.

1. Κλειστή ως προς (+) (·) ✓
2. ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ως προς + ✓

$0: 0+X=X+0=X$

ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ως προς ·

$1: 1\cdot X=X\cdot 1=X$

3. $x+y=y+x$

$x\cdot y=y\cdot x$

4. (·) επιμεριστικός ως προς τη (+) ✓

$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

(+) επιμεριστική ως προς το (·) ✓

$x+(y\cdot z)=(x+y)(x+z)$

5. $\forall\, x\in B\ \exists\, x'\in B$ συμπλήρωμα

(α) $x+x'=1$ (b) $x\cdot x'=0$ ✓

$0\to 1$

$1\to 0$

$0\cdot 1=0$

$1\cdot 0=0$

$1+0=0+1=1$

6. ∃ τουλάχιστον δυο διαφορετικά $x,y\in B$ ✓

$x\neq y$

ΑΣΚΗΣΗ

$+ \ \therefore\ \cup$

$\cdot \quad \cap$

B → όλα τα δυνατά υποσύνολα ενός συνόλου Ω

Ω ←

B ← όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω

$\{B,\cup,\cap\}$ → άλγεβρα Boole

$S\{1,2,3,5\}$

$B\{\emptyset,\{1\},\{2\}$

$\ldots\ldots\{1,2,3,5\}\}$

$+\to\cup$ union

$\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}$

$\cdot\to\cap$ cut τομή

$\{1,2,3,5\}\cap\{2\}$

$=\{2\}$

Η ΔΙΤΙΜΗ ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE

$B=\{0,1\}$

+ → λογικό OR

x	y	+
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

· → λογικό AND

x	y	·
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ουδέτερο ως προς + $\quad 0+X=X+0=X$

$0+0=0$

$0+1=1$

ουδέτερο ως προς · $\quad 1\cdot X=X\cdot 1=1$

$1\cdot 0=0$

$0\cdot 1=0$

$1\cdot 1=1$

$x(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ ✓

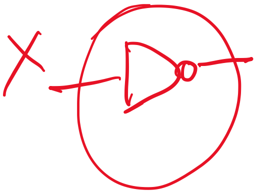
x y z	y+z	x(y+z)	xy	xz	xy+xz
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1

$x + yz = (x+y)(x+z)$

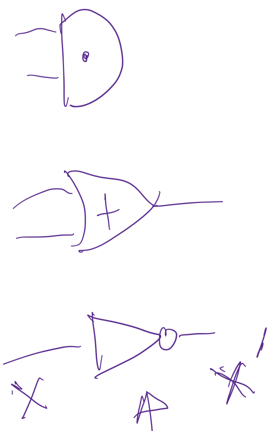
x y z	yz	x+yz	x+y	x+z	(x+y)(x+z)
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1
0 1 0	0	0	1	0	0

$B = \{0, 1\}$

⊕ ⊙



x'



Θεωρήματα

Άλγεβρα Boole

1. ΔΥΙΣΜΟΣ duality

σημαντικό

Εαν πάρω μια αλγεβρική έκφραση (που την έχω βγάλει από τα αξιώματα)

$+ \rightarrow \cdot$

$\cdot \rightarrow +$

$1 \rightarrow 0$

$0 \rightarrow 1$

η έκφραση που προκύπτει είναι επίσης αληθής.

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$$

ΔΥΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

$$x + x' = 1$$

$$x \cdot x' = 0$$

Γιατί τα αξιώματα περιέχουν και τις δυϊκές τους εκφράσεις.

ΠΡΟΣΟΧΗ

$$\cancel{x+x'} = \cancel{x\cdot x'}$$

✓ προφανώς

$$x\cdot y' + x'y + xy + x'y' = 1$$

$$\boxed{(x+y')\cdot(x'+y)\cdot(x+y)\cdot(x'+y') = 0}$$

προφανώς

2

1(a) $x+x=x$

δυϊκό → 1(b) $x\cdot x = x$

$$x+x = (x+x)\cdot 1$$

$$= (x+x)(x+x')$$

επιμεριστική

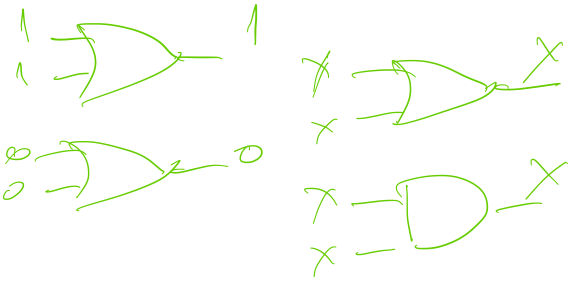
$$= x + x x'$$

$$= x + 0$$

$$= x$$

1 OR 1 = 1

0 0



2(a) = $x+1=1$

2b $x\cdot 0=0$

$$x+1 = 1\cdot(x+1)$$

$$(x+x')(x+1)$$

επιμεριστ

$$= x+x'\cdot 1$$

$$= x+x'$$

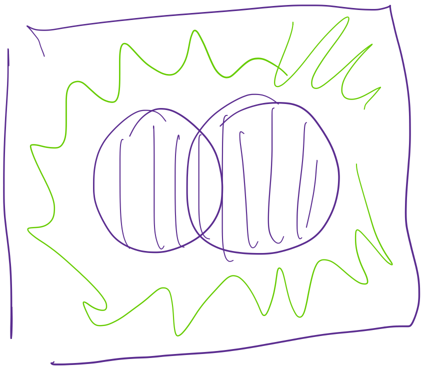
$$= 1$$

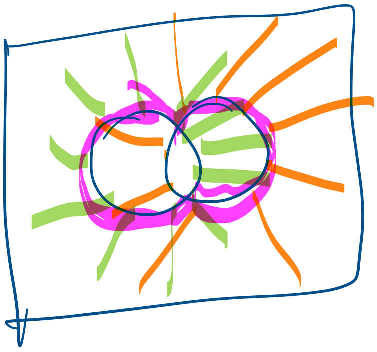
3 $(x')' = x$

5. Θεώρημα DE MORGAN

$$\boxed{(x+y)' = x'\cdot y' \qquad (x\cdot y)' = x'+y'}$$

x	y	$x+y$	$(x+y)'$	x'	y'	$x'y'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0





(6) $x + xy = x \longrightarrow x(x+y) = x$

$$x + xy = x\cdot 1 + x\cdot y$$
$$= x(1+y)$$
$$= x\cdot 1$$
$$= x$$

$F_1 = x\cdot y\cdot z'$

1 $\quad x=1 \quad y=1 \quad z=0$

$F_2 = x + y'z$

εαν $x=1$ ή $y=0$, $z=1$

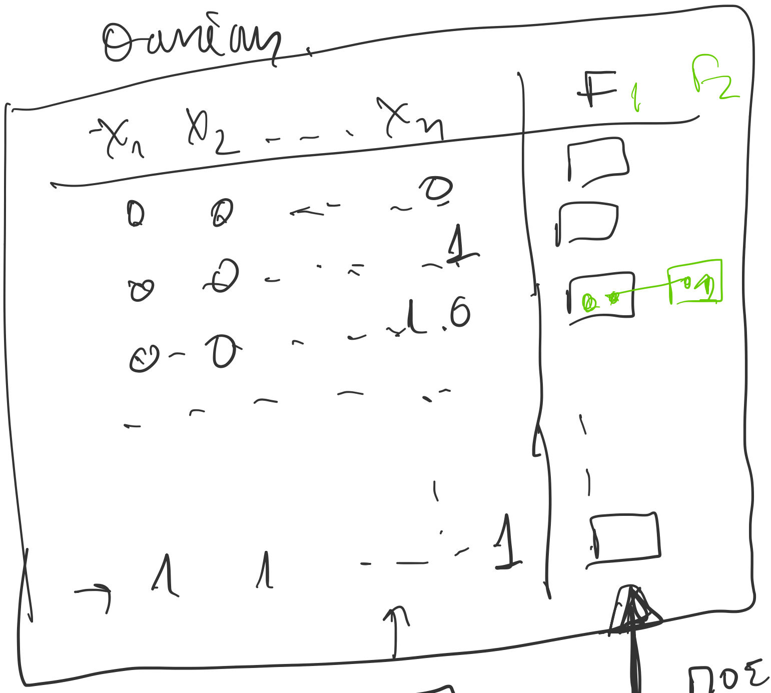
$F(x_1 \dots x_n) =$ οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση των $x_1 \dots x_n$

$x_1 x_2 x_3$

$$\left[(x_1'+x_2)(x_3+x_2')\right]' + \ldots \}$$

ΠΟΣΟ ΜΕΓΑΛΟΣ ο πίνακας αλήθειας

Θυμίση,



2^n

0 →
1
$\to 2^n-1$

ΠΟΣΑ διαφορετικούς πίνακες αλήθειας μπορώ να έχω

ΑΣΚΗΣΗ

ΠΟΣΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ F ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΧΩ ΟΤΑΝ ΕΧΩ n μεταβλητές

$F(x_1 \ldots x_n)$ ←

$F_1 = X+Y =$

$F_1 = (X+Y)\cdot 1$

$F_1 = (X+Y)(X+X')$

$$\left.\begin{array}{lcl} 000\ldots0 & \rightarrow & 0 \\ 00\ldots1 & \rightarrow & 1 \\ & & 2 \\ & & \vdots \\ 111\ldots1 & & \\ \uparrow & & \\ 2^n-1 & & 2^n-1 \end{array}\right] 2^n \text{ σειρές}$$

1 ΠΟΣΕΣ αλγεβρικές εκφράσεις μπορείς να φτιάξεις με n μεταβλητές $x_1 \ldots x_n$

00

$$[\quad]\cdot\left[x_1+x_1'\right]$$

2. ΠΟΣΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ) ΜΠΟΡΕΙΣ ΝΑ ΕΧΕΙΣ ΜΕ n μεταβλητές. ?