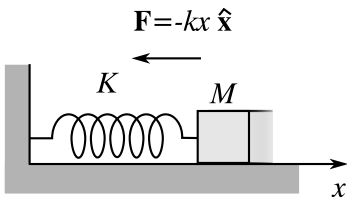
6

Ταλαντώσεις

6.1 Απλή Αρμονική Ταλάντωση σε μία Διάσταση

6.1.1 Ελατήριο σε οριζόντιο επίπεδο

Υποθέτουμε ότι το ελατήριο έχει αρχικό μήκος μηδέν, ιδανικό ελατήριο.



Σχήμα 6.1

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \qquad \text{Νόμος του Νεύτωνα}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

Διαστάσεις μεγεθών: $k \sim \frac{Nt}{meter} \Rightarrow \frac{k}{m} \sim \frac{Nt}{Kg \cdot meter} \simeq sec^{-2}$.

Λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Οι συναρτήσεις $\cos(\omega t)$ και $\sin(\omega t)$ ικανοποιούν, είναι λύσεις, της προηγούμενης διαφορικής εξίσωσης και το άθροισμα των δύο συναρτήσεων ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση.

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega t)\right) = x_0\sin(\omega t + \phi_0)$$

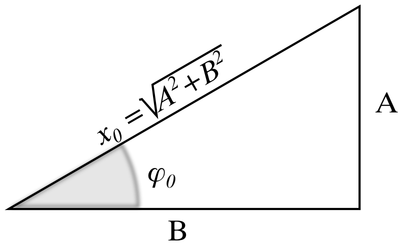
$$\sin\phi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\phi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$x_0 = \sqrt{A^2+B^2}$$

Αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = x_1 \qquad \text{και} \qquad v(0) = v_1$$

Χρησιμοποιώντας τα x_1, v_1 βρίσκουμε τα A, B ή x_0, ϕ_0.



Σχήμα 6.2

Η ενέργεια διατηρείται, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \text{ σταθερή} \begin{cases} E &= \frac{1}{2}kx_0^2 \\ E &= \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \end{cases}$$

Μέση Κινητική και Δυναμική Ενέργεια

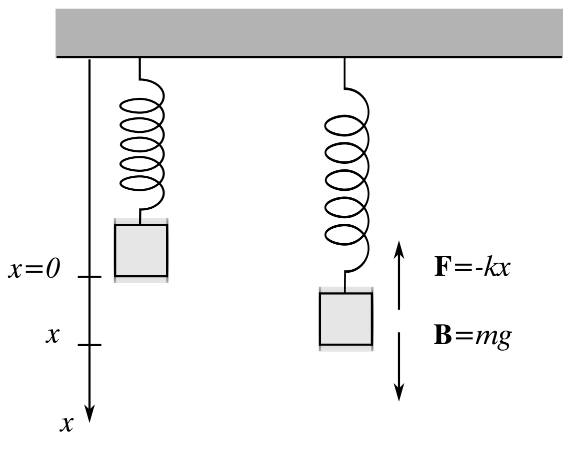
Ορίζουμε τη μέση χρονική τιμή μιας ποσότητας $A(t)$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \langle K \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T K(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mv^2(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}m\omega^2 x_0^2 \\ \langle U \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}m\omega^2 x_0^2 \\ \Rightarrow \langle K \rangle &= \langle U \rangle \qquad \text{και} \qquad E = \langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle \end{aligned}$$

Παρατήρηση $\int_0^T \cos^2(\omega t + \phi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$.

Ελατήριο κατακόρυφα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο

Στην θέση $x = 0$ στο σχήμα το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



Σχήμα 6.3

Εξίσωση κίνησης

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + mg$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{m}{k}g\right)$$

Θέτουμε $y = x - \dfrac{mg}{k}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}y = -\omega^2 y$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\Rightarrow x(t) = y_0 \sin(\omega t + \phi_0) + \frac{mg}{k}$$

Ταλάντωση με συχνότητα ω γύρω από το σημείο $x_{\text{Ισ}} = \dfrac{mg}{k}$.
Στο σημείο $x_{\text{Ισ}}$ έχουμε

$$kx_{\text{Ισ}} = mg$$

άρα το σημείο $x_{\text{Ισ}}$ είναι το σημείο ισορροπίας του συστήματος, όπου η δύναμη του βάρους ισούται με τη δύναμη του ελατηρίου.

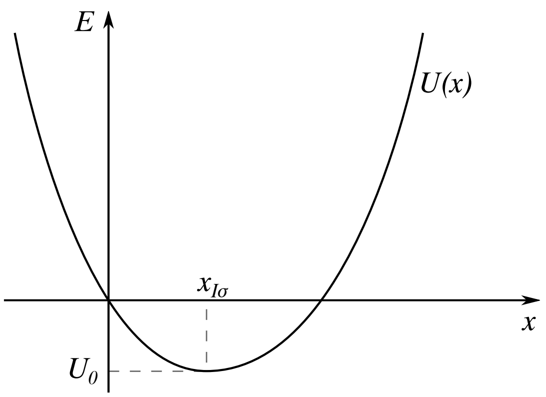
Εξετάζουμε το σύστημα ενεργειακά:

$$U(x_1) - U(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{ολ}}\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}(-kx)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} mg\mathrm{d}x$$

$$U(x_1) - U(x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + mg(x_2 - x_1)$$

Ορίζουμε $U(x = 0) = 0$

$$\Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx, \qquad \text{παραβολή}$$



Σχήμα 6.4

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = kx - mg$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \text{για } x = x_{\text{Ισ}}$$

$$x_{\text{Ισ}} = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} = k > 0 \Rightarrow \text{ ευσταθής ισορροπία}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}kx^2 - kx_{\text{Ισ}}x \pm \frac{1}{2}kx_{\text{Ισ}}^2$$
$$U(x) = \frac{1}{2}k\left(x - x_{\text{ισ}}\right)^2 + U_0, \qquad U_0 = -\frac{1}{2}kx_{\text{Ισ}}^2$$

Επομένως για την εξίσωση κίνησης έχουμε

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -k(x - x_{\text{Ισ}})$$

Ταλάντωση με συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}$$

γύρω από τη θέση ισορροπίας $x_{\text{Ισ}}$.

6.1.2 Κίνηση Συστημάτων κοντά σε μια θέση Ευσταθούς Ισορροπίας

Το σύστημα περιγράφεται από μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x)$

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

Εάν έχουμε ένα σημείο $x_{\text{ισ}}$ ευσταθούς ισορροπίας (ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας)

$$\frac{\mathrm{d}U(x = x_{\text{ισ}})}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2U(x_{\text{ισ}})}{\mathrm{d}x^2} > 0$$

Αναπτύσσουμε τη δυναμική ενέργεια σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x_{\text{ισ}}$

$$U(x) = U(x_{\text{ισ}}) + \cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}U(x_{\text{ισ}})}{\mathrm{d}x}}(x - x_{\text{ισ}}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U(x_{\text{ισ}})}{\mathrm{d}x^2}(x - x_{\text{ισ}})^2 + \dots$$

Για $|x - x_{\text{ισ}}| \ll 1$ κρατάμε μόνο τον πρώτο μη-μηδενικό όρο

$$\Rightarrow U(x) = U(x_{\text{ισ}}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U(x_{\text{ισ}})}{\mathrm{d}x^2}(x - x_{\text{ισ}})^2$$

Θέτουμε

$$k = U''(x_{\text{ισ}}) = \frac{\mathrm{d}^2U(x_{\text{ισ}})}{\mathrm{d}x^2} > 0$$
$$\Rightarrow U(x) = U(x_{\text{ισ}}) + \frac{1}{2}k(x - x_{\text{ισ}})^2$$

Νόμος του Νεύτωνα: $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$

$$F = -k(x - x_{\text{ισ}}) \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x - x_{\text{ισ}})$$

Επομένως έχουμε ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας $x_{\text{ισ}}$ με συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}U''(x_{\text{ισ}})$$

Εφαρμογή

Κεντρικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση

$$U = -\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^2}, \qquad a, b > 0$$

(α) Βρείτε για ποια τιμή του r έχουμε ισορροπία

(β) Για ποιες τιμές του n η ισορροπία αυτή είναι ευσταθής;

(γ) Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης που εκτελεί ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται κοντά στο σημείο της ευσταθούς ισορροπίας. Υποθέτουμε ότι το σώμα κινείται μόνο ακτινικά.

Λύση:

(α)

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \frac{na}{r^{n+1}} - \frac{2b}{r^3}$$

Ισορροπία $\Rightarrow$ ακρότατο $\Rightarrow$ πρώτη παράγωγος $= 0$

$$\Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow \frac{na}{r_0^{n+1}} = \frac{2b}{r_0^3} \Rightarrow r_0^{n-2} = \frac{na}{2b}$$

(β) Ευσταθής ισορροπία $\Rightarrow$ ελάχιστο $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2U(r_0)}{\mathrm{d}r^2} > 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{(n+1)na}{r^{n+2}} + \frac{6b}{r^4} = \frac{1}{r^4}\left(6b - \frac{n(n+1)a}{r^{n-2}}\right)$$

$$U''(r_0) = \frac{1}{r_0^4}\left(6b - (n+1)\frac{na}{r_0^{n-2}}\right) = \frac{1}{r_0^4}\left(6b - 2b(n+1)\right)$$

$$U''(r_0) = \frac{2b}{r_0^4}\left(3 - (n+1)\right) > 0 \Rightarrow 2 > n$$

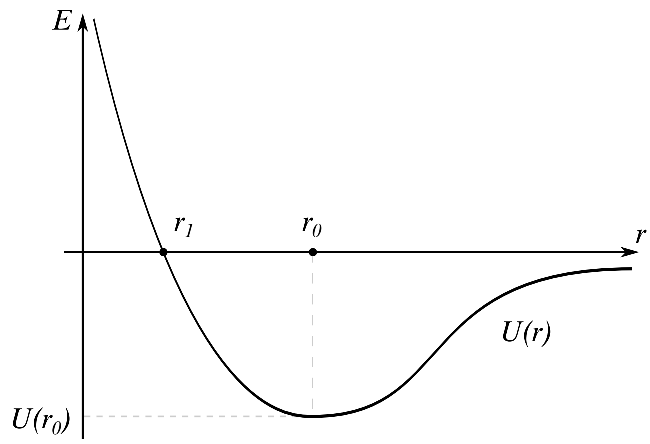
(γ) Περίοδος ταλάντωσης μάζας m γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας r_0.

$$U''(r_0) = \frac{2b(2-n)}{r_0^4} = k > 0 \text{ για } n < 2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

και

$$r_0^{n-2} = \frac{na}{2b}, \qquad U(r_0) = -\frac{b}{r_0^2}\left(\frac{2}{n} - 1\right) < 0$$



Σχήμα 6.5

$$U(r_1) = 0, \qquad r_1^{2-n} = \frac{b}{a}$$

$$r_0^{2-n} = \frac{2b}{na} > r_1^{2-n} = \frac{b}{a}$$

διότι

$$\frac{2}{n} > 1$$

Γενικά η δύναμη ορίζεται ως εξής

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$$

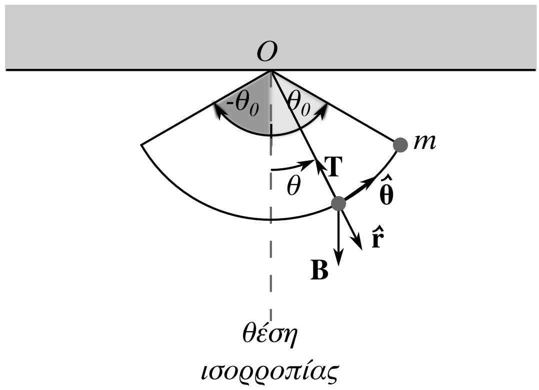
όταν γνωρίζουμε τη δυναμική ενέργεια $U(\boldsymbol{r})$. Όταν η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το $r = |\boldsymbol{r}|$ τότε

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

με ακτινική κατεύθυνση. Ο νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση είναι $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$ ωστόσο στην περίπτωση που το σώμα δεν περιστρέφεται και εκτελεί μόνο ακτινική κίνηση έχουμε $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{r}}$. Τελικά η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$

6.1.3 Απλό εκκρεμές



Σχήμα 6.6

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{T} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\boldsymbol{a}$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες (r, θ)

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

όπου l το μήκος του νήματος και m η μάζα του σφαιριδίου. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} - l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{T} = -T\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{B} = -mg\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + mg\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 & = -T + mg\cos\theta \\ ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} & = -mg\sin\theta \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη εξίσωση για να προσδιορίσουμε την κίνηση:

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta = -\omega_0^2\sin\theta$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Μέγιστη γωνία απόκλισης από την κατακόρυφο (θέση ισορροπίας) είναι η θ_0. Το σώμα κάνει ταλάντωση–περιοδική κίνηση από τη γωνία θ_0 μέχρι τη γωνία $-\theta_0$. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $\sin\theta$ γύρω από τη θέση ισορροπίας $\theta = 0$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots$$

Εάν $\theta_0 \simeq 0.1$ σε ακτίνια, δηλαδή σε μοίρες $\simeq 6°$, μπορούμε να κρατήσουμε μόνο το γραμμικό όρο και να αμελήσουμε την επίδραση των όρων θ^3, θ^5, ... στην κίνηση

$$\Rightarrow \theta'' = -\omega_0^2\theta \Rightarrow \text{Απλή Αρμονική Ταλάντωση}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Περίοδος ταλάντωσης:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Εξίσωση κίνησης από τη στροφορμή:

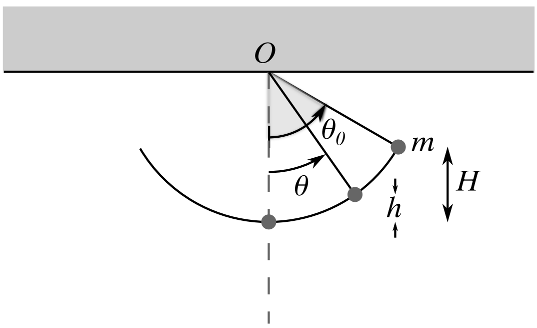
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} & = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = ml^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = ml^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{N} & = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} = -lmg\sin\theta\hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ml^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -lmg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Υπολογισμός των περιόδων ταλάντωσης T για μεγάλη γωνία απόκλισης θ_0.



Σχήμα 6.7

$$E = K + U$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$U = mgh = mgl(1 - \cos\theta) = 2mgl\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Η ενέργεια διατηρείται $= E(H) = mgl(1-\cos\theta_0) = 2mgl\sin^2\frac{\theta_0}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{T/4} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

Ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους.

Αλλαγή μεταβλητής $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin u$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{T}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}, \qquad k^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

Πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους.

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με ανάπτυξη σε σειρά της συνάρτησης $(1-k^2\sin^2 u)^{-1/2}$

$$\left(1-k^2\sin^2 u\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 u + \frac{3}{8}k^4\sin^4 u + \ldots$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\mathrm{d}u + \frac{3k^4}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^4 u\mathrm{d}u + \ldots$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right)$$

Μερικές απλές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν στους υπολογισμούς

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{d}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta_0}{2}\mathrm{d}(\sin u) \Rightarrow \mathrm{d}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)}\cos u\mathrm{d}u$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}$$

6.2 Φθίνουσα και Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

6.2.1 Λύση της απλής αρμονικής ταλάντωσης

$$x'' = -\omega^2 x$$

Γραμμική ομογενής δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές. Δοκιμάζουμε σαν λύση την $x = \mathrm{e}^{\rho t}$.

$$x'' = \rho^2\mathrm{e}^{\rho t} \Rightarrow \rho^2 = -\omega^2$$

$$\rho = \pm i\omega$$

$$x = c_1\mathrm{e}^{i\omega t} + c_2\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \text{(γενική λύση της διαφορικής)}$$

$$\mathrm{e}^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow c_2 = c_1^*$$

$$x = (c_1 + c_1^*)\cos(\omega t) + i\,(c_1 - c_1^*)\sin(\omega t)$$

$$A = c_1 + c_1^* \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad B = i\,(c_1 - c_1^*) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = x_0\sin(\omega t + \phi_0)$$

6.2.2 Φθίνουσα ταλάντωση, δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow mx'' + bx' + kx = 0$$
$$x = \mathrm{e}^{\rho t} \Rightarrow m\rho^2 + b\rho + k = 0$$

Λύνουμε το τριώνυμο

$$\rho_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}$$
$$\rho_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
$$\rho_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

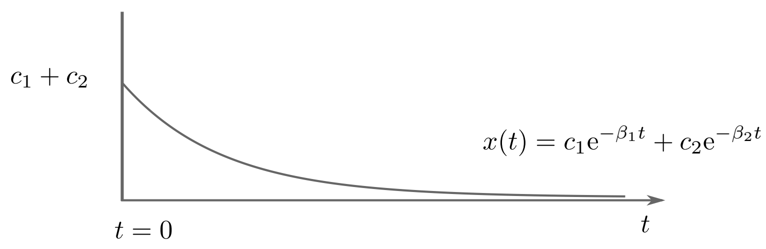
Γενική λύση:

$$x = c_1\mathrm{e}^{\rho_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\rho_2 t}$$

Διερεύνηση

(α) $b^2 - 4mk > 0$, μεγάλη δύναμη τριβής, απεριοδική κίνηση

$$\Rightarrow \rho_{1,2} \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \rho_1 & = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0 \\ \rho_2 & = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 6.8

$$\rho_1 = -\beta_1, \quad \rho_2 = -\beta_2$$

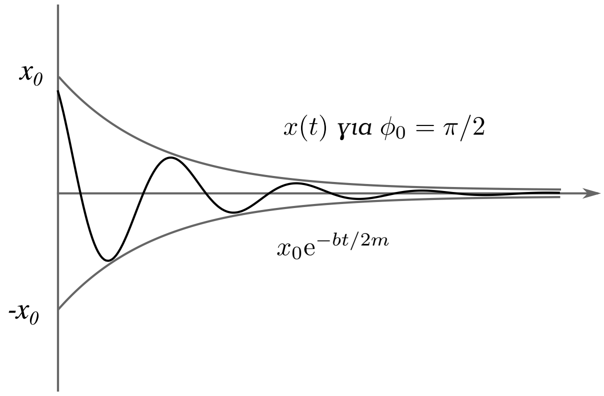
(β) $b^2 - 4mk < 0$, μικρή δύναμη τριβής, περιοδική κίνηση

$$\rho_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{-(4mk - b^2)}$$
$$\rho_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = -\frac{b}{2m} \pm i\tilde{\omega}$$

όπου $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$$\Rightarrow x(t) = c_1\mathrm{e}^{-bt/2m}\mathrm{e}^{i\tilde{\omega}t} + c_2\mathrm{e}^{-bt/2m}\mathrm{e}^{-i\tilde{\omega}t}$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow c_2 = c_1^*$$
$$\Rightarrow x(t) = x_0\mathrm{e}^{-bt/2m}\sin\left(\tilde{\omega}t + \phi_0\right)$$



Σχήμα 6.9

Ενεργειακή μελέτη

Εάν ορίσουμε την μηχανική ενέργεια στιγμιαία ως συνήθως $E(t) = K(t) + U(t)$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\right) v = -bv \cdot v = -bv^2 = F_{\tau\varrho} \cdot v$$

άρα η απώλεια ενέργειας είναι ίση με το έργο της δύναμης τριβής.

Πρόβλημα

Σώμα μάζας m είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ μάζας και οριζοντίου επιπέδου είναι σταθερός και ίσος με μ. Την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται στην μάζα αρχική ταχύτητα v_0. Βρείτε την μετατόπιση $x(t)$ του ταλαντωτή σαν συνάρτηση του χρόνου. Σε πόσο χρόνο φτάνει η μάζα πρώτη φορά στο ακρότατο σημείο; Πόση ταχύτητα έχει η μάζα στη θέση ισορροπίας μετά από μία πλήρη ταλάντωση;

Λύση:

Επειδή η δύναμη τριβής F_T εξαρτάται από την κατεύθυνση της κίνησης λύνουμε την εξίσωση κίνησης χωριστά για κάθε ένα από τα τέσσερα μέρη μιας πλήρους ταλάντωσης.

(ι) Εάν A_1 η μέγιστη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας, μελετάμε την κίνηση για $0 < x < A_1$ καθώς το σώμα κινείται προς το ακρότατο A_1. Η δύναμη τριβής είναι $F_T = -\mu mg$.
Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$mx'' = -kx + F_T = -kx - \mu mg \;\Rightarrow\; x'' = -\frac{k}{m}x - \mu g = -\omega_0^2(x + \frac{\mu g}{\omega_0^2})$$

όπου $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.
Ορίζοντας την νέα μεταβλητή $y = x + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$ η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$y'' = -\omega_0^2 y$$

Η λύση της εξίσωσης κίνησης είναι:

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$
$$y'(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t$$

όπου μπορούμε να γράψουμε $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.
Αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 0 \;\Rightarrow\; y(0) = A = \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$
$$x'(0) = y'(0) = v_0 \;\Rightarrow\; \omega_0 B = v_0 \;\Rightarrow\; B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Η λύση για την μετατόπιση $x(t)$ είναι:

$$x(t) = y(t) - \frac{\mu g}{\omega_0^2} = \frac{\mu g}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

και για την ταχύτητα του σώματος βρίσκουμε:

$$v(t) = x'(t) = -\omega_0\frac{\mu g}{\omega_0^2}\sin\omega_0 t + \omega_0\frac{v_0}{\omega_0}\cos\omega_0 t$$

Γράφουμε την λύση με ένα διαφορετικό τρόπο ο οποίος μπορεί να μας δώσει περισσότερες πληροφορίες

$$\begin{aligned} y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega_0 t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega_0 t\right) \\ &= y_0\left(\sin\phi_0\cos\omega_0 t + \cos\phi_0\sin\omega_0 t\right) = y_0\sin(\omega_0 t + \phi_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = y_0\sin(\omega_0 t + \phi_0) - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

όπου

$$y_0 = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{\omega_0^4} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

και

$$\sin\phi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\phi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \ \Rightarrow\ \tan\phi_0 = \frac{A}{B} = \frac{\mu g}{v_0\omega_0}$$

Η ταχύτητα της μάζας είναι

$$v(t) = x'(t) = \omega_0 y_0\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Η ταχύτητα της μάζας είναι μηδέν όταν $\cos(\omega_0 t_1 + \phi_0) = 0$ εκείνη την χρονική στιγμή $\sin(\omega_0 t_1 + \phi_0) = 1$ και το ελατήριο έχει την μέγιστη απαμάκρυνση A_1 όπου

$$A_1 = y_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} = \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{\omega_0^4} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Άρα η μάζα φτάνει στο ακρότατο A_1 όταν ικανοποιείται η εξίσωση

$$\omega_0 t_1 + \phi_0 = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0} - \frac{\phi_0}{\omega_0} = \frac{T}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi}T$$

Ενεργειακή μελέτη του προβλήματος:

$$W^{\epsilon\lambda}_{0\to A_1} + W^{T}_{0\to A_1} = \Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W^{\epsilon\lambda}_{0\to A_1} = U(0) - U(A_1) = -\frac{1}{2}kA_1^2, \quad W^{T}_{0\to A_1} = -\mu m g A_1$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}kA_1^2 - \mu m g A_1 = -\frac{1}{2}mv_0^2 \ \Rightarrow\ v_0^2 = \frac{k}{m}A_1^2 + 2\mu g A_1 = \omega_0^2 A_1^2 + 2\mu g A_1$$

Η λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$A_{1,2} = -\frac{2\mu g}{2\omega_0^2} \pm \frac{1}{2\omega_0^2}\sqrt{4\mu^2 g^2 + 4\omega_0^2 v_0^2} = -\frac{\mu g}{\omega_0^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{\omega_0^4} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

κρατάμε μόνο την θετική λύση. Άρα η μέγιστη απομάκρυνση του ελατηρίου από την θέση ισορροπίας είναι:

$$A_1 = -\frac{\mu g}{\omega_0^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{\omega_0^4} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Η δύναμη του ελατηρίου στο ακρότατο είναι $|F_{\varepsilon\lambda}| = kA_1$ ενώ η δύναμη της τριβής ειναι $|F_T| = \mu m g$. Οι δύο δυνάμεις έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Εάν $|F_T| > |F_{\varepsilon\lambda}|$ τότε το σώμα παραμένει ακίνητο στην θέση $x = A_1$.

(ιι) Μελέτη της κίνησης καθώς το σώμα επιστρέφει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας, $0 < x < A_1$.
Υποθέτουμε ότι $|F_T| < |F_{\varepsilon\lambda}|$ δηλαδή $\mu mg < kA_1$, το σώμα αρχίζει να κινείται προς την θέση ισορροπίας και φτάνει εκεί με ταχύτητα v_1.
Υπολογίζουμε την ταχύτητα v_1 από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$W^{\varepsilon\lambda}_{A_1\to 0} + W^{T}_{A_1\to 0} = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}kA_1^2 - \mu mgA_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; v_1^2 = \frac{k}{m}A_1^2 - 2\mu gA_1$$

έχουμε:

$$v_0^2 = \frac{k}{m}A_1^2 + 2\mu gA_1 \;\Rightarrow\; \frac{k}{m}A_1^2 = v_0^2 - 2\mu gA_1 \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 4\mu gA_1 \;<\; v_0^2$$

Λύση της εξίσωσης κίνησης για την κίνηση του σώματος απο $x = A_1 \to x = 0$ και υπολογισμός του χρόνου κίνησης t_2:

$$x'' = -\frac{k}{m}x + \mu g = -\omega_0^2(x - \frac{\mu g}{\omega_0^2})$$

με αρχικές συνθήκες $x(t=0) = A_1, v(t=0) = 0$.
Ορίζουμε την νέα μεταβλητή $y = x - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$ και η εξίσωση κίνησης γίνεται $y'' = -\omega_0^2 y$.
Λύνουμε την νέα εξίσωση κίνησης ως προς y και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε την λύση για την μετατόπιση x.

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,\; y'(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t \\ y(0) &= A = A_1 - \frac{\mu g}{\omega_0^2},\; y'(0) = x'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \Rightarrow\; x - \frac{\mu g}{\omega_0^2} &= (A_1 - \frac{\mu g}{\omega_0^2})\cos\omega_0 t \;\Rightarrow\; x = (A_1 - \frac{\mu g}{\omega_0^2})\cos\omega_0 t + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης:

$$x(t_2) = 0 \;\Rightarrow\; (A_1 - \frac{\mu g}{\omega_0^2})\cos\omega_0 t_2 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} = 0 \;\Rightarrow\; \cos\omega_0 t_2 = \frac{-\frac{\mu g}{\omega_0^2}}{A_1 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}}$$

Έχουμε ήδη δεχτεί ότι $kA_1 > \mu mg$ άρα $A_1 > \mu g\frac{m}{k} = \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$$\Rightarrow\; \cos\omega_0 t_2 < 0 \;\Rightarrow\; \omega_0 t_2 > \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; t_2 > \frac{T}{4}$$

(ιιι) Μελέτη της κίνησης καθώς το σώμα κινείται σε αρνητικές τιμές της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας μέχρι το ακρότατο για $x = -A_2$ και πίσω στη θέση ισορροπίας $x = 0$.
Το σώμα μαζας m κινείται προς τα αριστερα (αρνητικά x) με αρχική ταχύτητα $v(0) = -v_1$ και φτάνει μέχρι τη θέση $x = -A_2$ όπου με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε:

$$A_2 = -\frac{\mu g}{\omega_0^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{\omega_0^4} + \frac{v_1^2}{\omega_0^2}} \;<\; A_1$$

Εάν $kA_2 > \mu mg$ τότε το σώμα θα κινηθεί προς τα δεξιά μέχρι τη θέση ισορροπίας όπου θα φτάσει με ταχύτητα:

$$v_2^2 = v_1^2 - 4\mu gA_2 \;<\; v_1^2$$

Εά υποθέσουμε τέλος ότι $\mu mg = kA_T$ τότε κάποια στιγμή το σώμα θα ακινητοποιηθεί όταν $A_n < A_T$.

6.2.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F(t)$$
$$F(t) = \text{ περιοδική δύναμη } = F_0\sin(\omega t)$$

Η λύση $x(t)$ είναι άθροισμα της λύσης της ομογενούς εξίσωσης χωρίς την εξωτερική δύναμη και μια μερική λύση της εξίσωσης με την εξωτερική δύναμη $F(t)$.

$$x(t) = x_{\text{ομογ}}(t) + x_{\text{εξ}}(t)$$

$$x_{\text{ομογ}}(t) = x_{\text{φθιν}}(t) = c\mathrm{e}^{-bt/2m}\sin\left(\tilde{\omega}t + \phi_0\right)$$

$$x_{\text{ομογ}}(t \to \infty) \to 0 \quad \text{και παραμένει μόνο η λύση που οφείλεται στην εξωτερική δύναμη}$$

$$x_{\text{εξ}}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad \text{για } t \gg \tau_0 = \frac{2m}{b}$$

Αντικαθιστούμε την $x(t)$ και τις παραγώγους στη διαφορική εξίσωση και υπολογίζουμε τους συντελεστές A, B.

$$x'(t) = \omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t)$$
$$x''(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t) - \omega^2 B\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \left[-m\omega^2 A - \omega bB + kA\right]\sin(\omega t) + \left[-m\omega^2 B + \omega bA + kB\right]\cos(\omega t) = F_0\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m\omega^2 A - \omega bB + kA & = F_0 \\ -m\omega^2 B + \omega bA + kB & = 0 \end{cases}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$A = \frac{-k + m\omega^2}{\omega b}B \Rightarrow A = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(b/m)\omega}B, \quad \text{όπου } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

και από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε ($\omega \neq \omega_0$)

$$B = -\frac{\dfrac{F_0}{m}\dfrac{b}{m}\omega}{\left(\dfrac{b}{m}\right)^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\dfrac{F_0}{m}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{\left(\dfrac{b}{m}\right)^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}$$

Απόκρισή του συστήματος στην εξωτερική δύναμη

$$x = x_0\sin\left(\omega t + \tilde{\phi}\right) \quad \text{όπου } x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\left[\left(\dfrac{b}{m}\right)^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\tan\tilde{\phi} = \frac{B}{A} = \frac{(b/m)\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Η γωνία $\tilde{\phi}$ είναι πάντα αρνητική

$$\omega < \omega_0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \tilde{\phi} < 0$$
$$\omega > \omega_0 \Rightarrow -\pi < \tilde{\phi} < -\frac{\pi}{2}$$

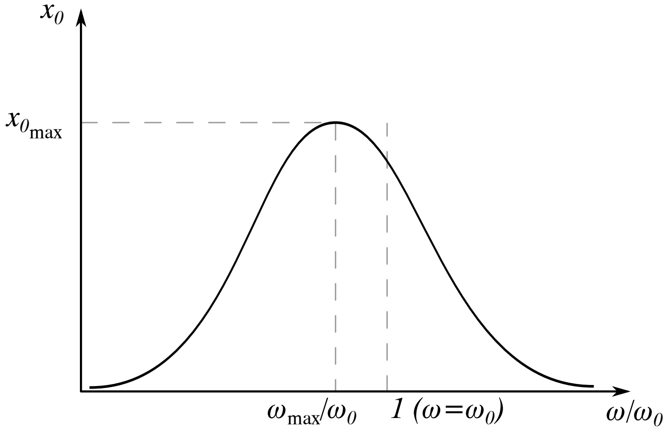
Μέγιστη απορόφηση ενέργειας από το σύστημα όταν η δύναμη είναι σε φάση με την ταχύτητα διότι $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = F \cdot v$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega x_0\cos(\omega t + \tilde{\phi})$$

όταν $\omega \simeq \omega_0$ έχουμε $\tilde{\phi} \simeq -\frac{\pi}{2}$ και η ταχύτητα είναι $v \simeq \omega x_0\sin(\omega t)$ σε φάση με την δύναμη.

Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης:

$$\left.\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_{\max}} = 0$$



Σχήμα 6.10

$$\Rightarrow \omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}$$

Συντονισμός για $\omega \to \omega_{\max}$, $x_0 =$ μέγιστο

$$x_{0,\max} = \frac{F_0}{b} \frac{1}{\left(\omega_0^2 - b^2/4m^2\right)^{1/2}}$$

$$b \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_{0,\max} \to \infty, \quad \tilde{\phi} \to -\frac{\pi}{2}$$

Παρατήρηση:
Όταν $b = 0$ παίρνουμε $B = 0$ και $x = A \sin(\omega t)$ όπου $A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Εφαρμογή : εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Απλός αρμονικός ταλαντωτής έχει μάζα m και ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης ω_0. Την χρονική στιγμή $t = 0$ καθώς ο ταλαντωτής περνά από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα v_0 ασκείται εξωτερική περιοδική δύναμη $F(t) = F_0 \cos \omega t$.
(α) Βρείτε την μετατόπιση $x(t)$ του ταλαντωτή από την θέση ισορροπίας.
(β) Υποθέτωντας ότι $\omega \to \omega_0$ δηλαδή $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ και $\delta\omega \to 0$ βρείτε την εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή.

(α) Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή υπό την επίδραση και της εξωτερικής δύναμης είναι:

$$mx'' = -kx + F(t) \;\Rightarrow\; x'' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

θέτοντας $k = m\omega_0^2$ η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Η ¨Γενική Λύση¨ της εξίσωσης κίνησης είναι το άθροισμα της ¨Λύσης της Ομογενούς¨ εξίσωσης συν μία ¨Μερική Λύση¨ λόγω της εξωτερικής δύναμης:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega t \\ x'(t) &= -\omega_0 A_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 B_1 \cos \omega_0 t - \omega A_2 \sin \omega t \\ x''(t) &= -\omega_0^2 A_1 \cos \omega_0 t - \omega_0^2 B_1 \sin \omega_0 t - \omega^2 A_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση κίνησης βρίσκουμε ότι:

$$-\omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 = \frac{F_0}{m} \;\Rightarrow\; A_2 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Παρατήρηση: Εάν προσθέσουμε στη λύση και τον όρο $B_2 \sin \omega t$ μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι τελικά έχουμε $B_2 = 0$.

Αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + A_2 = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = -A_2 = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$
$$v(0) = v_0 \;\Rightarrow\; \omega_0 B_1 = v_0 \;\Rightarrow\; B_1 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Η λύση για την μετατόπιση $x(t)$ είναι:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

(β) Ζητάμε το όριο της $x(t)$ όταν $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ και $\delta\omega \to 0$.
Επειδή το $\delta\omega$ είναι μία μικρή ποσότητα αναπτύσσουμε την συνάρτηση συνημίτονο σε σειρά

$$\cos\omega t = \cos(\omega_0 t + \delta\omega t) = \cos\omega_0 t - \sin(\omega_0 t)\delta\omega t - \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)(\delta\omega t)^2$$

και κρατάμε μόνο τον γραμμικό ως προς $\delta\omega$ όρο. Ο όρος που είναι ανάλογος του $(\delta\omega)^2$ δεν συνεισφέρει στο όριο $\delta\omega \to 0$. Για τον παρονομαστή της αρχικής έκφρασης έχουμε:

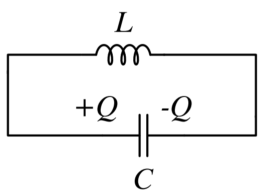
$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) = (2\omega_0 + \delta\omega)(-\delta\omega) \simeq -2\omega_0\delta\omega$$

στο όριο όπου $\delta\omega \to 0$. Αντικαθιστώντας στην αρχική συνάρτηση $x(t)$ της μετατόπισης βρίσκουμε:

$$x(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_0\delta\omega}(\cos\omega_0 t - \delta\omega t\sin\omega_0 t - \cos\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$
$$\Rightarrow\; x(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_0\delta\omega}(-\delta\omega t)\sin\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$
$$\Rightarrow\; x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$
$$\Rightarrow\; x(t) = (\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{F_0}{2m\omega_0}t)\sin\omega_0 t$$

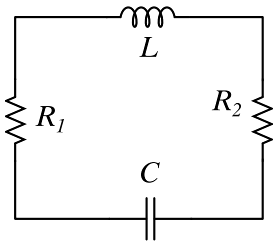
6.2.4 Ηλεκτρικά κυκλώματα R, L, C

(α) Κύκλωμα L, C



$$V_L + V_C = 0$$
$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0$$
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow Q'' = -\frac{1}{LC}Q$$
$$Q = Q_0\sin(\omega_0 t + \phi_0)$$
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

(β) Κύκλωμα R, L, C σε σειρά



$$V_L + V_R + V_C = 0$$

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

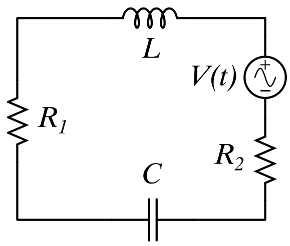
$$R = R_1 + R_2, \qquad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0$$

Φθίνουσα ταλάντωση

$$Q = Q_0\mathrm{e}^{-Rt/2L}\sin\left(\tilde{\omega}t + \phi_0\right), \qquad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

(γ) Κύκλωμα R, L, C και εξωτερική πηγή $V(t) = V_0\sin(\omega t)$



$$V_L + V_R + V_C = V(t)$$

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR + \frac{Q}{C} = V_0\sin(\omega t)$$

$$R = R_1 + R_2, \qquad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$$

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = V_0\sin(\omega t)$$

$$Q = Q_0\sin\left(\omega t + \tilde{\phi}\right)$$

$$Q_0 = \frac{V_0/L}{\left[\left(\frac{R}{L}\right)^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Συντονισμός $\omega^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2} \Rightarrow$ μέγιστο Q_0

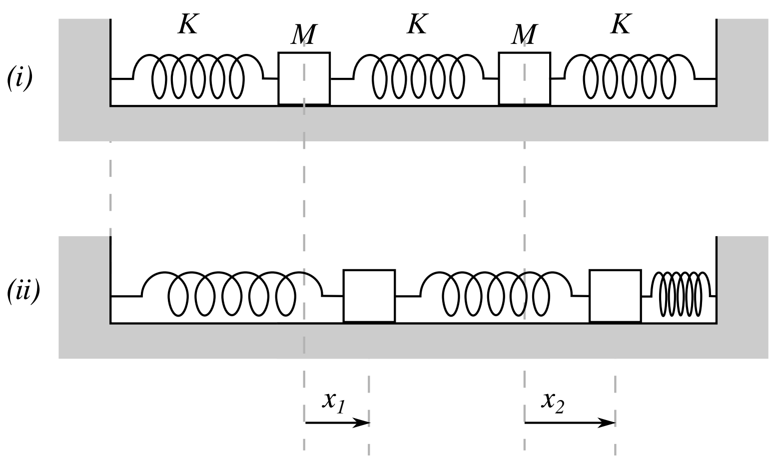
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \omega Q_0\cos\left(\omega t + \tilde{\phi}\right)$$

$$I_0 = \omega Q_0 = \frac{V_0\omega/L}{\left[\left(\frac{R}{L}\right)^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow V_0 = I_0\frac{L}{\omega}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\omega\right)^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}$$

$$V_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = ZI_0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \text{ μέγιστο } I_0$$



Σχήμα 6.11

6.3 Εφαρμογή για τη σύνθεση ταλαντώσεων (διακρότημα)

Δύο μάζες $m_1 = m_2 = m$ ολισθαίνουν χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο, υπό την επίδραση τριών ελατηρίων με $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

(α) Υποθέστε ότι για $t = 0$ οι μάζες βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους και $v_1 = -v_2$. Βρείτε τη θέση της κάθε μάζας συναρτήσει του χρόνου και τη συχνότητα της ταλάντωσης.

(β) $v_1 = v_2$ για $t = 0$ (παρόμοια ερωτήματα).

(γ) $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $x = a$, $y = 0$ για $t = 0$ (παρόμοια ερωτήματα).

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_1 + k\left(x_2 - x_1\right) \\ m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_2 - k\left(x_2 - x_1\right) \end{aligned}$$

Αθροίζουμε:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2)$$

Αφαιρούμε:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 - x_2) = -3k(x_1 - x_2)$$

Ορίζουμε τις νέες μεταβλητές $A = x_1 + x_2$ και $B = x_1 - x_2$ με εξίσωση κίνησης

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2} &= -kA \Rightarrow \omega_A^2 = \frac{k}{m} \\ m\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}t^2} &= -3kB \Rightarrow \omega_B^2 = \frac{3k}{m} \end{aligned}$$

Λύση των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1 \sin\omega_A t + A_2 \cos\omega_A t \\ B(t) &= B_1 \sin\omega_B t + B_2 \cos\omega_B t \end{aligned}$$

Γυρνάμε πίσω στα x_1, x_2:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A(t) + B(t)}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1 \sin\omega_A t + B_1 \sin\omega_B t + A_2 \cos\omega_A t + B_2 \cos\omega_B t\right] \\ x_2(t) &= \frac{A(t) - B(t)}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1 \sin\omega_A t - B_1 \sin\omega_B t + A_2 \cos\omega_A t - B_2 \cos\omega_B t\right] \end{aligned}$$

Απάντηση στην περίπτωση (α) με $x_1(t=0)=0,\ x_2(t=0)=0,\ v_1(t=0)=-v_2(t=0)$

$$\begin{cases} x_1(0) &= 0 \Rightarrow A_2+B_2=0 \\ x_2(0) &= 0 \Rightarrow A_2-B_2=0 \end{cases} \Rightarrow A_2=0, \quad B_2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{A_1}{2}\sin\omega_A t+\dfrac{B_1}{2}\sin\omega_B t \\ \\ x_2(t) &= \dfrac{A_1}{2}\sin\omega_A t-\dfrac{B_1}{2}\sin\omega_B t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\omega_A\frac{A_1}{2}\cos\omega_A t+\omega_B\frac{B_1}{2}\cos\omega_B t \\ v_2 &= \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\omega_A\frac{A_1}{2}\cos\omega_A t-\omega_B\frac{B_1}{2}\cos\omega_B t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(0)=-v_2(0) &\Rightarrow \omega_A\frac{A_1}{2}+\omega_B\frac{B_1}{2}=-\omega_A\frac{A_1}{2}+\omega_B\frac{B_1}{2} \\ &\Rightarrow \omega_A A_1=0\Rightarrow A_1=0 \text{ διότι } \omega_A\neq 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{B_1}{2}\sin\omega_B t \\ \\ x_2(t) &= -\dfrac{B_1}{2}\sin\omega_B t \end{cases} \end{aligned}$$

δηλαδή το σύστημα ταλαντεύεται με $x_1(t)=-x_2(t)$ και με συχνότητα ω_B.

Όμοια απαντάμε στην περίπτωση (β) όπου βρίσκουμε

$$x_1(t)=\frac{A_1}{2}\sin\omega_A t$$

$$x_2(t)=\frac{A_1}{2}\sin\omega_A t$$

δηλαδή το σύστημα ταλαντεύεται με $x_1(t)=x_2(t)$ και με συχνότητα $\omega_A=\sqrt{k/m}$, σαν να μην υπάρχει το μεσαίο ελατήριο.

Απάντηση στην περίπτωση (γ) με $v_1(0)=0$, $v_2(0)=0$, $x_1(0)=a$, $x_2(0)=0$

$$\begin{cases} v_1(0) &= 0 \Rightarrow \omega_A A_1+\omega_B B_1=0 \\ v_2(0) &= 0 \Rightarrow \omega_A A_1-\omega_B B_1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1=0,\ B_1=0$$

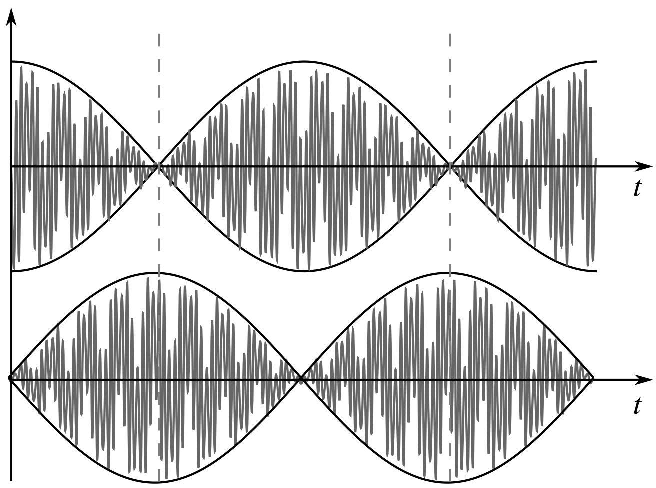
$$x_2(0)=0\Rightarrow A_2=B_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{A_2}{2}\left(\cos\omega_A t+\cos\omega_B t\right) \\ \\ x_2(t) &= \dfrac{A_2}{2}\left(\cos\omega_A t-\cos\omega_B t\right) \end{cases}$$

$$x_1(0)=a=2\frac{A_2}{2}=A_2\Rightarrow A_2=a$$

$$\begin{aligned} \cos\omega_A t+\cos\omega_B t &= 2\cos\frac{\omega_B-\omega_A}{2}t\cos\frac{\omega_B+\omega_A}{2}t \\ \cos\omega_A t-\cos\omega_B t &= 2\sin\frac{\omega_B-\omega_A}{2}t\sin\frac{\omega_B+\omega_A}{2}t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) &= \left[a\cos\left(\dfrac{\omega_B-\omega_A}{2}t\right)\right]\cos\left(\dfrac{\omega_B+\omega_A}{2}t\right) \\ x_2(t) &= \left[a\sin\left(\dfrac{\omega_B-\omega_A}{2}t\right)\right]\sin\left(\dfrac{\omega_B+\omega_A}{2}t\right) \end{cases}$$



Σχήμα 6.12: *Διακρότημα*