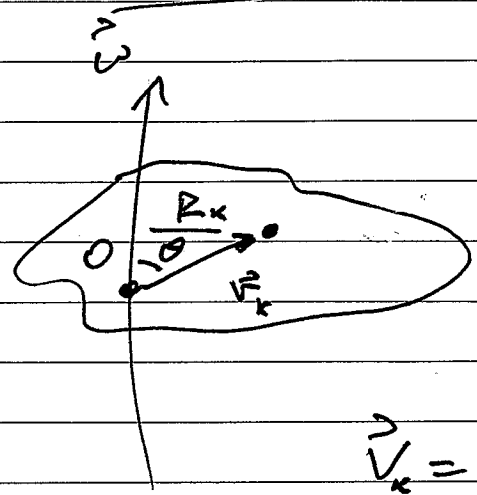


ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

A Περιγραφή γύρω από Στιγματικό άξονα $\vec{\omega}$.



$$v_k = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow v_k \sin\theta = R_k$$

$$\vec{v}_k \perp (\vec{\omega}, \vec{r}_k)$$

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$$

Στροφομή μάζας M_k στο σημείο \vec{r}_k

$$L_k = M_k \vec{r}_k \times \vec{v}_k = M_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)$$

Ολική Στροφομή Στερεού Σώματος ως προς το σημείο O, το οποίο περιγράφεται σιγμιαία με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα $\hat{\omega}$
$$\vec{\omega} = \omega \hat{\omega}$$

Χαρίζουμε το στερεό σώμα σε N κομμάτια

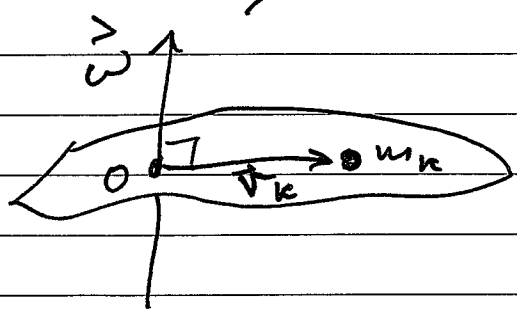
$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N \vec{L}_k = \sum_{k=1}^N M_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)$$

και παίρνουμε $N \rightarrow \infty \Rightarrow M_k \rightarrow dM_k$

Κινητική Ενέργεια:

οπότε
$$K = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k |\vec{\omega} \times \vec{r}_k|^2$$

Μερική Ορισμένη: Είναι το Σύνολο, περιορισμένη γύρω από άξονα $\vec{\omega}$ κάθετος στο επίπεδο Σώμα.



$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \omega r_k \hat{\phi}$$

$$L = \sum_k m_k r_k^2 \omega$$

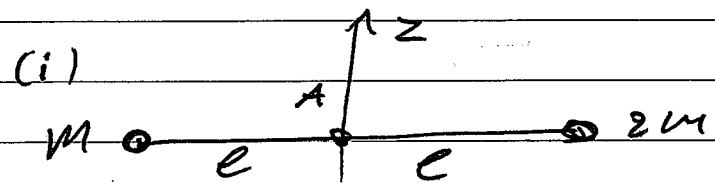
$$K = \frac{1}{2} \sum_k m_k r_k^2 \omega^2$$

Ορίζουμε την ποσότητα Αξία της Ένωσης ως προς τον άξονα $\vec{\omega}$

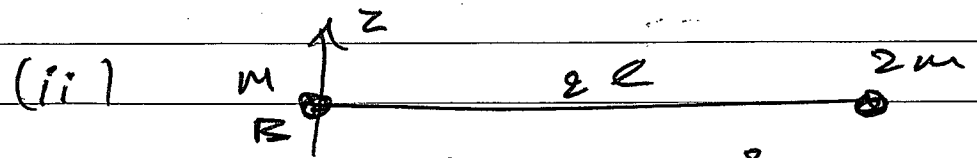
$$I_0 = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\text{Σώμα, όγκου σώματος}} r^2 dm$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{L} = I_0 \omega \vec{\omega} \\ K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \end{cases}$$

Παράδειγμα:



$$I_A = m e^2 + 2m e^2 = 3m e^2$$

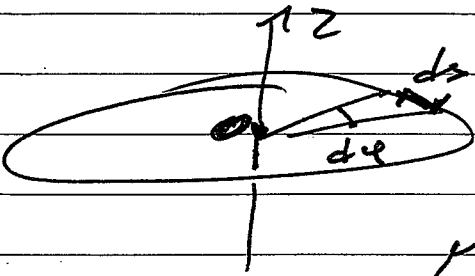


$$I_B = 2m (2e)^2 = 8m e^2$$

B

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

(1) Δακτύλιος: Ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του



Υποθέτουμε τον δακτύλιο ομογενή, με ομογενή πυκνότητα μάζας ανά μονάδα μήκους, ακτίνας R και μάζας M.

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$

$$ds = R d\phi$$

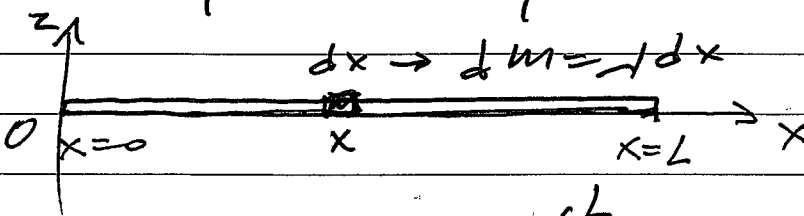
Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε τμήματα μήκους ds και μάζας $dm = \lambda ds$

$$I_0 = \sum_k v_k^2 dm_k = \int_{\text{δακτύλιος}} R^2 \lambda ds = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\phi$$

$$I_0 = 2\pi R^3 \lambda = MR^2$$

(2) Ραβδος: Ομογενής μήκους L, μάζας M

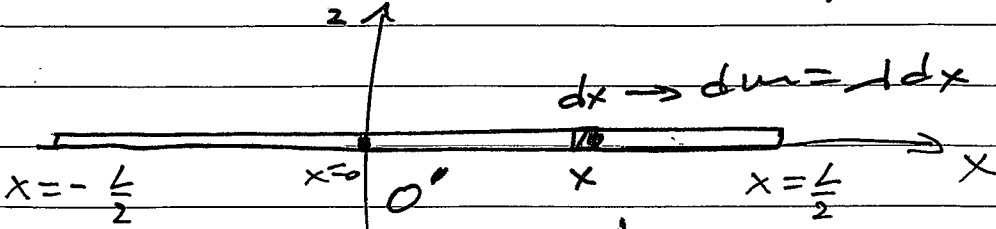
(i) ως προς άξονα που περνάει από μια άκρη του ραβδίου



$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$I_0 = \int_{\text{ραβδο}} x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

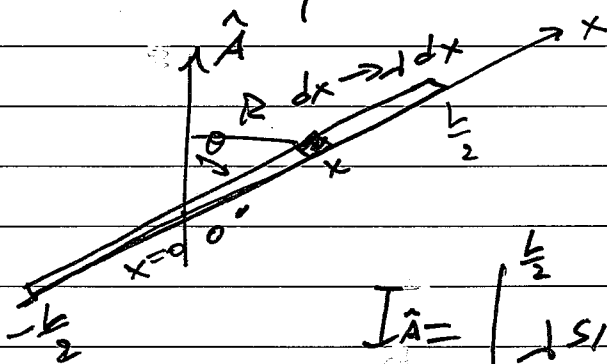
(ii) ως προς άξονα που περνάει από το μέσο των παβίων



$$I_{O'} = \int_{\text{παβίο}} x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = \lambda \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} \lambda L^3$$

$$I_{O'} = \frac{1}{12} M L^2$$

(iii) Ο άξονας συμπίπτει με τον άξονα z με την παβίο



$$dI = R^2 dm = R^2 \lambda dx$$

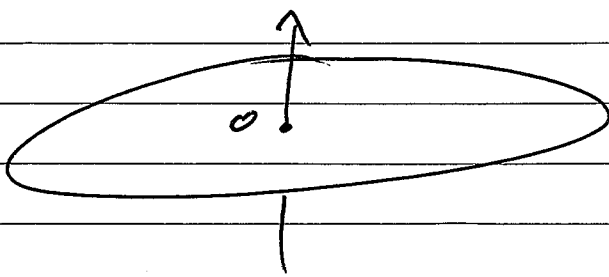
$$\sin \theta = \frac{R}{x}$$

$$dI = x^2 \sin^2 \theta \lambda dx$$

$$I_{\hat{A}} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda \sin^2 \theta x^2 dx = \lambda \sin^2 \theta \frac{1}{12} L^3$$

$$I_{\hat{A}} = \sin^2 \theta \frac{1}{12} M L^2$$

(3) Δίσκος: Ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του οριζόντιο δίσκου που περνάει από το κέντρο του οριζόντιο δίσκου = R, μάζα = M



Δίσκος ομογενής
 πυκνότητα μάζας στα
 σημεία επιφανείας
 $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$

από τον ορισμό $I_0 = \int_{\Delta \text{ισκο}} v^2 dm$

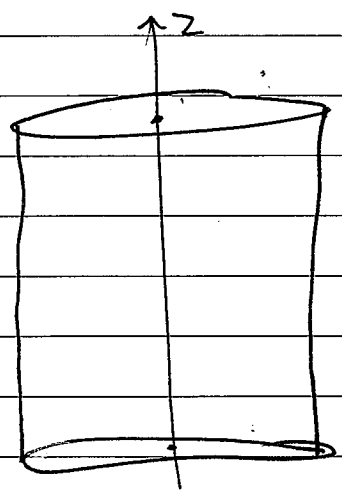
Οργανώνουμε την ομοιογενή σφαίρα ως εξής: χωρίζουμε σε στοιχειώδεις δακτυλίους ακτίνας v και πάχους dv με μάζα $dm = \sigma 2\pi v dv$

$dI_{\text{δακτυλίου}} = v^2 dm$

$I_{\text{δακτυλίου}} = \sum dI_{\text{δακτυλίου}} = \int_0^R v^2 \sigma 2\pi v dv$

$I_{\text{δακτυλίου}} = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$

4) 'Ασφα κεντρικού κατ' ορθογώνιου άξονα βάσης R
ύψους H
ομογενούς μάζας M



Ποιά αδρανειακή στιγμή έχει ως προς τον άξονα του κεντρικού

$\sigma = \frac{M}{2\pi R^2 + 2\pi RH}$

επιφανειακή πυκνότητα μάζας

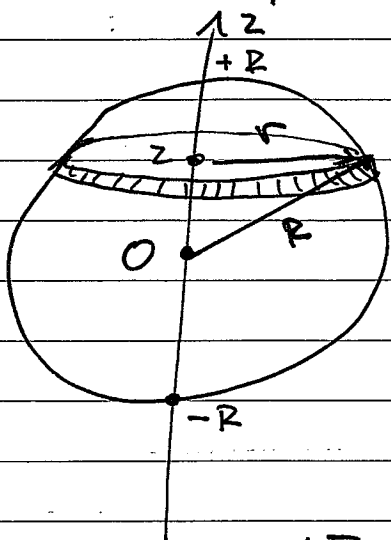
$I_z = 2 I_{z, \text{βάσης}} + I_{z, \text{παραπλευρική επιφάνεια}}$

$I_z = 2 \left\{ \frac{1}{2} \sigma \pi R^2 R^2 \right\} + \sigma \frac{2\pi RH R^2}{M \text{ παραπλευρική επιφάνεια}}$

$I_z = \frac{M}{2\pi R^2 + 2\pi RH} [\pi R^3 + 2\pi H R^3]$

(6)

(5) Ποια Αξονική Σφαίρα Μάζας M ακτίνας R , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της



$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Πυκνότητα μάζας ανά μονάδα όγκου

Χρησιμοποιούμε την Σφαίρα σε στοιχειώδεις Δίσκους πάχους dz και ακτίνας r και μάζας $dM = \rho \pi r^2 dz$

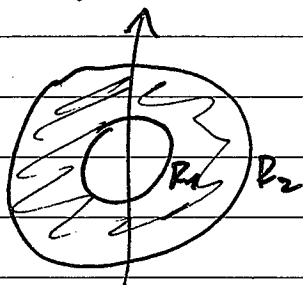
$$dI_{\Delta} = \frac{1}{2} dM r^2 = \frac{\rho \pi}{2} r^4 dz$$

$$r^2 = R^2 - z^2$$

$$I_{\Sigma\phi} = \sum dI_{\Delta} = \frac{\rho \pi}{2} \int_{-R}^R r^4 dz = \int_{-R}^R \frac{\rho \pi}{2} (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$I_{\Sigma\phi} = \frac{\rho \pi}{2} \frac{16}{15} R^5 = \frac{8}{5} M R^2$$

(6) Ποια Αξονική Σφαίρική Κελύφη ακτίνας R_1, R_2 μάζας M



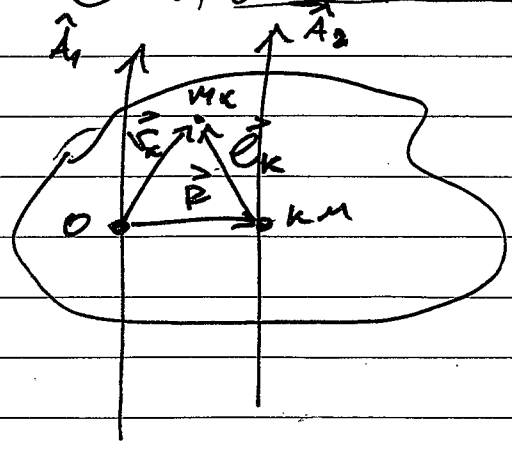
$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3}$$

$$I_{\Sigma\phi} = I_{\Sigma\phi}(R_2) - I_{\Sigma\phi}(R_1)$$

$$I_{\Sigma\phi}(R_2) = \frac{\rho \pi}{2} \frac{16}{15} R_2^5$$

$$I_{\Sigma\phi}(R_1) = \frac{\rho \pi}{2} \frac{16}{15} R_1^5$$

(Γ) (i) ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ $A \equiv O \neq N$



\vec{A}_1 ομοιά \vec{A}_1 από το O
 \vec{A}_2 ομοιά \vec{A}_2 από το CM

$$I_O = MR^2 + I_{CM}$$

$\vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2$ και $\vec{R} \perp \vec{A}_1$
 $\vec{R} \perp \vec{A}_2$

$$\vec{v}_k = \vec{R} + \vec{e}_k$$

$$|\vec{R} \times \vec{A}_1| = R$$

$$I_O = MR^2 + I_{CM}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$I_O = \sum_k m_k (\vec{v}_k \times \vec{A}_1) \cdot (\vec{v}_k \times \vec{A}_1)$$

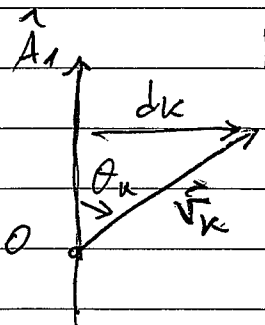
$$= \sum_k m_k [(\vec{R} + \vec{e}_k) \times \vec{A}_1] \cdot [(\vec{R} + \vec{e}_k) \times \vec{A}_1]$$

$$= \sum_k m_k (\vec{R} \times \vec{A}_1) \cdot (\vec{R} \times \vec{A}_1) + \sum_k m_k (\vec{e}_k \times \vec{A}_1) \cdot (\vec{e}_k \times \vec{A}_1) + 2 \sum_k m_k (\vec{R} \times \vec{A}_1) \cdot (\vec{e}_k \times \vec{A}_1)$$

$$= \sum_k m_k R^2 + \sum_k m_k L_k^2 + 0 = MR^2 + I_{CM}$$

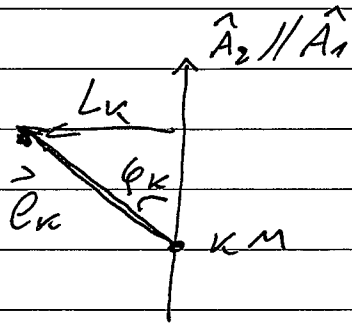
$$(\vec{R} \times \vec{A}_1) \cdot (\vec{e}_k \times \vec{A}_1) = (\vec{R} \cdot \vec{e}_k)(\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_1) - (\vec{R} \cdot \vec{A}_1)(\vec{e}_k \cdot \vec{A}_1) = \vec{R} \cdot \vec{e}_k$$

$$\sum_k m_k \vec{R} \cdot \vec{e}_k = (\sum_k m_k \vec{e}_k) \cdot \vec{R} = 0 \quad \text{οτι} \quad \sum_k m_k \vec{e}_k = 0$$



$$|\vec{v}_k \times \vec{A}_1| = |\vec{v}_k| \sin \theta_k = dk$$

$$I_O = \sum_k m_k dk^2$$

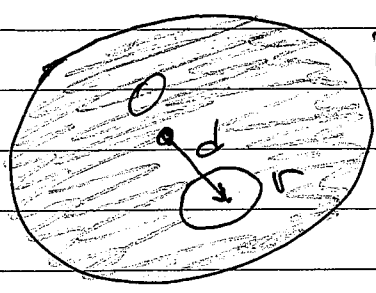


$$|\vec{e}_k \times \vec{A}_1| = |\vec{e}_k| \sin \phi_k = L_k$$

$$I_{CM} = \sum_k m_k L_k^2$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Δίσκος μάζας M , ακτίνας R

Έχει κυκλική τρύπα ακτίνας r σε απόσταση d από το κέντρο του (δες σχήμα). Βρείτε την Ροπή Αδράνειας ως προς το κέντρο O του Δίσκου.



R M, R, r, d

$$I_0 = I_{\Delta, R}^{(0)} - I_{\Delta, r}^{(0)}$$

Οι δύο δίσκοι έχουν μάζα με

Πυκνότητα:

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 - \pi r^2}$$

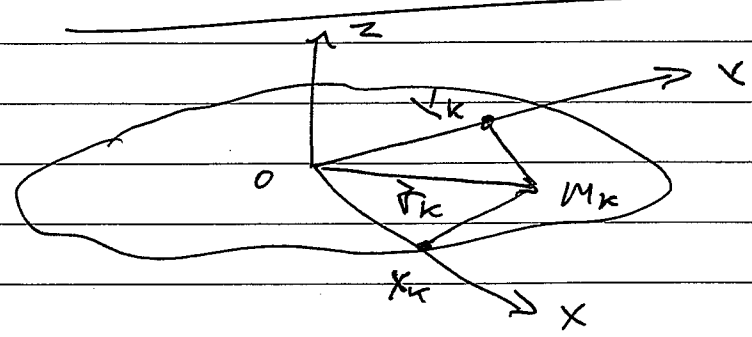
$$I_{\Delta, R}^{(0)} = \frac{1}{2} M_{\Delta} R^2 = \frac{1}{2} (\rho \pi R^2) R^2 = \frac{\rho \pi}{2} R^4$$

$$I_{\Delta, r}^{(0)} = M' d^2 + \frac{1}{2} M' r^2 = (\rho \pi r^2) d^2 + \frac{1}{2} (\rho \pi r^2) r^2$$

$$I_{\Delta, r}^{(0)} = \rho \pi (r^2 d^2 + \frac{1}{2} r^4)$$

$$I_0 = \frac{M}{R^2 - r^2} \left[\frac{1}{2} R^4 - r^2 \left(d^2 + \frac{r^2}{2} \right) \right]$$

(ii) ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΘΕΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ
ΛΕΠΤΟ ΣΩΜΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (x, y)



$$I_z = \sum_k M_k r_k'^2$$

$$r_k'^2 = x_k^2 + y_k^2$$

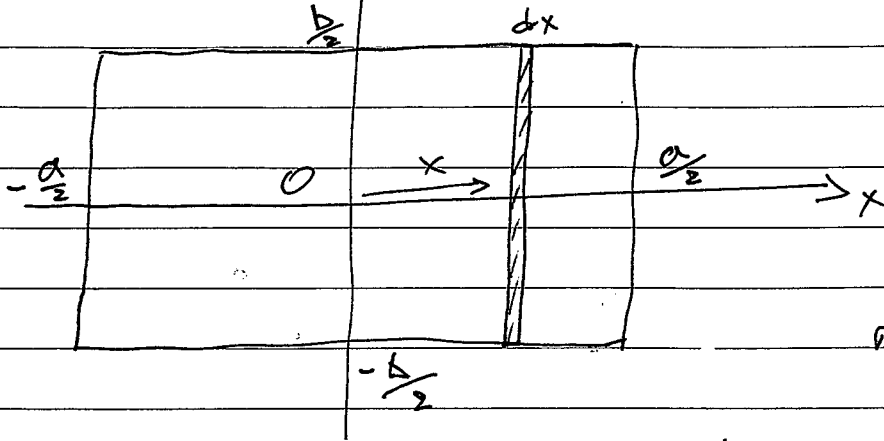
$$I_x = \sum_k M_k y_k^2, \quad I_y = \sum_k M_k x_k^2$$

$$\Rightarrow \underline{I_z = I_x + I_y}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Ροπή Αξόνων \rightarrow επίπεδο

Πλάτος b μήκος M \rightarrow προς άξονα z

\downarrow κάθετο στην Πλάκας κεντρο της.



Ακτινότητα μήκος

$$0 = \frac{M}{ab}$$

Ροπή αξόνων ως προς τον άξονα x :

Χαρίζουμε τον Πλάκα σε στοιχειώδη

τμήματα Πλάκας dx και μήκος b με μάζα

$$dm = \sigma b dx$$

\rightarrow Ροπή Αξόνων \rightarrow τμήματος ως προς τον άξονα x

$$dI_x = x^2 dm \Rightarrow I_x = \sum dI_x = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \sigma b dx = \frac{M}{a^3} \frac{a^3}{8}$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{12} M a^2 \quad \text{οπότε} \quad I_x = \frac{1}{12} M b^2$$

$$\rightarrow I_z = I_x + I_x = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

Δ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΟΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ, ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

Ο βασικός νόμος κίνησης είναι η μεταβολή της Στροφορμής λόγω των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων

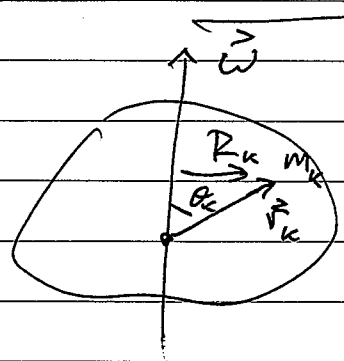
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

Προβλέπουμε σαν σταθερό άξονα \hat{z} γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα

$$\hat{z} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{z} = \vec{N} \cdot \hat{z} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \hat{z}) = N_{\text{αξονα}}$$

Οπότε εισάγουμε ότι $\vec{L} \cdot \hat{z} = L_{\text{αξονα}} = I_{\text{αξ}} \omega$



$$\vec{L}_k = m_k \vec{v}_k \times \vec{r}_k = m_k \vec{v}_k + (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)$$

$$= m_k [v_k^2 \vec{\omega} - (\vec{v}_k \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_k]$$

γενική σχέση υσμετρικής σχέσης $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$

$$\vec{L}_k \cdot \hat{z} = \vec{L}_k \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{m_k}{\omega} [v_k^2 \omega^2 - (\vec{v}_k \cdot \vec{\omega})(\vec{r}_k \cdot \vec{\omega})]$$

$$= \frac{m_k}{\omega} (v_k^2 \omega^2 - v_k^2 \omega^2 \cos^2 \theta_k) = m_k v_k^2 \omega (1 - \cos^2 \theta_k)$$

$$= m_k \omega v_k^2 \sin^2 \theta_k = m_k R_k^2 \omega$$

$$\vec{L} = \sum_k \vec{L}_k \Rightarrow \vec{L} \cdot \hat{z} = \sum_k (\vec{L}_k \cdot \hat{z}) = L_{\text{αξονα}}$$

$$\Rightarrow L_{\text{αξονα}} = \sum_k (\vec{L}_k \cdot \vec{\omega}) = \sum_k m_k R_k^2 \omega = I_{\alpha\zeta} \omega$$

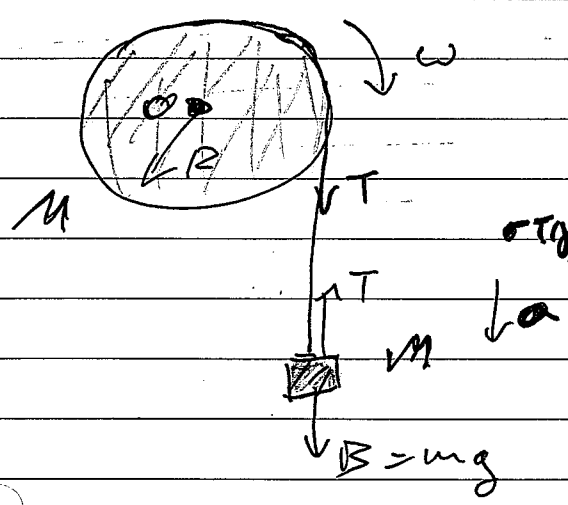
$$I_{\alpha\zeta} = \sum_k m_k R_k^2$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \boxed{I_{\alpha\zeta} \frac{d\omega}{dt} = N_{\alpha\zeta}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

1) Τροχαλία μάζας M , ακτίνας R ,

βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κινείται υψός M .



Η τροχαλία σέρφεται στιγμιαία με γωνιακή επιτάχυνση α , και το σύρμα μάζας m κινείται στιγμιαία με ταχύτητα v

το σύρμα κινείται κατά ds η τροχαλία σέρφεται κατά $d\varphi$:

$$ds = R d\varphi \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow v = R \omega$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R \alpha$$

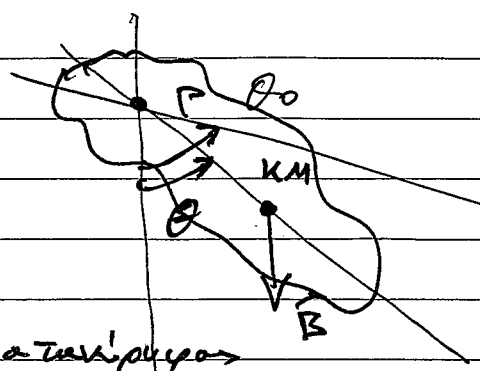
Εξισώσεις κίνησης: $B - T = ma$
 (το σύρμα δεν έχει μάζα) $TR = I_0 \frac{d\omega}{dt}$

$$\Rightarrow T = mg - ma \Rightarrow Rmg - maR = I_0 \frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow a = \frac{mgR^2}{I_0 + mR^2}$$

2

Φυσική Εκκεντρώ



κατακλίση
 $\theta_0 = 15^\circ$ ποσότητας
 τωσ σφαιρικό
 σφαιρικό

Σε απόσταση l
 από το M περιστρέφεται
 γύρω από οριζόντιο
 άξονα στο σημείο P

$\theta_0 =$ μέγιστη γωνία
 απόκλισης από
 την κατακλίση
 $l =$ απόσταση κέντρου μάζας
 από το σημείο
 άκσης P

$I_{KM} =$ Ροπή αδράνειας ως προς KM
 $I_P = M l^2 + I_{KM}$

Εξίσωση κίνησης: $I_P \frac{d\omega}{dt} = -lmg \sin\theta$
 $\vec{L}_P = I_P \omega \hat{z}$, $\vec{N}_P = \vec{c} \times \vec{B} = -lmg \sin\theta \hat{z}$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow I_P \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin\theta$

για μικρή γωνία απόκλισης $\theta_0 \leq 5^\circ \approx 0.10$ ακτίνα

$\sin\theta \approx \theta + \frac{\theta^3}{6} + \dots$ απόσταση από την ακτίνα

$\Rightarrow I_P \theta'' = -mgl \theta \Rightarrow \theta'' = -\frac{mgl}{I_P} \theta$

ταξάνωση $\theta'' = -D\theta$, $\omega_0^2 = D$

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{D}$

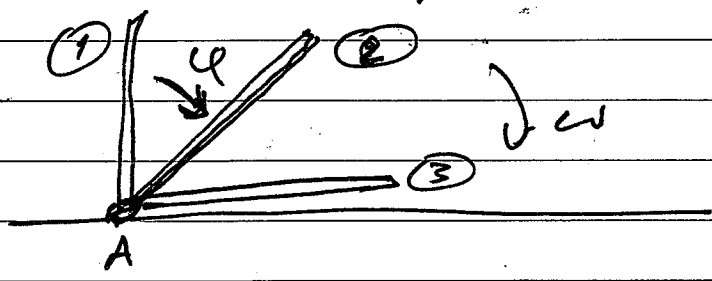
$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgl}{I_P}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I_P}{mgl}}$

Από Μαθηματικό Έργο

$$I_p = ml^2 \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Προβλήματα:

1) Ράβδος μήκους l περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα A που περνάει από το κάτω άκρο της. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν ακαμπάρει στο έδαφος.



Διατήρηση Ενέργειας

$$U(1) + K(1) = U(3) + K(3)$$

$U(1)$ = Δυναμική Ενέργεια Κέντρου Μάζας

$$U(1) = Mg \frac{l}{2}, \quad K(1) = 0, \quad U(3) = 0$$

$$K(3) = \frac{1}{2} I_A \omega^2, \quad l = \text{μήκος ράβδου}$$

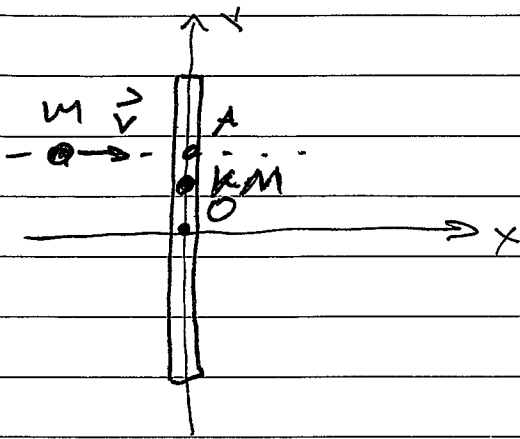
$$\Rightarrow Mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_A \omega^2, \quad I_A = \frac{1}{3} Ml^2$$

$$\omega^2 = \frac{2Mg \frac{l}{2}}{\frac{1}{3} Ml^2} = \frac{Mgl}{\frac{1}{3} Ml^2} = 3 \frac{g}{l}$$

2) Ράβδος μήκους l και μάζας M κρέμεται ακίνητη επάνω σε οριζόντιο επίπεδο επιπέδου χεριών τριβής. Μια μπάλα m ^(μίσσας) κινείται οριζόντια και κτυπάει την ράβδο κέντρου με ταχύτητα v σε απόσταση $\frac{l}{4}$ από το μέσον της ράβδου.

Η κρούση είναι ελαστική. Βρείτε τον κίνηση του συστήματος (μαζα κέντρο + ράβδος) μετά την κρούση.

$$M \ell, m, v, OA = \frac{\ell}{4}$$



Το ΚΜ του συστήματος κινείται με ταχύτητα \vec{V}_{KM} μετά την κρούση

Το σύστημα (μαζα κέντρο + ράβδος) εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από το σημείο του ΚΜ μετά την κρούση

$$\vec{P}_{KM} = \frac{m \frac{\ell}{4}}{M + m} \hat{x} \quad \text{κατά την στιγμή της κρούσης}$$

Ταχύτητα ΚΜ, Δεσμίωση Όρμης, Διατήρηση Κρούσης

$$m \vec{v} = (m + M) \vec{V}_{KM}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{KM} = \frac{m}{m + M} \vec{v} = \frac{mv}{m + M} \hat{x}$$

Δεσμίωση Στροφέων γύρω από το ΚΜ:

$$m v \left(\frac{\ell}{4} - r_{KM} \right) = I_{KM} \omega$$

$$I_{KM} = (M r_{KM}^2 + \frac{1}{12} M \ell^2) + m \left(\frac{\ell}{4} - r_{KM} \right)^2$$

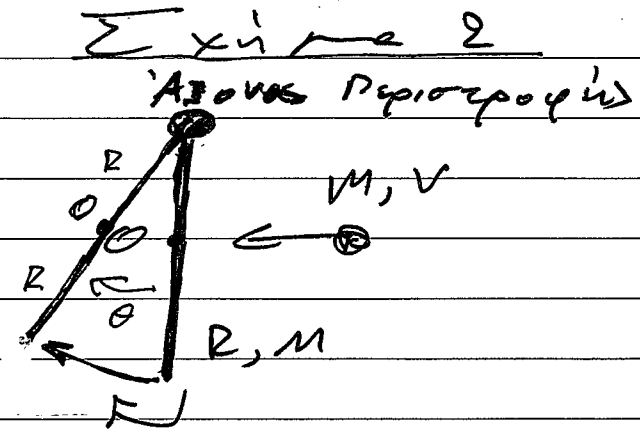
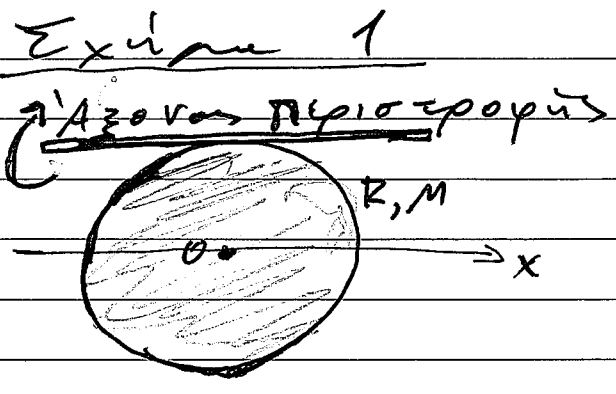
$$\vec{r}_{KM}(t) = \vec{r}_{KM}^{(0)} + \vec{V}_{KM} t$$

(3) Έχουμε μάζες m καρτώνεται κάθετα στο κέντρο οριζωνιάς δίσκου, μάζας M και ακτίνας R , με ταχύτητα v . Ο δίσκος μπορεί να σπερφίσει εφ'είθερα γύρω από οριζόντιο άξονα εφαπτόμενο στην περιφέρεια του στο ίδιο επίπεδο με τον δίσκο (όπως σχήμα 1). Για την κίνηση τα βήματα $\delta \theta$ σχήμα 2.

(α) Βρείτε την διαφορετική κίνηση του συστήματος (δίσκος + βήματα) με τα τον κρατόν.

(β) μέχρι ποια γωνία σπερφίσει ο δίσκος με τα τον κρατόν?

(γ) Για $\theta < \theta_0$ δείξτε ότι ο δίσκος κάνει ταλαντώση, βρείτε τον περίοδο της ταλαντώσεως.



(α)
$$I_{AN} \frac{d\omega}{dt} = -Mg R \sin\theta \quad M_{O_1} = m + M$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad I_{AN} = MR^2 + I_{AB}^{(κίεκox)}$$

$$I_{AN}^{(κίεκox)} = MR^2 + I_{Ox}^{(A)}$$

Θεώρημα κεντρικών αξόνων $\Rightarrow 2I_{Ox}^{(A)} = I_{Oz}^{(A)}$

x άξονας στο επίπεδο των Διοκων
z άξονας κάθετος στο επίπεδο των Διοκων

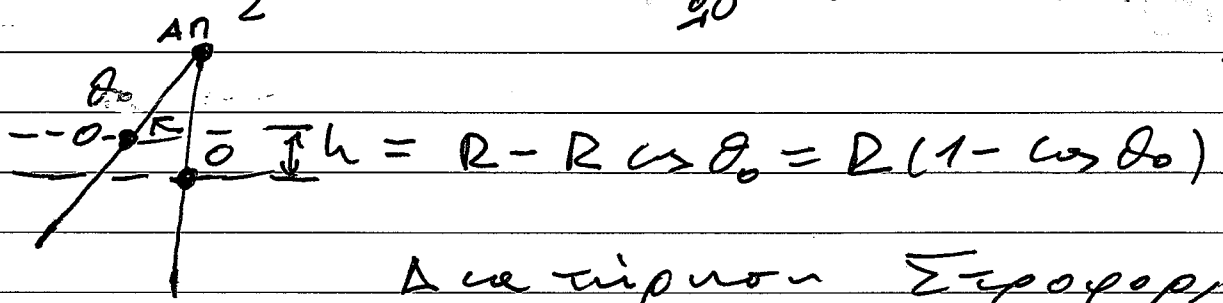
$$I_z(\Delta) = \frac{1}{2} M R^2 \Rightarrow I_{Ox}(\Delta) = \frac{1}{4} M R^2$$

$$I_{AN}(\Delta) = M R^2 + \frac{1}{4} M R^2 = \frac{5}{4} M R^2$$

$$I_{AN} = \left(M + \frac{5M}{4} \right) R^2$$

(b) Διατήρηση Ενέργειας:

$$\frac{1}{2} I_{AN} \omega^2 = M g R (1 - \cos \theta_0)$$



Διατήρηση Στροφορμής
κεντρωμένη κίνηση:

$$m v R = I_{AN} \omega \Rightarrow \omega = \frac{m R v}{I_{AN}}$$

και βρίσκουμε το $\cos \theta_0$.

$$(*) \text{ είν } \theta_0 \approx 0.1 \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{M g R}{I_{AN}} \theta = - \omega_0^2 \theta$$

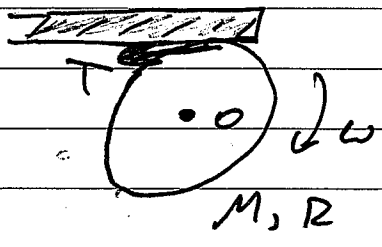
$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{AN}}{M g R}}$$

(4) Ένας λεπτός τροχός έχει σχήμα συμπαγούς κυλίνδρου μάζας M ακτίνας R και σφίρεται χωρίς γλίστρες με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο των βαρών του. Σε κάποια χρονική στιγμή εφαρμόζουμε στη επιφάνεια του κυλίνδρου μια τριχοειδή που ασκεί δύναμη εφαπτόμενη ίση με T .

(α) Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει ο τροχός?

(β) Πόση γωνία θα διαγράψει ο τροχός μέχρι να σταματήσει?



Εξίσωση κίνησης

$$I_k \frac{d\omega}{dt} = -TR$$

$$I_k = \frac{1}{2} MR^2$$

(α)
$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{TR}{I_k} = - \frac{2T}{MR}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \omega_0 - \frac{2T}{MR} t$$

όταν σταματήσει ο τροχός $\omega(\tau_0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{2T}{MR} \tau_0 = \omega_0 \Rightarrow \tau_0 = \frac{MR}{2T} \omega_0$$

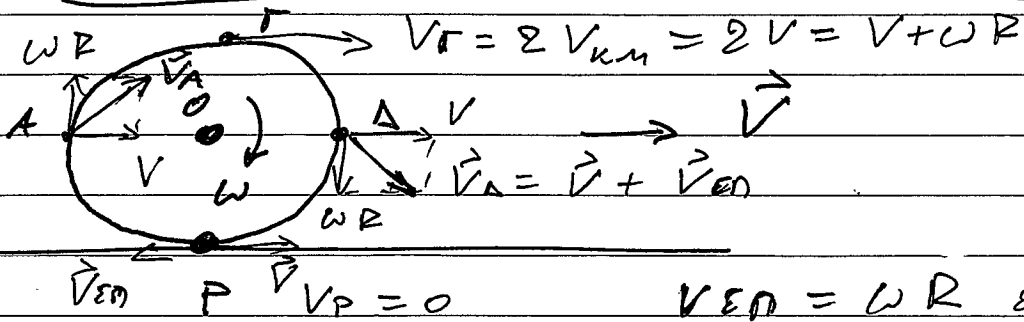
(β)
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - \frac{2T}{MR} t$$

$$\theta(t) = \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{2T}{MR} t^2$$

$$\theta_{\text{ολική}} = \theta(\tau_0)$$

E

ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ



$V_{EP} = \omega R$ εφαπτόμενη στην κίνηση

Κύλιση χωρίς ολίσθηση \Rightarrow εαν ο κύλινδρος κινηθεί κατά ds (κίνηση του οδοντωδού του κύλινδρου $M ds$) τότε η περιφέρεια έχω ομαλώς κατά ds

$\Rightarrow ds = R d\phi \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\phi}{dt}$

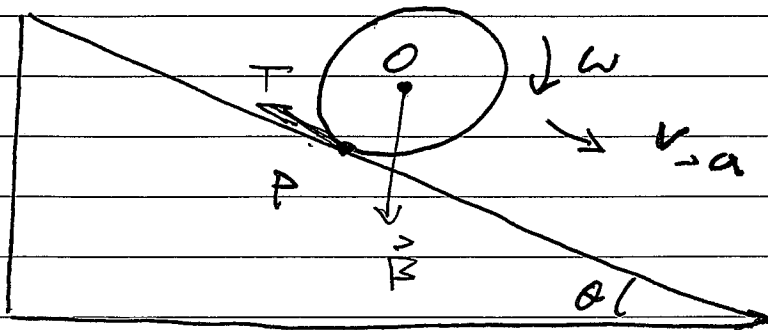
$\Rightarrow v_{cm} = v_o = R \omega = v$

Γωνιακή ταχύτητα = ωR λόγω περιστροφής

Κύλιση Κυλίνδρου σε κεκλιμένο επίπεδο

1

M, R, I_o



Στιγμιαία κίνηση είναι περιστροφή περί το σημείο P το οποίο είναι ακίνητο στιγμιαία.

Δύναμη τριβής T
Δύναμη βάρους B

$$I_P \frac{d\omega}{dt} = MgR \sin\theta$$

$$I_P = I_0 + MR^2, \quad v = R\omega$$

$$\text{Ποπή Στάσης} = R \cdot Mg \sin\theta = MgR \sin\theta$$

$$a = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR \sin\theta}{I_0 + MR^2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{MgR^2 \sin\theta}{I_0 + MR^2}$$

2) Περιορισμό γύρω από το Κέντρο Μάζας και κίνηση του Κέντρου Μάζας:

$$Ma = Mg \sin\theta - T$$

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = TR \quad \text{,} \quad a = R \frac{d\omega}{dt}$$

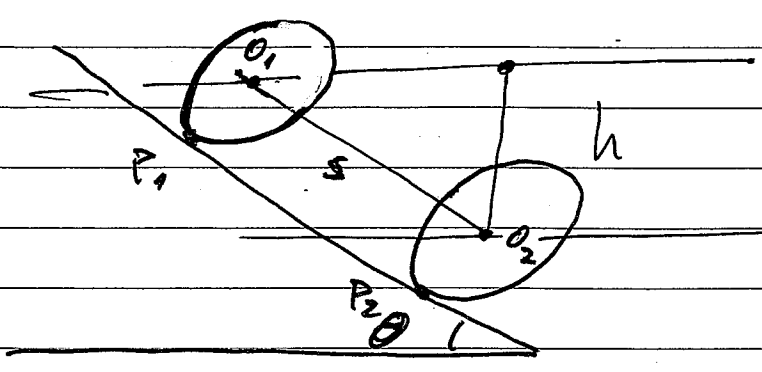
⇒ αντικαθιστούμε την τιμή T

$$T = Mg \sin\theta - Ma$$

$$TR = MgR \sin\theta - MaR = I_0 \frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow a = \frac{MgR^2 \sin\theta}{I_0 + MR^2}$$

3) Έργο τριβών $T = \mu N \Delta s \rightarrow$
 \rightarrow η ενέργεια δαμάσκειται



Επίσης υποθέτουμε
ότι η τριβή είναι στατική

$$E_1 = \frac{1}{2} M V_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 + Mgh$$

$$a = \frac{MgR^2 \sin \theta}{I_0 + MR^2} \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$V_2 = V_1 + at \quad s = V_1 t + \frac{1}{2} at^2$$

οπίζουμε $E_2 = \frac{1}{2} M V_2^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_2^2$

Αντικαθιστούμε ότι $E_2 = E_1$

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} M (V_1 + at)^2 + \frac{1}{2} \frac{I_0}{R^2} (V_1 + at)^2 = \\ &= \frac{1}{2} M V_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \frac{V_1^2}{R^2} + \left[\frac{1}{2} M a^2 t^2 + \frac{2}{2} M V_1 a t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} I_0 \frac{a^2 t^2}{R^2} + \frac{2}{2} I_0 \frac{V_1 a t}{R^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{I_0 + MR^2}{R^2} a = Mg \sin \theta$$

$$[\dots] = \left(M + \frac{I_0}{R^2} \right) a \left[\frac{1}{2} at^2 + V_1 t \right] =$$

$$= \underbrace{Mg \sin \theta}_{\text{α}} \underbrace{s}_{\text{β}} = Mgh$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 + Mgh = E_1$$

\Rightarrow Η δύναμη τριβής T δεν παράγει έργο.

4) Υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κυλιόμενου σώματος από την διατήρηση Ενέργειας:

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + Mgh$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow Mv \frac{dv}{dt} + I_0 \omega \frac{d\omega}{dt} + Mg \frac{dh}{dt} = 0$$

$$v = \omega R, \quad \frac{dv}{dt} = a = R \frac{d\omega}{dt}$$

από το προηγούμενο σχήμα έχουμε

$$v = \frac{dx}{dt} = - \frac{ds}{dt} \quad \text{δίνει το } x \text{ ανάμεσα στον}$$

$$\text{και } h = s \sin \theta \quad \text{το } s \text{ που κινείται}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = - \sin \theta \frac{dx}{dt} = - \sin \theta v$$

$$\Rightarrow Mv \frac{dv}{dt} + I_0 \frac{v}{R} \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} - Mg \sin \theta v = 0$$

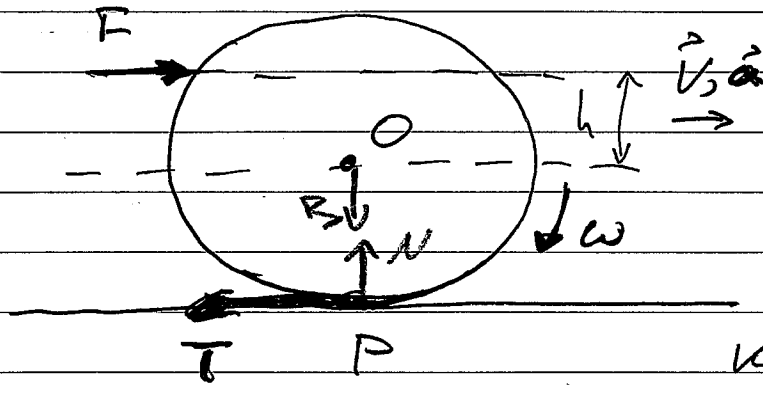
$$\Rightarrow Ma + \frac{I_0}{R^2} a = Mg \sin \theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{I_0}{R^2}} = \frac{Mg R^2 \sin \theta}{I_0 + MR^2}$$

ΣΤ

ΚΥΛΙΣΗ ΜΕ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

Έστω κύλινδρος ή σφαίρα (Μάζα) σε οριζόντιο επίπεδο με ροπή αδράνειας $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.
 Ασκείται δύναμη F στο σώμα για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt σε ύψος h από το κέντρο μάζας του, όπως στο σχήμα.
 Υποθέτουμε το Δt μικρό ώστε το σημείο P επαφής με το έδαφος να παραμένει το ίδιο και να ολισθαίνει με δύναμη τριβής T αντίθετα στο έδαφος και στο σώμα.



$M, R, I_0, F, \Delta t, \mu$
 Όσο διαρκεί η δύναμη F το Κ.Μ (centro O) επιταχύνεται με επιτάχυνση a και το σώμα αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω .

Εξισώσεις κίνησης:

$$F - T = Ma$$

$$TR + Fh = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

Εάν $a = R \frac{d\omega}{dt}$ το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει συνθήκη κίνησης χωρίς ολίσθηση.

(ii) Μπορούμε να βρούμε το κατώφλι h ώστε να ολισθαίνει συνθήκη κίνησης χωρίς ολίσθηση με μέγιστη δύναμη τριβής:

$$F = ma, Fh = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow mah = I_0 \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = \frac{I_0}{mh} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{Εαν } I_0 = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \frac{R}{h} \frac{d\omega}{dt}$$

Εαν $\frac{1}{2} \frac{R}{h} = 1 \Rightarrow$ κίνηση χωρίς ολίσθηση

Εαν $\frac{1}{2} \frac{R}{h} < 1 \Rightarrow$ Σκινάρισμα $\Rightarrow a < R \frac{d\omega}{dt}$
Ο τροχός γυρίζει γρηγορότερα
και τα κΜ προσεγγίζουν
ελάχιστη

Εαν $\frac{1}{2} \frac{R}{h} > 1 \Rightarrow a > R \frac{d\omega}{dt}$ ολίσθηση.

(ii) Έστω $h=0$, κίνηση σε ύψος των κΜ,
μια από χρόνο Δt θα είναι να ακουστεί
η δύναμη το σώμα έχει ακριβώς
ταχύτητα v_0 , υποθέτουμε ότι στο
διακρίσιμα Δt δεν είχαμε δύναμη
επίσης \Rightarrow άρα ξεκινάμε με αρχικό
γυριστή ταχύτητα μηδέν.

απόδοση

$$\Rightarrow N = Mg, T = \mu N = \mu Mg$$

$$-T = Ma \Rightarrow a = -\mu g$$

$$TR = I_0 \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu mg R}{I_0} = \frac{\mu g}{2R}$$

η ταχύτητα εξαλείφεται (επιβράδυνση a)

α γνωρίζουμε ταχύτητα αυξανόμενη ($\frac{d\omega}{dt} > 0$)

$$\Rightarrow V(t) = V_0 - |a|t = V_0 - \mu g t \quad \downarrow$$

$$\omega = \frac{d\omega}{dt} t = \frac{Mg}{IR} t \quad \uparrow$$

Κίνηση χωρίς ολίσθηση οριζόντια

$$\underline{V(t) = \omega(t) R} \rightarrow \underline{V_0 - |a|t = \frac{d\omega}{dt} R t}$$

$$\Rightarrow \text{πότε αραχόσκη} \quad t = \frac{V_0}{\mu g (1 + \frac{1}{2})}$$

Εο σωμα κινείται χωρίς ολίσθηση οριζόντια και το σωμα έχει μόνον ταχύτητα.

