



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ**  
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος  
«Φυσική – I (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»  
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη  
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

1. Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία  
(ΒΛΕΠΕ: Chapt01)
2. Νόμοι του Νεύτωνα  
(ΒΛΕΠΕ: Chapt02)
3. Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Αδρανειακές Δυνάμεις  
(ΒΛΕΠΕ: Chapt03)
4. Έργο – Ισχύς – Ενέργεια – Διατηρητικές Δυνάμεις  
(ΒΛΕΠΕ: Chapt04)
5. Αρμονικές Ταλαντώσεις  
(ΒΛΕΠΕ: Chapt05)
6. Συστήματα πολλών Σωματιδίων  
(ΒΛΕΠΕ: Chapt\_06)

## 7. Δυναμική του Στερεού Σώματος

Στερεό σώμα ονομάζουμε την ειδική περίπτωση ενός συστήματος πολλών σωματιδίων, στο οποίο, τα σωματίδια που αποτελούν το σύστημα, διατηρούν τις σχετικές τους διανυσματικές θέσεις ενώ το συνολικό σύστημα μπορεί να εκτελεί και μεταφορική κίνηση και περιστροφική κίνηση περί κάποιο άξονα. Ένα στερεό σώμα μπορεί να αποτελείται και από διάκριτα σωματίδια και από συνεχή κατανομή μάζας, με την προϋπόθεση ότι όλες οι συνιστώσες του συστήματος διατηρούν τις σχετικές τους θέσεις.

### 7.1 Στροφορμή στερεού σώματος και ροπή αδράνειας

Θα μελετήσουμε τη δυναμική ενός στερεού σώματος, που εκτελεί περιστροφική κίνηση, με κυκλική συχνότητα  $\omega$ , γύρω από έναν άξονα ο οποίος έχει σταθερό προσανατολισμό,  $\vec{\omega} = \omega \hat{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , όπου:  $\omega =$  είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, και  $\hat{\omega} =$  είναι η κατεύθυνση του άξονα περί τον οποίον γίνεται η περιστροφή.

Σε αυτή την περίπτωση, η στροφορμή ενός συστήματος πολλών σωματιδίων είναι ίση με

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i),$$

$$\text{όπου: } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \hat{x}(\omega_y z_i - \omega_z y_i) + \hat{y}(\omega_z x_i - \omega_x z_i) + \hat{z}(\omega_x y_i - \omega_y x_i)$$

$$\text{και: } m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = m_i \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_i & y_i & z_i \\ (\omega_y z_i - \omega_z y_i) & (\omega_z x_i - \omega_x z_i) & (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \end{vmatrix}$$

Το τελευταίο εξωτερικό γινόμενο δίνει τις συνιστώσες στροφορμής  $\vec{L}_i$  του σωματιδίου  $m_i$ .

Αν αθροίσουμε πάνω σε όλα τα σωματίδια του συστήματος, γράψουμε τα διανύσματα  $\vec{L}$  και  $\vec{\omega}$  ως διανύσματα-στήλες, και ομαδοποιήσουμε κατάλληλα τα στοιχεία του παραπάνω εσωτερικού γινομένου παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ο Πίνακας  $\tilde{I}_i = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$  είναι ο **τανυστής αδράνειας** του συστήματος, με τα διαγώνια

στοιχεία του να ορίζονται ως **οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες**  $x, y, z$ , και μη-διαγώνια στοιχεία ως **τα γινόμενα αδράνειας**, τα οποία έχουν την ιδιότητα της συμμετρικότητας  $I_{jk} = I_{kj}$ ,  $\{j, k\} = \{x, y, z\}$ , όπως φαίνεται από τον ορισμό τους. Η άθροιση πάνω σε όλα τα σωματίδια  $\{i\}$  ενός στερεού σώματος δίνει τον τανυστή αδράνειας του στερεού σώματος, (στην περίπτωση συνεχούς κατανομής, το άθροισμα επί των  $m_i$  αντικαθίσταται από ένα ολοκλήρωμα ως προς  $dm$ ). Ο πίνακας που περιγράφει τον τανυστή αδράνειας ενός σώματος, **ως συμμετρικός, είναι πάντα διαγωνοποιήσιμος**, δηλ., μπορεί πάντοτε να ευρεθεί κατάλληλο σύστημα αναφοράς, ως προς το οποίο έχει μηδενικά μη-διαγώνια στοιχεία, και **τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι κύριες ροπές αδράνειας** ως προς τους άξονες αυτού του συστήματος αναφοράς.

Πιο συνοπτικά: 
$$\vec{L}_{/O} = \sum_i \vec{r}_{i/O} \times (m_i \vec{v}_{i/O}) = \sum_i m_i (\vec{r}_{i/O} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i/O})),$$

αλλά, από την ταυτότητα του τριπλού εξωτερικού γινομένου:

$$(\vec{r}_{i/O} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i/O})) = \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_{i/O} (\vec{r}_{i/O} \cdot \vec{\omega})$$

Οπότε: 
$$\vec{L}_{/O} = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_{i/O} (\vec{r}_{i/O} \cdot \vec{\omega})]$$

$$\vec{L}_{/O} = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_{i/O}^2 - \vec{r}_{i/O} (\vec{r}_{i/O} \cdot \vec{\omega})] = \sum_i m_i [\vec{\omega} (x_{i/O}^2 + y_{i/O}^2 + z_{i/O}^2) - (x_{i/O} \hat{x} + y_{i/O} \hat{y} + z_{i/O} \hat{z}) (\vec{r}_{i/O} \cdot \vec{\omega})]$$

$$\vec{L}_{/O} = \sum_i m_i [\vec{\omega} (x_{i/O}^2 + y_{i/O}^2 + z_{i/O}^2) - (x_{i/O} \hat{x} + y_{i/O} \hat{y} + z_{i/O} \hat{z}) (x_{i/O} \omega_x + y_{i/O} \omega_y + z_{i/O} \omega_z)] =$$

$$= \sum_i m_i [(x_{i/O} \omega_x + y_{i/O} \omega_y + z_{i/O} \omega_z) (x_{i/O}^2 + y_{i/O}^2 + z_{i/O}^2) - (x_{i/O} \hat{x} + y_{i/O} \hat{y} + z_{i/O} \hat{z}) (x_{i/O} \omega_x + y_{i/O} \omega_y + z_{i/O} \omega_z)]$$

Αν γράψουμε τα διανύσματα  $\vec{L}$  και  $\vec{\omega}$  ως διανύσματα-στήλες, και ομαδοποιήσουμε κατάλληλα τα στοιχεία του παραπάνω εσωτερικού γινομένου παίρνουμε τη σχέση (1).

Αν ονομάσουμε z-άξονα τον άξονα περιστροφής, και  $r_{\perp} = (x^2 + y^2)^{1/2}$  την κάθετη απόσταση κάθε σημείου  $(x, y)$  του σώματος από τον z-άξονα, τότε η στροφορμή του στερεού σώματος μπορεί να υπολογιστεί ως άθροισμα της στροφορμής όλων των σωματιδίων που αποτελούν το σύστημα, ως εξής: 
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i),$$

όπου 
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \hat{x}(-\omega y_i) - \hat{y}(-\omega x_i) + \hat{z} \cdot 0 = -\hat{x}(\omega y_i) + \hat{y}(\omega x_i). \quad (2)$$

$$\text{Άρα, } \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i m_i \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_i & y_i & z_i \\ -\omega y_i & \omega x_i & 0 \end{vmatrix} = \sum_i m_i \left[ -\hat{x}\omega x_i z_i + \hat{y}\omega y_i z_i + \hat{z}\omega(x_i^2 + y_i^2) \right]$$

Το αποτέλεσμα αυτό απλοποιείται περαιτέρω αν, (i) ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, και (ii) το σώμα είναι αξονικά συμμετρικό ως προς τον άξονα περιστροφής.

Ως προς την πρώτη παραδοχή, γνωρίζουμε από την ανάλυση του συστήματος πολλών σωματιδίων ότι η στροφορμή γράφεται  $\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R}_{CM/O} \times (m_{\text{ολ}} \vec{V}_{CM/O})$ , όπου  $\vec{L}_{CM}$  είναι η στροφορμή περί το κέντρο μάζας, επομένως είναι εύλογη η επιλογή άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας

Με βάση την ιδιότητα (ii), το σώμα μπορεί να διαχωριστεί σε διαφορικές «φέτες», κάθετες στον άξονα-z, κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε σταθερή τιμή  $z_0$ , οπότε η στροφορμή της «φέτας» αυτής υπολογίζεται με βάση την τελευταία σχέση

$$\vec{L}(z_0) = \sum_i m_i(z_0) \left[ -\hat{x}\omega x_i z_0 + \hat{y}\omega y_i z_0 + \hat{z}\omega(x_i^2 + y_i^2) \right] =$$

$$\vec{L}(z_0) = -\hat{x}\omega z_0 \sum_i m_i(z_0) x_i + \hat{y}\omega z_0 \sum_i m_i(z_0) y_i + \hat{z}\omega \sum_i m_i(z_0) (x_i^2 + y_i^2) =$$

$$\vec{L}(z_0) = -\hat{x}\omega z_0 m_{\text{ολ}} x_{CM/CM} + \hat{y}\omega z_0 m_{\text{ολ}} y_{CM/CM} + \hat{z}\omega \sum_i m_i(z_0) (x_i^2 + y_i^2) = 0\hat{x} + 0\hat{y} + \hat{z}\omega I_{zz}(z_0)$$

Ο μηδενισμός των συνιστωσών  $x$  και  $y$  προέρχεται από την ιδιότητα (i) (διέλευση του άξονα περιστροφής από το ΚΜ του σώματος), σε συνδυασμό με την ιδιότητα (ii) (άρα, διέλευση του άξονα περιστροφής από το ΚΜ κάθε «φέτας» κάθετης στον άξονα περιστροφής και συμμετρίας). Αθροίζοντας τις στροφορμές όλων των διαφορικών στρωμάτων, έχουμε ότι

$$\vec{L} = \hat{z}\omega \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \hat{z}\omega I_{zz} \quad (3)$$

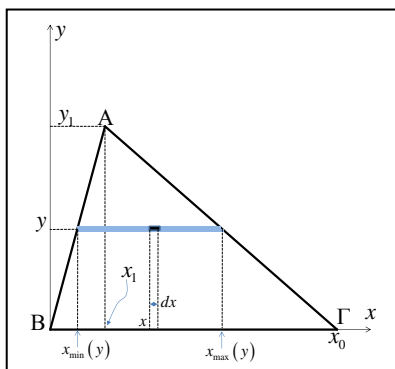
Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα  $z$ ,  $I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \equiv I_z$ , στην περίπτωση στερεού

σώματος με συνεχή κατανομή, (που να ικανοποιεί τις ανωτέρω ιδιότητες (i) και (ii), ώστε να εξακολουθεί να ισχύει η προηγούμενη συζήτηση), υπολογίζεται ολοκληρώνοντας,

$$I_z = \int_{\text{σωμα}} (x^2 + z^2) dm = \int_{\text{σωμα}} (x^2 + z^2) \rho(\vec{r}) d^3r \quad (4)$$

Στην περίπτωση επιφανειακής κατανομής,  $\sigma \equiv dm/dS$ , ή γραμμικής κατανομής,  $\lambda \equiv dm/dl$ , μάζας, τότε η διαφορική μάζα,  $dm$ , στο παραπάνω ολοκλήρωμα, γίνεται  $dm = \sigma dS$  και  $dm = \lambda dl$ , αντίστοιχα, ενώ η ολοκλήρωση γίνεται σε όλη την αντίστοιχη «έκταση».

**Παράδειγμα 7.1** Να υπολογιστεί το κέντρο βάρους ενός σκαληνού τριγώνου ΑΒΓ, με αμελητέο πάχος, σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις του.



Πριν προχωρήσουμε στον αναλυτικό υπολογισμό το κέντρου βάρους, μπορούμε να αναζητήσουμε το κέντρο βάρους ενός τριγώνου, με επιχειρήματα συμμετρίας. Αν αναλύσουμε το τρίγωνο σε μία επαλληλία λωρίδων μικρού εύρους, παράλληλα σε μία από τις πλευρές του, τότε το κέντρο βάρους κάθε λωρίδας θα βρίσκεται στο μέσον της (λόγω συμμετρίας), οπότε το κέντρο βάρους της επαλληλίας αυτών των λωρίδων (άρα, και του τριγώνου) θα βρίσκεται πάνω στη διάμεσο που ενώνει την απέναντι κορυφή με τη συγκεκριμένη πλευρά. Η ίδια ανάλυση ισχύει και για τις

τρεις πλευρές του τριγώνου, επομένως, το κέντρο βάρους θα βρίσκεται στο σημείο τομής των τριών διαμέσων (βαρύκεντρο).

Για τον αναλυτικό υπολογισμό, επιλέγουμε ένα σύστημα αναφοράς όπως, π.χ., στο διπλανό σχήμα, με την βάση του τριγώνου να ξεκινάει από την αρχή του συστήματος και να βρίσκεται στον άξονα  $x$ . Άρα οι τρεις κορυφές βρίσκονται στα σημεία  $(0,0)$ ,  $(x_0,0)$ ,  $(x_1, y_1)$ .

Αν  $m_{ολ}$  είναι η συνολική μάζα του τριγώνου, και  $S_{ολ} = \frac{\beta v}{2} = \frac{x_0 y_1}{2}$  είναι η συνολική του επιφάνεια, τότε μπορούμε να ορίσουμε μία επιφανειακή πυκνότητα μάζας ίση με  $\sigma \equiv \frac{dm}{dS} = \frac{2m_{ολ}}{x_0 y_1} = \sigma_0 = \text{σταθ.}$ , οπότε:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m_{ολ}} \int_{S_{ολ}} \vec{r} dm = \frac{1}{m_{ολ}} \int_{S_{ολ}} (\hat{x}x + \hat{y}y)(\sigma_0 dx dy) = \frac{\sigma_0}{m_{ολ}} \left[ \hat{x} \int_{S_{ολ}} x dx dy + \hat{y} \int_{S_{ολ}} y dx dy \right]$$

Για την πραγματοποίηση της επιφανειακής ολοκλήρωσης (κατά  $dx dy$ ), ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς  $x$ , (κατά μήκος της λωρίδας που φαίνεται στο σχήμα), «παγώνοντας» το  $y$  σε μία τυχαία τιμή, και υπολογίζοντας τα όρια ολοκλήρωσης του  $x$ ,  $(x_{\min}, x_{\max})$  συναρτήσει του

$$y, \quad x_{\min} = y \frac{x_1}{y_1} \quad \text{και} \quad x_{\max} = x_0 - \frac{x_0 - x_1}{y_1} y.$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_{CM} &= \frac{2}{x_0 y_1} \left[ \hat{x} \int_{y=0}^{y=y_1} \left[ \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} x dx \right] dy + \hat{y} \int_{y=0}^{y=y_1} \left[ y \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} dx \right] dy \right] = \\ &= \frac{2}{x_0 y_1} \left[ \hat{x} \int_{y=0}^{y=y_1} \frac{x_{\max}^2(y) - x_{\min}^2(y)}{2} dy + \hat{y} \int_{y=0}^{y=y_1} y [x_{\max}(y) - x_{\min}(y)] dy \right] \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση των  $x_{\max}$  και  $x_{\min}$ , συναρτήσει του  $y$  (βλ. ανωτέρω) και η επόμενη ολοκλήρωση αφήνονται για εξάσκηση στους σπουδαστές.

**Παράδειγμα 7.2** Ροπή αδράνειας λεπτής ισοπαχούς ράβδου μήκους  $L$  και μάζας  $m$ , ως προς άξονα κάθετο προς τη ράβδο, που περνάει από το ένα άκρο της,  $O$ .

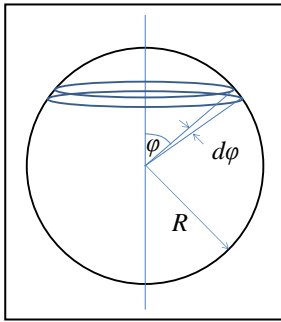
Αν  $x$  είναι η απόσταση από το άκρο  $O$  της ράβδου, και  $\lambda = m/L$  η γραμμική πυκνότητα μάζας της ράβδου, τότε κάθε διαφορικό τμήμα μήκους  $dx$  έχει μάζα  $dm = \lambda dx$ , οπότε

$$I_O = \int_0^L x^2 dm = \frac{m}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{L^3}{3} \Rightarrow I_O = \frac{1}{3} mL^2$$

**Παράδειγμα 7.3** Ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου μάζας  $m$ , ακτίνας  $R$ , και αμελητέου πάχους, ως προς άξονα κάθετο στον δίσκο που διέρχεται από το κέντρο του,  $K$ .

Ορίζουμε επιφανειακή πυκνότητα μάζας  $\sigma = m/(\pi R^2)$  και στοιχείο επιφάνειας που έχει τα χαρακτηριστικά συμμετρίας του σώματος, δηλαδή διαφορικό δαχτυλίδι ακτίνας  $r$  και πάχους  $dr$ , οπότε

$$I_K = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 (\sigma 2\pi r dr) = 2\sigma\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \Rightarrow I_K = \frac{1}{2} mR^2$$



**Παράδειγμα 7.4** Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας, ως προς μία διάμετρό του,

(α) λεπτού σφαιρικού φλοιού ακτίνας  $R$  και μάζας  $m$

(β) σφαιρικού φλοιού με εσωτερική ακτίνα  $R_1$ , εξωτερική ακτίνα  $R_2$ , και μάζα  $m$ ,

(γ) σφαίρας ακτίνας  $R$  και μάζας  $m$ .

(α) Επειδή ο φλοιός είναι λεπτός, ορίζουμε την επιφανειακή πυκνότητα μάζας  $\sigma = \frac{m}{4\pi R^2}$ , και εργαζόμαστε με στοιχειώδη

μάζα την μάζα ενός διαφορικού δακτυλιδιού με γωνιακό εύρος  $d\varphi$ , (δεδομένου ότι ολόκληρη αυτή η διαφορική μάζα έχει ενιαία κάθετη απόσταση από τον άξονα  $z$ , ίση με  $r = R \sin \varphi$ ), οπότε

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma dS, \quad \text{όπου}$$

$$dS = (\text{μήκος}) \cdot (\text{πλάτος}) = (2\pi r)(R d\varphi) = 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi$$

$$I_z = \int r^2 \sigma dS = \int_{\varphi=0}^{\pi} (R^2 \sin^2 \varphi) \sigma (2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi)$$

$$= 2\pi \sigma R^4 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} 2\pi \sigma R^4 = \frac{2}{3} (4\pi R^2 \sigma) R^2 \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{2}{3} m R^2}$$

$$\left[ \int \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{12} (\cos 3\varphi - 9 \cos \varphi) \right]$$

(β) Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας, ενός φλοιού πεπερασμένου πάχους,  $D = R_2 - R_1$ , και μάζας  $m$ , ως προς μία διάμετρό του, θα αντιμετωπίσουμε τον παχύ φλοιό ως να αποτελείται από μία επαλληλία λεπτών φλοιών ακτίνας  $R$ , πάχους  $dR$ , μάζας  $dm$ , και ροπής αδράνειας  $dI_z$ , οπότε θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), αντικαθιστώντας το  $m$  με  $dm$ . Για τον υπολογισμό του  $dm$ , ορίζουμε την πυκνότητα μάζας,

$$\rho \equiv \frac{dm}{dV} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} \Rightarrow \rho = \frac{3m}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}, \text{ και } dm = \rho dV = \left( \frac{3m}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)} \right) (4\pi R^2 dR)$$

$$\text{Άρα, } I_z = \int dI_z = \int_{R=R_1}^{R_2} \frac{2}{3} dm R^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{3m}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)} \right) \int_{R=R_1}^{R_2} R^2 (4\pi R^2 dR) = \left( \frac{2m}{(R_2^3 - R_1^3)} \right) \int_{R=R_1}^{R_2} R^4 dR$$

$$\text{Τελικά: } I_z = \left( \frac{2m}{(R_2^3 - R_1^3)} \right) \frac{R_2^5 - R_1^5}{5} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{2}{5} m \left( \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \right)}$$

(γ) Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας μίας σφαίρας ακτίνας  $R$  και μάζας  $m$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β), όπου η εσωτερική ακτίνα

$$\text{εκφυλίζεται στην τιμή } R_1 = 0, \text{ οπότε } I_z = \frac{2}{5} m \left( \frac{R^5 - 0_1^5}{R^3 - 0_1^3} \right) \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{2}{5} m R^2}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε να υπολογιστεί θεωρώντας γνωστή τη ροπή αδράνειας διαφορικού δίσκου ακτίνας  $r$ , μάζας  $dm$  (που αντιστοιχεί σε πάχος  $dz$ ),  $dI_z = \frac{1}{2} (dm) r^2$ , και ολοκληρώνοντας ως προς  $z = R \cos \varphi \Rightarrow dz = -R \sin \varphi d\varphi$ . [ $dm = ?$ ].

## 7.2 Θεωρήματα παραλλήλων και καθέτων αξόνων για τη ροπή αδράνειας

Για τη ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος, ως προς άξονα, ισχύουν δύο θεωρήματα τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για τις εφαρμογές που αφορούν την δυναμική των στερεών σωμάτων. Το πρώτο θεώρημα είναι γνωστό ως Θεώρημα των Παραλλήλων Αξόνων (ή, Θεώρημα του Steiner) και αφορά σώματα τα οποία μπορεί να εκτείνονται και στις 3-διαστάσεις. Το δεύτερο θεώρημα είναι το Θεώρημα των Καθέτων Αξόνων και αφορά επίπεδα σώματα (πλάκες) των οποίων το πάχος είναι πολύ μικρότερο από τις άλλες δύο διαστάσεις τους και, επομένως, μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτείνονται σε 2-διαστάσεις.

### Θεώρημα των Παραλλήλων Αξόνων

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα και δύο συστήματα αναφοράς  $Oxyz$  και  $Kx'y'z'$ , με τους άξονες  $Oz // Kz'$  παράλληλους μεταξύ τους, όπου το  $K$  συμπίπτει με το κέντρο μάζας (CM) του στερεού σώματος. Το κέντρο μάζας βρίσκεται στη θέση  $\vec{R}_{CM/O}$ , ως προς το  $Oxyz$ . Κάθε στοιχειώδης μάζα  $m_i$  του στερεού σώματος, που βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_{i/O}$ , ως προς το  $Oxyz$ , βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_{i/CM}$ , ως προς το κέντρο μάζας, και  $\vec{r}_{i/O} = \vec{r}_{i/CM} + \vec{R}_{CM/O}$ .

$$I_O = \sum_i m_i (x_{i/O}^2 + y_{i/O}^2) = \sum_i m_i \left[ (x_{i/CM} + X_{CM/O})^2 + (y_{i/CM} + Y_{CM/O})^2 \right] =$$

$$= \sum_i m_i (x_{i/CM}^2 + y_{i/CM}^2) + \sum_i m_i (X_{CM/O}^2 + Y_{CM/O}^2) + 2 \left( \sum_i m_i x_{i/CM} \right) X_{CM/O} + 2 \left( \sum_i m_i y_{i/CM} \right) Y_{CM/O}$$

Αλλά,  $\left( \sum_i m_i x_{i/CM} \right) = m_{ολ} X_{CM/CM} = 0$ ,  $\left( \sum_i m_i y_{i/CM} \right) = m_{ολ} Y_{CM/CM} = 0$ , οπότε, τελικά:

$$I_O = \sum_i m_i (x_{i/CM}^2 + y_{i/CM}^2) + (X_{CM/O}^2 + Y_{CM/O}^2) \sum_i m_i \Rightarrow I_O = I_{CM} + m_{ολ} D^2 \quad (5)$$

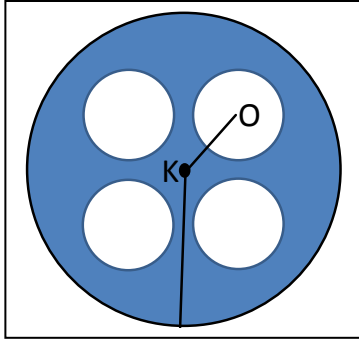
όπου  $D = \sqrt{(X_{CM/O}^2 + Y_{CM/O}^2)}$ , η απόσταση των δύο παράλληλων αξόνων  $Oz, Kz'$ . Αποδείξαμε το **Θεώρημα των παράλληλων αξόνων**: η ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα ισούται με τη ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το Κέντρο Μάζας και είναι παράλληλος προς τον αρχικό άξονα, προσαναυξημένη κατά το γινόμενο της συνολικής μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων. Το Θεώρημα των παράλληλων αξόνων ισχύει για οποιαδήποτε σχήματος στερεό σώμα, το οποίο μπορεί να εκτείνεται σε 1-, 2- ή 3- διαστάσεις.

**Παράδειγμα 7.5** Ροπή αδράνειας λεπτής ισοπαχούς ράβδου μήκους  $L$  και μάζας  $m$ , ως προς άξονα κάθετο προς τη ράβδο, που περνάει από το μέσον της,  $K$ .

Το μέσον  $K$  ισοπαχούς λεπτής ράβδου συμπίπτει με το Κέντρο Μάζας (CM) της ράβδου. Σύμφωνα με το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων, και γνωρίζοντας ότι η ροπή αδράνειας, ως προς άξονα κάθετο που περνάει από το ένα άκρο της  $O$ , είναι  $I_O = mL^2/3$ , έχουμε:

$$I_O = I_{CM} + m_{ολ} (KO)^2 \Rightarrow I_{CM} = I_O - m(L/2)^2 = \frac{mL^2}{3} - \frac{mL^2}{4} \Rightarrow I_{CM} = \frac{mL^2}{12}$$

**Παράδειγμα 7.6** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ενός τροχού που έχει τη μορφή ισοπαχούς δίσκου ακτίνας  $R$  από τον οποίον έχουν αφαιρεθεί τέσσερα κυκλικά τμήματα ακτίνας  $R/4$  το καθένα, τα κέντρα των οποίων είναι διατεταγμένα σταυροειδώς, σε απόσταση  $R/2$  από το κέντρο του τροχού. Ο τροχός έχει μάζα  $m$ , μετά την αφαίρεση των κυκλικών τμημάτων.



Θα χρησιμοποιήσουμε την προσθετικότητα (εκτατική ιδιότητα) της ροπής αδράνειας, και τις γνωστές εκφράσεις για τη ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς τον άξονα συμμετρίας του, σε συνδυασμό με το θεώρημα παράλληλων αξόνων.

Υπολογίζουμε την επιφανειακή πυκνότητα μάζας

$$\sigma \equiv \frac{dm}{dS} = \frac{m}{\pi R^2 - 4\pi (R/4)^2} = \frac{m}{\pi R^2 - \pi R^2/4} = \frac{4m}{3\pi R^2}$$

Η ροπή ενός πλήρους δίσκου, (ως προς τον άξονά του), με την ίδια επιφανειακή πυκνότητα, γνωρίζουμε ότι είναι ίση με

$$I_{\text{πλ.δίσκ}} = \frac{1}{2} m_{\text{πλ.δίσκ}} R^2 = \frac{1}{2} \left( \pi R^2 \frac{4m}{3\pi R^2} \right) R^2 \Rightarrow I_{\text{πλ.δίσκ}} = \frac{2}{3} m R^2$$

Αλλά, επίσης,

$$I_{\text{πλ.δίσκ/Κ}} = I_{\text{τρ.δίσκ/Κ}}(R) + 4I_{\text{δίσκ/Κ}}(R/4) = I_{\text{τρ.δίσκ/Κ}}(R) + 4(I_{\text{δίσκ/Ο}}(R/4) + m_{R/4}(OK)^2) \Rightarrow$$

$$I_{\text{τρ.δίσκ/Κ}}(R) = I_{\text{πλ.δίσκ/Κ}} - 4(I_{\text{δίσκ/Ο}}(R/4) + m_{R/4}(OK)^2)$$

$$\text{όπου } m_{R/4} = \pi \left( \frac{R}{4} \right)^2 \frac{4m}{3\pi R^2} = \frac{1}{12} m, \quad I_{\text{δίσκ/Ο}}(R/4) = \frac{1}{2} m_{R/4} \left( \frac{R}{4} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{12} \left( \frac{R}{4} \right)^2 = \frac{1}{384} m R^2$$

Άρα

$$\begin{aligned} I_{\text{τρ.δίσκ/Κ}}(R) &= I_{\text{πλ.δίσκ/Κ}} - 4 \left( I_{\text{δίσκ/Ο}}(R/4) + m_{R/4}(OK)^2 \right) = \frac{2}{3} m R^2 - 4 \left( \frac{1}{384} m R^2 + \frac{m}{12} \frac{R^2}{4} \right) = \\ &= m R^2 \left( \frac{2}{3} - \left( \frac{1}{192} + \frac{1}{12} \right) \right) = m R^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{204}{2304} \right) = \frac{499}{864} m R^2 \end{aligned}$$

### Θεώρημα των κάθετων αξόνων

Έστω επίπεδο σώμα (πλάκα) του οποίου το πάχος είναι πολύ μικρότερο από τις άλλες δύο διαστάσεις του και, επομένως, μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτείνεται σε 2-διαστάσεις, τις οποίες ταυτίζουμε με το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες  $(x, y)$ . Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα-z

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 \Rightarrow \boxed{I_z = I_y + I_x} \quad (6)$$

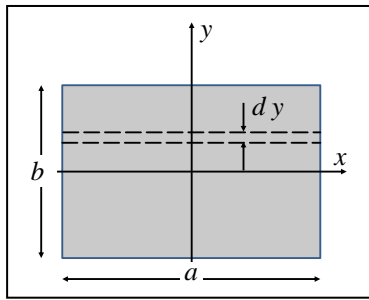
Αποδείξαμε το **Θεώρημα των Καθέτων αξόνων για επίπεδο σώμα**: η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς τους δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες που διασταυρώνονται στο σημείο διέλευσης του πρώτου. ΠΡΟΣΟΧΗ: το Θεώρημα των κάθετων αξόνων ισχύει μόνο για επίπεδα σώματα, και για τον άξονα-z να είναι κάθετος στο επίπεδο στο οποίο εκτείνεται το σώμα.

**Παράδειγμα 7.7** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ( $\alpha$ ) ομοιογενούς ράβδου  $[m, L]$ , ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, ( $\beta$ ) ορθογώνιας πλάκας  $[m, (a \times b)]$ , ως προς άξονα κάθετο στην πλάκα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, ( $\gamma$ ) τετραγωνικής πυραμίδας  $[M, \text{βάσης } (a \times b), \text{ ύψους } H]$ , ως προς τον άξονα συμμετρίας της πυραμίδας, που διέρχεται από την κορυφή της πυραμίδας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Αν  $x$ : ο άξονας της ράβδου,  $I_y = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \left( \frac{m}{L} dx \right) = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{+L/2} \Rightarrow I_y = \frac{1}{12} mL^2$



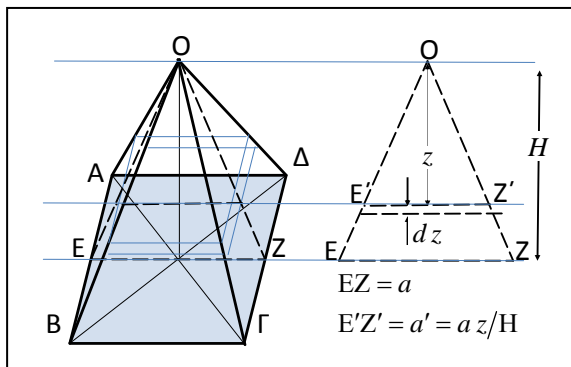
(β) Αν  $x-y$ : το επίπεδο της πλάκας (όπως στο σχήμα), τότε, με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων για την ράβδο που φαίνεται με την διακεκομμένη γραμμή

$$I_z = \int_{-b/2}^{+b/2} dI_z = \int_{-b/2}^{+b/2} \left( \frac{1}{12} a^2 dm + y^2 dm \right), \text{ όπου } dm = \frac{m}{ab} a dy = \frac{m}{b} dy$$

$$I_z = \int_{-b/2}^{+b/2} dI_z = \frac{1}{12} a^2 \frac{m}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} dy + \frac{m}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy \Rightarrow I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε να είχε προκύψει με το θεώρημα των κάθετων αξόνων

$$I_z = I_x + I_y, \text{ αλλά } I_x = \frac{1}{12} mb^2 \text{ και } I_y = \frac{1}{12} ma^2 \text{ (γιατί ; δεξ ερώτημα-α)}$$



(γ) Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ως ολοκλήρωμα διαφορικών ροπών αδράνειας, από τετράγωνες πλάκες παράλληλες προς τη βάση και πάχους  $dz$ , σε απόσταση  $z$  από την κορυφή  $O$ . Η ροπή αδράνειας κάθε τέτοιας τετραγωνικής πλάκας, ως προς τον κατάκόρυφο άξονα- $z$ , είναι ίση με :

$$dI_z = \frac{1}{12} dM (a'^2 + a'^2) = \frac{1}{6} dM a'^2,$$

όπου  $a' = (z/H)a$  (όμοια τρίγωνα, βλ. σχήμα),

και  $dM = \frac{M}{V} a'^2 dz$ , με  $V = (1/3)Ha^2$  τον όγκο της τετραγωνικής πυραμίδας, οπότε:

$$I_z = \frac{1}{6} \int_0^H a'^2 dM = \frac{1}{6} \frac{3M}{Ha^2} \int_0^H (a z/H)^2 (a z/H)^2 dz = \frac{Ma^2}{2H^5} \int_0^H z^4 dz \Rightarrow I_z = \frac{1}{10} Ma^2$$

(Σχόλιο: Για δεδομένη Μάζα- $M$ , η ροπή αδράνειας είναι ανεξάρτητη του ύψους- $H$ ).

**Παράδειγμα 7.8** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας λεπτού δίσκου, μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$ , ως προς μία διάμετρό του.

Ορίζουμε το σύστημα  $Oxyz$  έτσι ώστε το  $O$  να είναι το κέντρο του δίσκου και ο  $Oz$  να είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου.

Από το θεώρημα των κάθετων αξόνων:  $I_z = I_x + I_y$

Λόγω συμμετρίας:  $I_x = I_y$

Επομένως,  $I_x = I_y = I_z / 2 = mR^2 / 4$

### 7.3 Εξίσωση στροφικής κίνησης και κινητική ενέργεια περιστροφής στερεού σώματος, συναρτήσει της ροπής αδράνειας

Αν ανατρέξουμε στην εξίσωση μεταβολής της στροφορμής ενός συστήματος πολλών σωματιδίων,  $\left( \dot{\vec{L}} = \vec{\tau}_{ολ.εξ\omega\tau} \right)$ , στην περίπτωση που ισχύουν οι προϋποθέσεις για την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, 7.1, οπότε  $L_z = I_z \omega$ , (βλ. εξ. (3)), η εξίσωση μεταβολής της στροφορμής γράφεται με τη μορφή

$$I_z \dot{\omega} = \tau_{ολ.εξ} \quad (7)$$

Τα μεγέθη της εξ.(7) αναφέρονται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δεδομένου ότι η ανάλυση της δυναμικής ενός συστήματος πολλών σωματιδίων, τα αποτελέσματα της οποίας χρησιμοποιήσαμε, έγινε ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αποδεικνύεται ότι από την εξίσωση μεταβολής της στροφορμής ( $\dot{\vec{L}}_O = \vec{\tau}_O$ ), ως προς αδρανειακό σύστημα O, παράγεται μία ανάλογη εξίσωση, ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, (έστω και αν το σύστημα CM δεν είναι αδρανειακό). Όπως έχει αποδειχθεί στην ενότητα για τα Συστήματα Πολλών Σωματιδίων, για την στροφορμή, ως προς O και ως προς CM, ισχύει:

$$\vec{L}_{O/O} = \vec{L}_{O/CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{O\lambda}, \quad \text{και} \quad \dot{\vec{L}}_O = \vec{\tau}_{O\lambda, \xi/O} \quad (8 \alpha, \beta)$$

Παραγωγίζοντας, ως προς το χρόνο, την (8 α) έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_{O/O} &= \dot{\vec{L}}_{O/CM} + \dot{\vec{R}}_{CM} \times \vec{P}_{O\lambda} + \vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{P}}_{O\lambda} = \dot{\vec{L}}_{O/CM} + \dot{\vec{R}}_{CM} \times (m_{O\lambda} \dot{\vec{R}}_{CM}) + \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM}) \Rightarrow \\ \dot{\vec{L}}_{O/O} &= \dot{\vec{L}}_{O/CM} + 0 + \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM}) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση την εξίσωση (8 β) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{O\lambda, \xi/O} &= \dot{\vec{L}}_{O/CM} + \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM}) \Rightarrow \sum_i \vec{r}_{i/O} \times \vec{F}_i = \dot{\vec{L}}_{O/CM} + \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM}) \Rightarrow \\ \sum_i (\vec{r}_{i/CM} + \vec{R}_{CM/O}) \times \vec{F}_i &= \dot{\vec{L}}_{O/CM} + \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM}) \Rightarrow \\ \sum_i \vec{r}_{i/CM} \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{R}_{CM/O} \times \vec{F}_i &= \dot{\vec{L}}_{O/CM} + \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM}) \Rightarrow \\ \sum_i \vec{r}_{i/CM} \times \vec{F}_i + \vec{R}_{CM/O} \times \sum_i \vec{F}_i &= \dot{\vec{L}}_{O/CM} + \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM}) \end{aligned}$$

Αλλά,  $\vec{R}_{CM/O} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{R}_{CM} \times (m_{O\lambda} \ddot{\vec{R}}_{CM})$  και, από την προηγούμενη σχέση,

$$\dot{\vec{L}}_{O/CM} = \sum_i \vec{r}_{i/CM} \times \vec{F}_i \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_{O/CM} = \vec{\tau}_{O\lambda, \xi/CM}} \quad (9)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, είναι ίσος με τη συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς το κέντρο μάζας (ακόμη και αν το σύστημα κέντρου μάζας δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Επίσης, χρησιμοποιώντας την εξ (3), και αντικαθιστώντας στην τελευταία εξ. (9), παίρνουμε

$$\boxed{I_{CM} \dot{\omega} = \tau_{O\lambda, \xi/CM}} \quad (10)$$

Επίσης, από την ανάλυση ενός συστήματος πολλών σωματιδίων, έχει προκύψει ότι η κινητική ενέργεια ενός συστήματος πολλών σωματιδίων, ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας, ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, και της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας του συστήματος

$$E_{κιν/O} = E_{κιν/CM} + \frac{1}{2} m_{O\lambda} \dot{\vec{R}}_{CM/O}^2, \quad (11)$$

όπου 
$$E_{κιν/CM} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{i/CM}^2,$$

και (βλ. Εξ.(2)) 
$$\vec{v}_{i/CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i/CM} = -\hat{x}(\omega y_{i/CM}) + \hat{y}(\omega x_{i/CM}),$$
 οπότε,

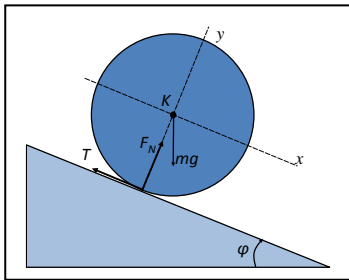
$$E_{\text{κιν}/CM} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{i/CM}^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ -\dot{x}(\omega y_{i/CM}) + \dot{y}(\omega x_{i/CM}) \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ (y_{i/CM})^2 + (x_{i/CM})^2 \right]^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Αντικαθιστώντας τι τελευταίο αποτέλεσμα στη σχέση (6) παίρνουμε

$$E_{\text{κιν}/O} = \frac{1}{2} m_{\text{ολ}} \dot{R}_{CM/O}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (12)$$

**Παράδειγμα 7.9** Να μελετηθεί η κίνηση κυλίνδρου σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης  $\varphi$  και πεπερασμένο συντελεστή τριβής  $\mu$ , (α) στην περίπτωση που ο κύλινδρος κυλάει χωρίς ολίσθηση, (β) στην περίπτωση που η κύλιση γίνεται μαζί με ολίσθηση.



[Να προσδιορισθεί η κρίσιμη γωνία που διαχωρίζει τις δύο περιπτώσεις]

Είναι γνωστά η μάζα  $m$ , η ακτίνα  $R$  και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου  $I_K$ , ως προς τον άξονα συμμετρίας του που διέρχεται από το κέντρο μάζας  $K$ .

Ο κύλινδρος, στην οποίον αναφέρεται το πρόβλημα, μπορεί να είναι και μη-ομοιογενής, αρκεί να έχει αξονικά συμμετρική πυκνότητα μάζας, έτσι ώστε ο άξονας συμμετρίας να περιέχει το κέντρο μάζας του.

Επίσης, κατά την πρώτη περίπτωση, που ο κύλινδρος κυλάει χωρίς ολίσθηση, η τριβή (που οφείλεται στον πεπερασμένο συντελεστή τριβής) δεν παίρνει την μέγιστη τιμή της, ενώ η μεταφορική και η περιστροφική κίνηση είναι αλληλοεξαρτώμενες. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση, κατά την οποία ο κύλινδρος κυλιέται και ταυτόχρονα ολισθαίνει, η μεν τριβή έχει λάβει τη μέγιστη δυνατή τιμή της, οι δύο κινήσεις, δε, μεταφορική και περιστροφική είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α) Η ανάλυση της κίνησης (κύλιση χωρίς ολίσθηση) μπορεί να γίνει μελετώντας, την μεν μεταφορική κίνηση ως προς το αδρανειακό σύστημα του κεκλιμένου επιπέδου, την δε περιστροφική κίνηση, είτε (i) ) ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου και επομένως, παρ'ότι επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό σύστημα του κεκλιμένου επιπέδου, η εξίσωση περιστροφικής κίνησης περί αυτόν γράφεται υπολογίζοντας τις ροπές πραγματικών δυνάμεων, ως προς τον ίδιο άξονα, είτε (ii) ως προς το μοναδικό άξονα που ακινητεί στιγμιαία ως προς το κεκλιμένο επίπεδο (δηλ., τη μοναδική ευθεία επαφής) του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο), ο οποίος είναι και ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής

$$\text{Εξίσωση μεταφορικής κίνησης κατά τον άξονα } x: m\ddot{x} = mg \sin \varphi - T \quad (1)$$

$$\text{Εξίσωση ισορροπίας κατά τον άξονα } y: F_N = mg \cos \varphi \quad (2)$$

(i) Εξίσωση περιστροφικής κίνησης περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας  $K$  (παρ'ότι δεν είναι αδρανειακό στοιχείο αναφοράς η εξίσωση περιστροφικής κίνησης έχει την ίδια μορφή, ως εάν ήταν αδρανειακό στοιχείο αναφοράς, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας).

$$I_K \dot{\omega} = T \cdot R \quad (3)$$

$$\text{Επειδή η κίνηση γίνεται χωρίς ολίσθηση, ισχύει } \theta = \frac{x}{R} \Rightarrow \omega \equiv \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R} \Rightarrow \dot{\omega} \equiv \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R} \quad (4)$$

όπου,  $\theta$ : η γωνία που διαγράφει μια ακτίνα του κυλίνδρου περί τον άξονά του, και  $x$  η αντίστοιχη μετατόπιση του άξονα του κυλίνδρου, κατά μήκος του άξονα- $x$ .

Απαλείφοντας την τριβή  $T$ , μεταξύ των εξισώσεων (1) και (3), παίρνουμε:

$$m\ddot{x} = mg \sin \varphi - \frac{I_K \ddot{\theta}}{R}$$

που λόγω της εξ (4) γράφεται:  $m\ddot{x} = mg \sin \varphi - \frac{I_K \ddot{x}}{R^2} \Rightarrow \ddot{x} = g \frac{\sin \varphi}{1 + (I_K / mR^2)}$  (5)

Η γωνιακή επιτάχυνση προκύπτει από την τελευταία σχέση, μέσω της (4)

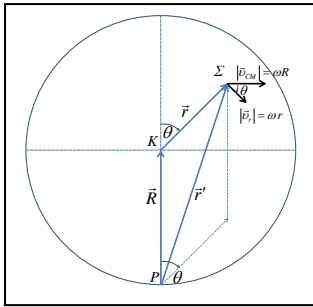
$$\dot{\omega} \equiv \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + (I_K / mR^2)}$$
 (6)

Η τιμή της τριβής προκύπτει αντικαθιστώντας την (6) στην (3) και επιλύοντας ως προς  $T$

$$T = \frac{I_K}{R} \dot{\omega} = \frac{I_K}{R} \ddot{\theta} = \frac{I_K}{R^2} \ddot{x} \Rightarrow T = \frac{I_K}{R^2} \cdot \frac{g \sin \varphi}{1 + (I_K / mR^2)}$$
 (7)

Για να κυλάει χωρίς ολίσθηση ο κύλινδρος θα πρέπει να ισχύει  $T \leq \mu F_N$ , όπου, αντικαθιστώντας την  $T$  από την (7) και την  $F_N$  από την (2), επιλύουμε ως προς την γωνία κλίσης  $\varphi$  και βρίσκουμε την συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση

$$\tan \varphi \leq \mu \left( 1 + \frac{mR^2}{I_K} \right) \equiv \tan \varphi_{op}$$



(ii) Εξίσωση περιστροφικής κίνησης ως προς το μοναδικό άξονα που ακίνηται στιγμιαία (αδρανειακός) ως προς το κεκλιμένο επίπεδο (δηλ., τη μοναδική ευθεία επαφής κυλίνδρου και κεκλιμένου επίπεδο), ο οποίος είναι και ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής.

**Λήμμα:** Όλα τα σημεία ενός δίσκου-τροχού-κυλίνδρου, ο οποίος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει, έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, ως προς το στιγμιαίο σημείο επαφής (δηλ., τον στιγμιαίο άξονα

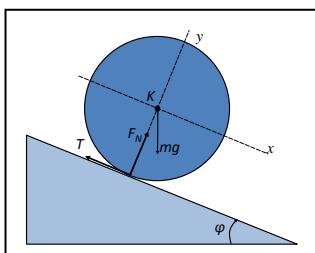
περιστροφής), και αυτή είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού περί τον άξονα συμμετρίας του, κατά την ίδια κίνηση.

Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο της κίνησης κατά το οποίο ένα τυχαίο σημείο του σώματος βρίσκεται σε διανυσματική θέση  $\vec{r}$ , ως προς τον άξονα συμμετρίας, και σε διανυσματική θέση  $\vec{r}'$ , ως προς τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Αν το σημείο αυτό, σε χρονικό διάστημα  $dt$  διαγράφει διαφορικό τόξο μήκους  $ds' = |d\vec{r}'|$ , με κέντρο το σημείο P,

τότε, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής περί το P είναι  $\omega' = \frac{d\theta'}{dt} = \frac{(ds' / r')}{dt} = \frac{1}{r'} \frac{v' dt}{dt} = \frac{v'}{r'}$ ,

όπου η ταχύτητα  $v'$  του Σ (ως προς το δάπεδο και, άρα, και ως προς το σημείο P) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του διανυσματικού αθροίσματος της ταχύτητας περιστροφής ( $\vec{v}_r = \omega r \hat{\theta}$ ) περί το K, και της μεταφορικής ταχύτητας όλου του σώματος (άρα, και του κέντρου μάζας), ( $\vec{v}_{CM} = \omega R \hat{x}$ ). Επομένως:

$$\omega' = \frac{v'}{r'} = \frac{\sqrt{v_{CM}^2 + v_r^2 + 2v_{CM}v_r \cos \theta}}{r'} = \frac{\omega \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta}}{r'} = \frac{\omega r'}{r'} = \omega,$$



και συνεπώς μπορούμε να αποδώσουμε μία ενιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, περί τον στοιγμιαίο άξονα περιστροφής, σε όλα τα σημεία του στερεού σώματος, η οποία, για την περίπτωση που η διατομή κύλισης είναι κυκλική, συμπίπτει με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος περί τον άξονα συμμετρίας.

[Θα μπορούσε κανείς να καταλήξει στο ίδιο συμπέρασμα, κάνοντας χρήση της ιδιότητας που ορίζει ένα σώμα ως στερεό: όλα τα σημεία του διατηρούν τις σχετικές τους διανυσματικές αποστάσεις]

Η εξίσωση περιστροφικής κίνησης περί το σημείο επαφής γράφεται

$$(I_K + mR^2)\ddot{\theta} = mgR \sin \varphi \quad (8)$$

όπου  $(I_K + mR^2)$ : η ροπή αδράνειας περί τον άξονα στο σημείο επαφής (θεώρημα παραλληλίων αξόνων),

και  $mgR \sin \varphi$ : η ροπή του βάρους, περί το ίδιο σημείο

Από την (8) παίρνουμε:  $\boxed{\dot{\omega} \equiv \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + (I_K / mR^2)}}$ , που είναι ταυτόσημη με την εξίσωση (6),

από την μέθοδο (α<sub>i</sub>)

(β) Για γωνίες κλίσης  $\varphi$ , τέτοιες ώστε  $\tan \varphi > \mu \left(1 + \frac{mR^2}{I_K}\right)$ , η τριβή έχει λάβει τη

μέγιστη τιμή της  $T = \mu F_N = \mu mg \cos \varphi$ , και, επομένως, έχουμε και ολίσθηση μαζί με την κύλιση.

[Στην πράξη, η έναρξη της ολίσθησης συνοδεύεται με μετάπτωση από τον συντελεστή στατικής τριβής στον συντελεστή κινητικής τριβής,  $\mu_k < \mu_\sigma$ , οπότε, κατά μείζονα λόγο

ισχύει:  $\tan \varphi > \mu_\sigma \left(1 + \frac{mR^2}{I_K}\right) > \mu_k \left(1 + \frac{mR^2}{I_K}\right)$ , συνεχίζεται η συνδυασμένη κίνηση κύλισης και

ολίσθησης, εκτός αν η κλίση επανέλθει σε γωνία με  $\tan \varphi < \mu_k \left(1 + \frac{mR^2}{I_K}\right)$ ]

Για τη συνέχεια ας θεωρήσουμε ότι  $\mu_\sigma = \mu_k = \mu$  και  $\tan \varphi > \mu \left(1 + \frac{mR^2}{I_K}\right)$

Κατά τη συνδυασμένη κύλιση και ολίσθηση, οι εξισώσεις περιστροφικής και μεταφορικής κίνησης γράφονται

$$m\ddot{x} = mg \sin \varphi - T = mg (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = g (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}$$

και  $I_K \dot{\omega} = T \cdot R \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{T \cdot R}{I_K} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{\mu mg R \cos \varphi}{I_K}}$ .

Άρα:  $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \frac{\mu mg R \cos \varphi}{I_K} t^2$ , και:  $x_{CM} = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) t^2$

Για την περίπτωση συμπαγούς κυλίνδρου, με  $I_{KM} = \frac{1}{2} mR^2$ , και για αρχικές συνθήκες

$(\theta_0 = 0, x_0 = 0, \omega_0 = 0, v_0 = 0)$ ,  $\tan \varphi_{op} = 3\mu$ , και μπορούμε να υπολογίσουμε την μετατόπιση

που οφείλεται μόνο σε ολίσθηση:  $x_{KM(ολισθ)} = x_{KM(ολικη)} - x_{KM(κυλιση)} \equiv \Delta x_{KM}$

Έστω:  $\theta = n2\pi \Rightarrow t_n^2 = \frac{2\pi Rn}{\mu g \cos \theta}$

$$x_{KM(ολικη)} = \frac{1}{2} g (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \frac{2\pi Rn}{\mu g \cos \varphi} \Rightarrow x_{KM(ολικη)} = \frac{n\pi R}{\mu} (\tan \varphi - \mu)$$

$$x_{KM(κυλισης)} = n2\pi R. \text{ Άρα: } \Delta x_{KM} = n\pi R \left( \frac{\tan \varphi}{\mu} - 3 \right)$$

$\tan \varphi > 3\mu \Rightarrow (\tan \varphi / \mu) - 3 > 0$ , Άρα:  $\Delta x_{KM} > 0$

**Παράδειγμα 7.10** Στην περιφέρεια μίας τροχαλίας, η οποία έχει μάζα  $M$ , ακτίνα  $R$  και ροπή αδράνειας περί τον άξονά συμμετρίας της  $I = MR^2/2$ , διέρχεται αλυσίδα συνολικής μάζας  $m$  και συνολικού μήκους  $L_0 = 2L + \pi R$ . Η αλυσίδα μπορεί να κινείται σε συνεχή επαφή με την περιφέρεια της τροχαλίας, χωρίς να γλιστράει ως προς αυτή. Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία μέσα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας, με δύο ίσα τμήματα της αλυσίδας μήκους  $L$ , να κρέμονται από τις δύο πλευρές της τροχαλίας. Κατά τη χρονική στιγμή  $t=0$  αναρτάμε μάζες  $m_1$  και  $m_2 > m_1$  στο αριστερό και δεξί τμήμα της αλυσίδας, αντίστοιχα. Να περιγραφεί η κίνηση του συστήματος για όσο χρονικό διάστημα υπάρχει μη μηδενικό μήκος και στις δύο πλευρές της αλυσίδας.

Ορίζουμε μία βοηθητική παράμετρο, την γραμμική πυκνότητα μάζας  $\lambda = \frac{m}{2L + \pi R}$  της αλυσίδας.

### Ανάλυση με διατήρηση μηχανικής ενέργειας.

Όταν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, η μόνη μορφή μηχανικής ενέργειας είναι η δυναμική ενέργεια των μερών του, με βάση κάποιο επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας. Αν επιλέξουμε ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας, και αναλύσουμε ένα στιγμιότυπο από την εξέλιξη της κίνησης του συστήματος, διαπιστώνουμε ότι, κατά τη διάρκεια της κίνησης, μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια των δύο μαζών  $m_1$  και  $m_2$  και των δύο τμημάτων της αλυσίδας που κρέμονται, ενώ παραμένει αμετάβλητη η δυναμική ενέργεια της τροχαλίας και του τμήματος της αλυσίδας που εφάπτεται στο πάνω ημικύκλιο της τροχαλίας. Παράλληλα, το σύστημα αποκτά κινητική ενέργεια, λόγω περιστροφικής κίνησης της τροχαλίας και λόγω μεταφορικής κίνησης των δύο μαζών και του συνολικού μήκους της αλυσίδας.

Η αρχική δυναμική ενέργεια του συστήματος, με βάση το παραπάνω επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας, είναι

$$E_{\Delta, αρχ} = -(m_1 + m_2)gL - 2\lambda Lg \frac{L}{2} = -(m_1 + m_2 + \lambda L)gL$$

Μετά την ανάρτηση των δύο μαζών, η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται προς τα δεξιά, με κοινή ταχύτητα, κάθε χρονική στιγμή. Υπολογίζουμε τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το δεξί τμήμα της αλυσίδας έχει μήκος  $L+x$ , οπότε το αριστερό έχει μήκος  $L-x$ .

$$E_{\Delta}(x) = -m_1g(L-x) - m_2g(L+x) - \lambda(L-x)g \frac{L-x}{2} - \lambda(L+x)g \frac{L+x}{2} =$$

$$= -(m_1 + m_2 + \lambda L)Lg + (m_1 - m_2)gx - \lambda gx^2$$

$$E_K(x) = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}\lambda(2L + \pi R)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 =$$

$$E_K(x) = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}\lambda(2L + \pi R)v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$E_K(x) = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \lambda(2L + \pi R) + \frac{M}{2}\right)v^2$$

$$\begin{aligned}
E_{\Delta, \alpha\rho\chi} + E_{\kappa, \alpha\rho\chi} &= E_{\Delta}(x) + E_{\kappa}(x) \Rightarrow -(m_1 + m_2 + \lambda L)gL + 0 = \\
&= -(m_1 + m_2 + \lambda L)Lg + (m_1 - m_2)gx - \lambda gx^2 + \frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \lambda(2L + \pi R) + \frac{M}{2} \right) v^2 \Rightarrow \\
\frac{2[\lambda gx^2 - (m_1 - m_2)gx]}{\left( m_1 + m_2 + \lambda(2L + \pi R) + \frac{M}{2} \right)} &= v^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2[\lambda gx^2 - (m_1 - m_2)gx]}{\left( m_1 + m_2 + \lambda(2L + \pi R) + \frac{M}{2} \right)}}
\end{aligned}$$

Η διαφορική αυτή επιλύεται με χωρισμό μεταβλητών

$$\boxed{\frac{dx}{\sqrt{2[\lambda gx^2 - (m_1 - m_2)gx]}} = \frac{dt}{\sqrt{\left( m_1 + m_2 + \lambda(2L + \pi R) + \frac{M}{2} \right)}}}$$

**Ανάλυση με μεταβολή στροφορμής.**

$$L = L_{\sigma\rho\chi} + L_{m_1, m_2} + L_{\alpha\lambda\nu\sigma} = -\hat{z}I\omega + (m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) + \int_0^{L_0} (\vec{r} \times \vec{v}) dm$$

Σε όλα τα στοιχεία μάζας που εκτελούν μεταφορική κίνηση το μέτρο της ταχύτητας είναι ίδιο, ενώ, επίσης  $v = \omega R$ . Για όλα τα στοιχεία  $dm$  της αλυσίδας, ισχύει  $(\vec{r} \times \vec{v}) dm = -\hat{z}Rv dm$ , που ισχύει επίσης και για τις δύο μάζες  $m_1, m_2$ . Επομένως:

$$\begin{aligned}
L &= -\hat{z}I\omega + (m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) + \int_0^{L_0} (\vec{r} \times \vec{v}) dm \\
&= -\hat{z} \frac{1}{2} MR^2 \frac{v}{R} - \hat{z}(m_1 + m_2)Rv - \hat{z}mRv = \\
&= -\hat{z} \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right) Rv
\end{aligned}$$

Η μεταβολή της στροφορμής προέρχεται από τη συνολική ροπή που οφείλεται στις μάζες  $m_1, m_2$  και στην αλυσίδα,

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times (-\hat{z}m_1g) + \vec{r}_2 \times (-\hat{z}m_2g) + \int_0^{L_0} \vec{r} \times (-\hat{z}g) dm$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, τα δύο τμήματα που αντιστοιχούν στα δύο τεταρτημόρια του άνω ημικυκλίου της τροχαλίας αλληλοαναιρούνται, ενώ τα τμήματα που αντιστοιχούν στα μέρη της αλυσίδας που κρέμονται εξαρτώνται από την τιμή της μεταβλητής  $x$ , όπως αυτή έχει οριστεί παραπάνω

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= -\hat{z}(m_2 - m_1)Rg + \int_{-L+x}^0 \vec{r} \times (-\hat{y}g) dm + \int_0^{L+x} \vec{r} \times (-\hat{y}g) dm = \\
&= -\hat{z}(m_2 - m_1)Rg + \hat{z}Rg \int_{-L+x}^0 dm + -\hat{z}Rg \int_0^{L+x} dm = \\
&= -\hat{z}Rg \left[ (m_2 - m_1) + \int_0^{L+x} \lambda dx' - \int_{-L+x}^0 \lambda dx' \right] = \\
&= -\hat{z}Rg \left[ (m_2 - m_1) + \lambda(L+x) + \lambda(-L+x) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ -\hat{z} \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right) Rv \right] = -\hat{z} Rg \left[ (m_2 - m_1) + \lambda(L+x) + \lambda(-L+x) \right] \\ &\Rightarrow \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right) \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = g \left[ (m_2 - m_1) + \lambda(L+x) + \lambda(-L+x) \right] \\ &\Rightarrow \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right) \int_0^v v' dv' = g \int_0^x \left[ (m_2 - m_1) + \lambda(L+x') + \lambda(-L+x') \right] dx' \end{aligned}$$

Μετά την ολοκλήρωση, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right) \frac{v^2}{2} &= g \left[ (m_2 - m_1)x + \lambda \frac{(L+x)^2 - L^2}{2} + \lambda \frac{(-L+x)^2 - (-L)^2}{2} \right] \Rightarrow \\ \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right) v^2 &= g \left[ 2(m_2 - m_1)x + \lambda(x^2 + 2Lx) + \lambda(x^2 - 2Lx) \right] = g \left[ 2(m_2 - m_1)x + 2\lambda x^2 \right] \\ \sqrt{\left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right)} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{g \left[ 2(m_2 - m_1)x + 2\lambda x^2 \right]} \Rightarrow \\ \boxed{\frac{dx}{\sqrt{g \left[ 2(m_2 - m_1)x + 2\lambda x^2 \right]}} = \frac{dt}{\sqrt{\left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 + m \right)}}} \end{aligned}$$

Βοηθητικό ολοκλήρωμα:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + ax}} = 2 \ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{x}) + C$

Η τελευταία σχέση συμπίπτει με εκείνη που προέκυψε από την διατήρηση ενέργειας (δεδομένου ότι:  $m = \lambda(2L + \pi R)$ ), και για την οποία χρειάζεται σημαντικά απλούστερος λογισμός.

Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την κίνηση κάθε μίας συνιστώσας ξεχωριστά, εισάγοντας εσωτερικές τάσεις της αλυσίδας, στα σημεία ανάρτησης των σημειακών μαζών και στα σημεία επαφής των αιωρούμενων τμημάτων της αλυσίδας με την τροχαλία. Αυτή η ανάλυση θα οδηγούσε στο ίδιο αποτέλεσμα για την ταχύτητα, αλλά με πολύ περισσότερους υπολογισμούς. Σε αυτούς τους υπολογισμούς, θα πρέπει να ορισθούν, σε κάθε τμήμα της αλυσίδας, το οποίο κρέμεται, από μία διαφορετική τάση σε κάθε άκρο, (δηλ.  $T_1, T_1'$  στο ένα τμήμα και  $T_2, T_2'$  στο άλλο), κάθε μία από τις οποίες μεταβάλλεται με το  $x$ , (όπως αυτό ορίστηκε στην αρχή). Αν οι «τονούμενες» τάσεις αντιστοιχούν στα σημεία επαφής με την τροχαλία, και οι «άτονες» τάσεις αντιστοιχούν στα σημεία επαφής με τις αναρτημένες τάσεις,

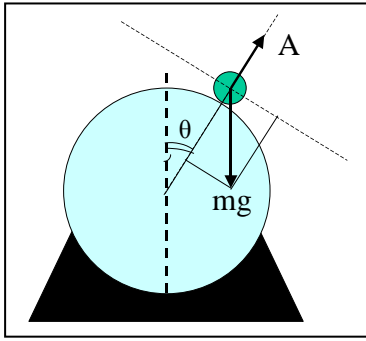
τότε: (α)  $m_2 g - T_2 = m_2 \ddot{x}$ ,

(β)  $T_1 - m_1 g = m_1 \ddot{x}$ ,

(γ) η διαφορά  $(T_2' - T_1')$  προκαλεί την ροπή για τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και τη μεταφορική επιτάχυνση του ημικυκλικού τμήματος της αλυσίδας,

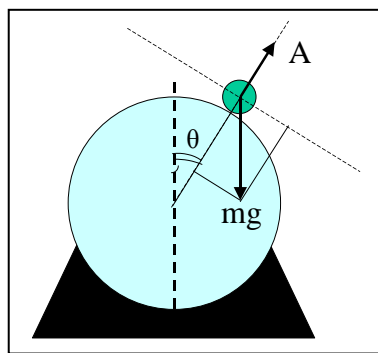
(δ) οι διαφορές  $(T_2 - T_2')$  και  $(T_1' - T_1)$  προκαλούν τη μεταφορική επιτάχυνση των αναρτημένων τμημάτων της αλυσίδας, με μήκη και  $L+x$ , αντίστοιχα.





**Παράδειγμα 7.11** Ένας κύλινδρος ακτίνας  $b$  ισορροπεί στην κορυφή άλλου σταθεροποιημένου κυλίνδρου με ακτίνα  $a > b$ , και τους άξονες τους οριζόντιους και παράλληλους μεταξύ τους, μέσα σε κατακόρυφο ομογενές πεδίο βαρύτητας. Προκαλούμε μία μικρή διαταραχή στον επάνω κύλινδρο έτσι ώστε να κυλήσει χωρίς ολίσθηση στην κυλινδρική επιφάνεια του κάτω κυλίνδρου, και οι άξονές τους να διατηρούνται παράλληλοι. Δείξτε ότι, όταν δεν υπάρχει ολίσθηση («ιδανικά τραχεία επαφή»), οι δύο κύλινδροι παύουν να εφάπτονται όταν η ευθεία που ορίζουν τα κέντρα τους σχηματίζει γωνία  $\theta = \arccos(4/7)$  με την κατακόρυφο. [Υπόδειξη: Μελετήστε και την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση του μικρού κυλίνδρου, αγνοώντας τα φαινόμενα τριβής κύλισης].

Εστω ότι ο μικρός κύλινδρος έχει κυλήσει έτσι ώστε η ευθεία που ορίζουν τα κέντρα των δύο κυλίνδρων να σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την κατακόρυφο.



Αφού έχουμε καθαρή κύλιση, χωρίς ολίσθηση, δεν υπάρχει απορρόφηση ενέργειας από την τριβή ολίσθησης. Επιπλέον, επειδή αγνοούμε τα φαινόμενα τριβής κύλισης, δεν έχουμε επίσης απώλεια ενέργειας από τριβή κύλισης. Επομένως, με επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας το ανώτατο σημείο του κέντρου βάρους του μικρού κυλίνδρου έχουμε:

$$mgh(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad \text{όπου}$$

$$h = a + b,$$

$\omega$ : η κυκλική συχνότητα περιστροφής του μικρού κυλίνδρου περί τον άξονά του,

$I$ : η ροπή αδράνειας του μικρού κυλίνδρου περί τον άξονά του (που διέρχεται και από το ΚΜ)

$\omega^2 = \frac{v^2}{b^2}$  (αφού η μεταφορική κίνηση του κέντρου βάρους του μικρού κυλίνδρου είναι αποτέλεσμα αποκλειστικά της κύλισης χωρίς ολίσθηση). Άρα:

$$2mg(a + b)(1 - \cos \theta) = mv^2 + I\left(\frac{v}{b}\right)^2 \quad (1)$$

Όσο ο μικρός κύλινδρος, (έστω, μάζας  $m$ ), είναι σε επαφή με τον μεγάλο, η κυκλική κίνηση του κέντρου βάρους του εξασφαλίζεται από τον συνδυασμό δύο δυνάμεων, της αντίδρασης  $A$  του μεγάλου κυλίνδρου και την στιγμιαία ακτινικής συνιστώσας του βάρους του. Ο συνδυασμός αυτός αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη της κυκλικής κίνησης :

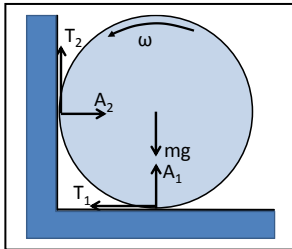
$$mg \cos \theta - A(\theta) = m \frac{v^2}{a + b} \Rightarrow mv^2 = (a + b)[mg \cos \theta - A(\theta)] \quad (2)$$

Η επαφή των δύο σωμάτων παύει για την γωνία  $\theta$  που  $A(\theta) = 0$ , η οποία είναι και η μέγιστη γωνία για την οποία το κέντρο του μικρού κυλίνδρου εκτελεί κυκλική κίνηση οπότε, από τον συνδυασμό των (1) και (2), (και με τη συνθήκη  $A(\theta) = 0$ ) έχουμε :

$$g(a + b) \cos \theta = \frac{2b^2 mg(a + b)(1 - \cos \theta)}{I + mb^2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3 + (I/m b^2)}$$

Για την περίπτωση του κυλίνδρου, οπότε  $I = (1/2)mb^2$ , παίρνουμε:  $\cos \theta = (4/7)$

**Παράδειγμα 7.12** Κύλινδρο ακτίνας  $R$ , που περιστρέφεται περί τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$ , τον ακουμπάμε σε διεδρη ορθή γωνία, (με πλευρές οριζόντια και κατακόρυφη), έτσι ώστε να έχει την τάση να κυλίσει προς την κατακόρυφη πλευρά της γωνίας. Αν ο συντελεστής τριβής του κυλίνδρου με τις δύο πλευρές είναι  $\mu$ , να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που εκτελεί ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει.



Αν  $A_1, A_2$  είναι οι κάθετες αντιδράσεις των τοίχων και  $T_1, T_2$  είναι οι αντίστοιχες τριβές, όπως φαίνονται στο σχήμα, τότε οι μεν τριβές έχουν λάβει τις μέγιστες τιμές τους,

$$T_1 = \mu A_1, \quad T_2 = \mu A_2 \quad (1 \alpha, \beta)$$

οι δε συνθήκες στους δύο άξονες γράφονται

$$\begin{aligned} x: \quad T_1 &= A_2 \\ y: \quad A_1 + T_2 &= mg \end{aligned} \quad (2 \alpha, \beta)$$

Από τις (1 α,β) και (2 α,β) υπολογίζουμε:  $A_1 = \frac{mg}{1+\mu^2}, \quad A_2 = \mu \frac{mg}{1+\mu^2}$

Άρα:  $T_1 = \mu A_1 = \mu \frac{mg}{1+\mu^2}, \quad T_2 = \mu A_2 = \mu^2 \frac{mg}{1+\mu^2}$

Η εξίσωση στροφοκικής κίνησης:

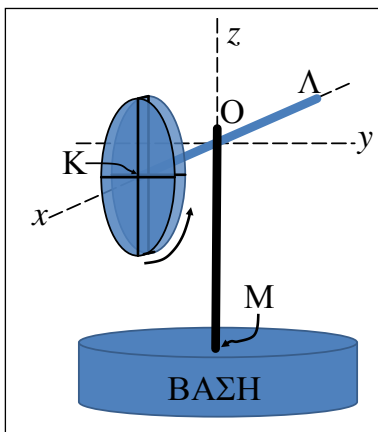
$$\tau = I\dot{\omega} \Rightarrow (T_1 + T_2)R = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{2(T_1 + T_2)}{mR} = 2 \frac{g}{R} \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2} \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_0 - 2 \frac{g}{R} \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2} t \Rightarrow \boxed{t_{\max} = \frac{\omega_0 R (1+\mu^2)}{2g\mu(1+\mu)}}$$

και  $\theta = \omega_0 t - \frac{g}{R} \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2} t^2 \Rightarrow \theta_{\max} = \theta(t_{\max}) = \frac{\omega_0^2 R (1+\mu^2)}{4g\mu(1+\mu)}$

Ο αριθμός των περιστροφών υπολογίζεται:  $\theta_{\max} = 2n\pi \Rightarrow \boxed{n = \frac{\omega_0^2 R (1+\mu^2)}{8\pi g\mu(1+\mu)}}$

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΑ:  $W_{\text{τριβων}} = E_{K(\text{στροφ.})} \Rightarrow n2\pi R \left( \frac{\mu mg}{1+\mu^2} + \frac{\mu^2 mg}{1+\mu^2} \right) = \frac{1}{2} I \omega_0^2$



**Παράδειγμα 7. 13 [Γυροσκόπιο].** Ομοιογενής δίσκος, μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$ , είναι συνδεδεμένος σε αμελητέας μάζας άξονα  $ΚΛ$ , (κάθετο προς το δίσκο,  $ΚΟ = a$ ), περί τον οποίο μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές. Ο άξονας  $ΚΛ$  είναι στηριγμένος σε κατακόρυφο άξονα  $ΟΜ$ , με κατάλληλη άρθρωση, έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα (χωρίς τριβές) και περί κατακόρυφο και περί οριζόντιο άξονα (κάθετους και προς τον  $ΚΛ$  και μεταξύ τους). Όλο το σύστημα είναι στηριγμένο σε ακλόνητη Βάση. (α) Συγκρατούμε τον άξονα  $ΚΛ$  οριζόντιο και, ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία μέσα στο πεδίο βαρύτητας, το αφήνουμε ελεύθερο κατά τη χρονική στιγμή  $t=0$ . Να προσδιορισθεί η

στιγμαία γωνιακή επιτάχυνση  $\ddot{\omega}$  του συστήματος (πλήρης διανυσματικός χαρακτήρας). (β) Συγκρατούμε τον άξονα  $ΚΛ$  οριζόντιο και, ενώ το σύστημα βρίσκεται μέσα στο πεδίο

βαρύτητας, θέτουμε το δίσκο σε περιστροφική κίνηση περί τον ΚΛ με γνωστή κυκλική συχνότητα  $\vec{\omega}_0 = \hat{x}\omega_0$ , και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Δείξτε ότι το σύστημα εκτελεί μία επιπλέον περιστροφή (σε πρώτη προσέγγιση, περί τον άξονα z) και υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}'$  αυτής της νέας περιστροφής, (χρησιμοποιείστε, αν είναι απαραίτητο, το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{\phi}$  των πολικών συντεταγμένων, στο επίπεδο x-y), (γ) Υπολογίστε την κατακόρυφη και την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στο σημείο O από τον άξονα ΜΟ στον άξονα ΚΟΛ, κατά την μόνιμη κατάσταση κίνησης που περιγράφεται στο ερώτημα (β).

(δ) Δείξτε ότι, κατά την μόνιμη κατάσταση κίνησης, που περιγράφεται στο ερώτημα (β), η συνολική στροφορμή του συστήματος δεν βρίσκεται πλέον επί του επιπέδου x-y, αλλά έχει και μία κατακόρυφη συνιστώσα, η οποία δεν παίζει κάποιο δυναμικό ρόλο, κατά την μόνιμη κατάσταση κίνησης, αλλά, στο στάδιο της μεταβατικής κατάστασης, είναι συνυφασμένη με την άσκηση μία ροπής στη Βάση στήριξης. Ποιά είναι η διανυσματική κατεύθυνση αυτής της μεταβατικής ροπής.

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(α) I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N}_O = (\hat{x}a) \times (-\hat{z}mg) = amg (\hat{z} \times \hat{x}) \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{amg}{I_O} \hat{y}, \text{ όπου, επομένως}$$

$$I_O = I_{O,y} = I_{K,y} + ma^2. \text{ Επίσης, (Θ. κάθετων αξόνων), } I_{K,y} + I_{K,z} = I_{K,x} = mR^2/2 \text{ και, επειδή}$$

$$I_{K,y} = I_{K,z} \Rightarrow 2I_{K,y} = mR^2/2 \Rightarrow I_{K,y} = mR^2/4 \Rightarrow \boxed{I_O = m(a^2 + R^2/4)}$$

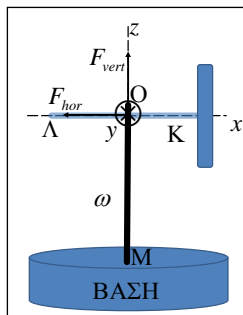
$$(β) \text{ Αρχική τροφορμή του δίσκου: } \vec{L}_0 = I_{K,x} \omega_0 \hat{x}$$

$$\text{Εξέλιξη κίνησης: } \frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{N}_{/O} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{r}_{/O} \times \vec{F} = (a\hat{\omega}) \times (-mg\hat{z}) = mga(\hat{z} \times \hat{\omega})$$

$$\text{Αλλά } \hat{z} \times \hat{\omega} = \hat{\phi}, \text{ οπότε } \frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = mga\hat{\phi} \Rightarrow d\vec{L}_{/O} = \hat{\phi}(mga)dt, \text{ και λόγω της}$$

$$\text{καθετότητας } \vec{L}_{/O} \perp d\vec{L}_{/O} \quad d\vec{L}_{/O} = \hat{\phi}L_{/O}d\phi. \text{ Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις}$$

$$\hat{\phi}(mga)dt = \hat{\phi}L_{/O}d\phi \Rightarrow \omega' \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{mga}{L_{/O}} \Leftrightarrow \omega' = \frac{2mga}{mR^2\omega_0} \quad \boxed{\omega' = \frac{2ga}{R^2\omega_0}}$$

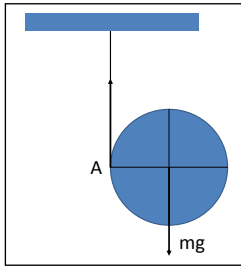


(γ) Για τον υπολογισμό των δύο συνιστωσών (κατακόρυφης και οριζόντιας) της δύναμης που ασκείται από τον άξονα ΜΟ, επί του άξονα ΚΟΛ, στο σημείο Ο, χρησιμοποιούμε την συνθήκη ακινησίας, κατά τον κατακόρυφο άξονα, και την περιστροφική κίνηση περί αυτόν, στο οριζοντιο επίπεδο. Οπότε :

$$\boxed{F_{vert} = mg},$$

$$\text{και } F_{hor} = m\omega'^2 a \Rightarrow \boxed{F_{hor} = m \left( \frac{2ga}{R^2\omega_0^2} \right)^2 a}$$

(δ) Η αρχική στροφορμή του συστήματος είχε μόνο x-συνιστώσα. Στη συνέχεια, το σύστημα περιστρέφεται και περί τον z-άξονα (λόγω της ροπής του βάρους του). Συνεπώς, το σύστημα διαθέτει, στη μόνιμη κατάσταση κίνησης, και μία στροφορμή  $L_z = I_{/O,z} \omega'$ , η οποία, ως μεταβολή στροφορμής από την αρχική κατάσταση, πρέπει να οφείλεται σε μία αντίστοιχη «στιγμιαία» ροπή της οποίας η διάρκεια και το μέτρο πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση  $(\vec{N})(\Delta t) = \Delta L_z = I_{/O,z} \omega'$



**Παράδειγμα 7.14** Μη-εκτατό νήμα αμελητέας μάζας είναι τυλιγμένο στην κυλινδρική επιφάνεια κυλίνδρου με στοιχεία  $(m, R, I_{KM})$ . Το ελεύθερο άκρο του νήματος είναι στερωμένο σε σταθερό σημείο οροφής. Κρατάμε το σύστημα έτσι ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο κατακόρυφα, και το αφήνουμε ελεύθερο. (α) Υπολογίστε την επιτάχυνση του ΚΜ και την τάση του νήματος, με ανάλυση ως προς το ΚΜ. (β) Αναλύστε το πρόβλημα ενεργειακά. (γ) Αναλύστε το πρόβλημα ως προς το εκάστοτε τελευταίο σημείο του κατακόρυφου νήματος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(α) \quad m\ddot{x}_{KM} = mg - T \quad (1)$$

$$I\ddot{\theta} = TR \quad (2)$$

$$x_{KM} = \theta R \quad (3)$$

$$(2), (3) \quad \Rightarrow \quad T = (I/R^2)\ddot{x}_{KM} \quad (4)$$

$$(1), (4) \Rightarrow \left[ m + (I/R^2) \right] \ddot{x}_{KM} = mg \Rightarrow \ddot{x}_{KM} = g \frac{m}{m + (I/R^2)},$$

και μέσω της (4)

$$T = \frac{I}{R^2} \frac{mg}{m + (I/R^2)}$$

(β) Ενεργειακή ανάλυση. Η τάση T δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, (αλλάζει σημείο εφαρμογής), επομένως δεν παράγει έργο. Έργο παράγεται από το βάρος, η ισχύς του οποίου μεταβάλλει τη συνολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

$$P_{mg} = \frac{dE_{K,ολ}}{dt} \Rightarrow mg\dot{x}_{KM} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_{KM}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_{KM}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} \dot{x}_{KM}^2 \right]$$

$$\Rightarrow mg\dot{x}_{KM} = \left[ m + \frac{I}{R^2} \right] \dot{x}_{KM} \ddot{x}_{KM} \Rightarrow \ddot{x}_{KM} = g \frac{m}{m + (I/R^2)}$$

(γ) Μεταβολή στροφορμής ως προς το σημείο A (στιγμιαίος άξονας περιστροφής του κυλίνδρου)

$$I_A \ddot{\theta} = mgR \Rightarrow (I_K + mR^2) \ddot{\theta} = mgR \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgR}{(I_K + mR^2)}$$

$$\ddot{x} = \ddot{\theta} R = \frac{mgR^2}{(I_K + mR^2)} \Rightarrow \ddot{x} = g \frac{m}{m + (I_K/R^2)}$$