I. Παραγώγιση δυναμοσειράς

Λήμμα: Έστω $z, h \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\delta > 0$, με $|h| \leq \delta$. Τότε,

$$\left|(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h\right| \leq \frac{|h|^2}{\delta^2}(|z|+\delta)^n.$$

Απόδειξη: Από το Διώνυμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\left|(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k} \cdot h^k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k} \cdot |h|^k \leq |h|^2 \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k} \cdot \delta^{k-2}$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k} \cdot \delta^k \leq \frac{|h|^2}{\delta^2}(|z|+\delta)^n.$$

$\boxtimes$

Εάν $0 < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, θέτουμε

- $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$, αν $R < \infty$
- $D(z_0, R) = \mathbb{C}$, αν $R = \infty$.

<u>Θεώρημα I.1.</u> Έστω $R \in (0,\infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R.$$

Τότε, $f \in H(D(z_0,R))$ κ' ισχύει

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \quad |z-z_0|<R.$$

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$.

Η ακτίνα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς είναι

$$\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|}} \overset{\sqrt[n]{n}\to 1}{=} \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} = R,$$

οπότε ορίζεται η $g(z)$, για $|z-z_0|<R$.

→ <u>Υποθέτουμε ότι $z_0=0$.</u> Τότε,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad |z|<R.$$

Έστω $z\in D(0,R)$. Επιλέγω $\delta>0$ με

$$0<\delta<R-|z|$$

κ' $h\in\mathbb{C}$ με

$$0<|h|<\delta.$$

Έχουμε

$$f(z+h)-f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[(z+h)^n-z^n\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z+h)-f(z)-hg(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[(z+h)^n-z^n-nz^{n-1}h\right]$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty} a_n\left[(z+h)^n-z^n-nz^{n-1}h\right], \quad \text{οπότε}$$

$$\left|f(z+h)-f(z)-hg(z)\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\cdot\left|(z+h)^n-z^n-nz^{n-1}h\right|$$

$$\overset{(\text{Λήμμα})}{\leq} \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\cdot(|z|+\delta)^n \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| \leq |h|\cdot\underbrace{\frac{1}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\cdot(|z|+\delta)^n}_{M}$$

$$= M\cdot|h|.$$

[Σημ. ότι επειδή $|z|+\delta < R =$ ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, έχουμε ότι $M<\infty$.]

Άρα, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=g(z).$ ■

→ Γενική περίπτωση: $z_0 \in \mathbb{C}$.

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη περίπτωση για τη συνάρτηση

$$\tilde{f}(w) = f(w+z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |w| < R$$

κ' παίρνουμε

$$f'(w+z_0) = \tilde{f}'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \quad |w| < R.$$

Άρα, για $|z-z_0| < R$, θέτοντας $w = z - z_0$, παίρνουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}. \qquad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα Ι.1.</u> Έστω, R, z_0, f όπως στο Θ.Ι.1. Τότε, υπάρχουν οι $f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$, $n \in \mathbb{N}$ στον $D(z_0, R)$ και

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n κ' με χρήση του Θ.Ι.1.

II. Ομοιόμορφη σύγκλιση.

<u>Ορισμός II.1.</u> Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : K \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $f : K \to \mathbb{C}$. Θα λέμε ότι

<u>$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K</u>

ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$, $\forall z \in K$,
$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

<u>Πρόταση II.1.</u> Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n, f : \gamma^* \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, συνεχείς με $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*. Τότε,
$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid$
$\forall n \geq n_0$, $\forall z \in \gamma^*$, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon / \|\gamma\|$,
όπου $\|\gamma\| = \text{μήκος}(\gamma)$. Τότε, $\forall n \geq n_0$,
$$\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f) \right| \leq \|\gamma\| \cdot \varepsilon / \|\gamma\| = \varepsilon.$$

$\boxtimes$

Πρόταση ΙΙ.2. Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, συνεχείς, ώστε

$$|f_n(z)| \leq \theta_n, \quad z \in \gamma^*, \quad n \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty.$$

Τότε, $\displaystyle\int_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$

Απόδειξη: Θέτω

$$g_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z), \; n \geq 1, \; g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z),$$

$z \in \gamma^*$. Θα δ.ο. $g_n \to g$, ομοιόμορφα στο γ^*.

Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \displaystyle\sum_{j > N} \theta_j < \varepsilon.$

Τότε, $\forall\, n \geq N$, $\forall\, z \in \gamma^*$,

$$|g_n(z) - g(z)| \leq \sum_{j > n} |f_j(z)| \leq \sum_{j > n} \theta_j \leq \sum_{j > N} \theta_j < \varepsilon.$$

Από την Πρόταση ΙΙ.1, παίρνουμε την αποδεικτέα.

$\boxtimes$

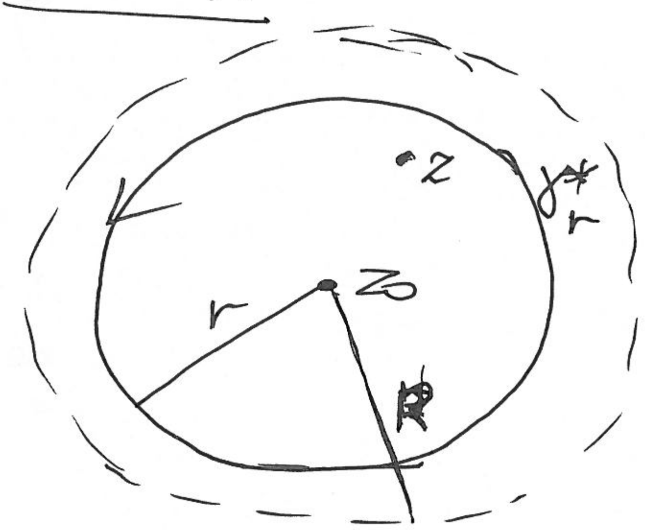
III. Θ. Taylor – Ο.Τ. Cauchy για παραγώγους

Πρόταση III.1. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < R \leq \infty$ κ' $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$. Εάν $|z - z_0| < r$, τότε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z - z_0)^n,$$

όπου $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Απόδειξη:



Ο.Τ. Cauchy $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)}\, dw$$

$\forall w \in \gamma_r^*$, $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$, οπότε

$$\frac{f(w)}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Επιπλέον, $\forall w \in \gamma_r^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \right| \le \frac{M_r}{r} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n,$$

όπου $M_r = \max_{w \in \gamma_r^*} |f(w)|$ κ' $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n < \infty$

(αφού $|z-z_0| < r$). Από την Πρ. II. 2, παίρνουμε τελικά ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n.$$

$\boxtimes$

<u>Θεώρημα III.1 (Θ. Taylor)</u> Έστω $f \in H(D(z_0, R))$, $0 < R \le \infty$. Τότε, υπάρχουν οι

$$f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots, \quad n \in \mathbb{N}$$

στον $D(z_0, R)$ κ'

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R.$$

Επιπλέον, αν $0 < r < R$, $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

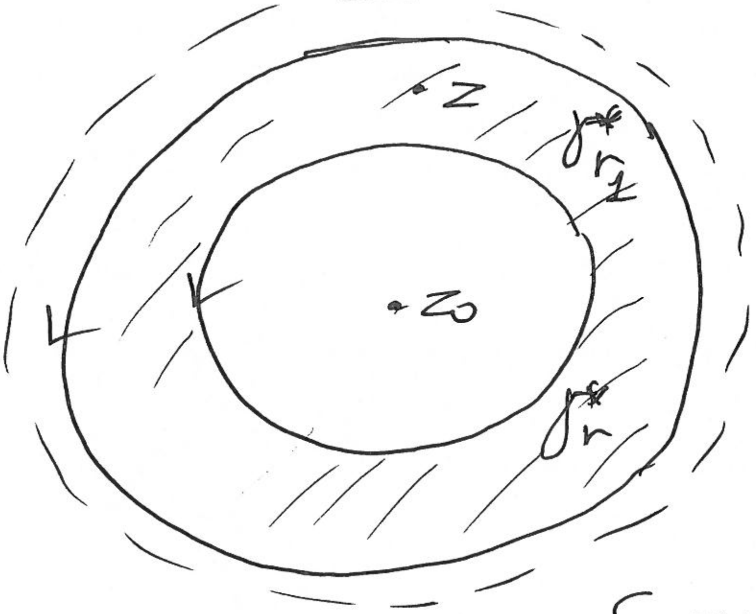
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Θα δ.ο. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, για $|z-z_0|<R$.

→ Εάν $|z-z_0|<r<R$, το συμπέρασμα έπεται από την Πρότ. III.1.

→ Εάν $r\le|z-z_0|<R$, επιλέγω $r_1>0$ με $|z-z_0|<r_1<R$ και θέτω

$$\gamma_{r_1}(t)=z_0+r_1e^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$



Από την Πρ. III.1 έχαμε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

όπου

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Όμως, από την Αρχή της Παραμόρφωσης,

$$c_n=a_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Τα υπόλοιπα έπονται από το Πόρισμα I.1. ☒

<u>Πόρισμα III.1.</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f \in H(A)$. Τότε, υπάρχουν στο A οι $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ κ' είναι ολόμορφες.

<u>Απόδειξη:</u>

<u>Ισχυρισμός:</u> $\forall g \in H(A)$, ισχύει $g' \in H(A)$.

Πράγματι· έστω $g \in H(A)$, $z_0 \in A$. Επιλέγω $R > 0 \,|\, D(z_0, R) \subset A$. Σύμφ. με το Θ. III.1 (Θ. Taylor), υπάρχει η g'' στον $D(z_0, R)$
$\Rightarrow g'$ διαφορίσιμη στο z_0, ($\forall z_0 \in A$)
$\Rightarrow g' \in H(A)$.

Έστω τώρα $f \in H(A)$. Σύμφ. με τον Ισχυρισμό, $f' \in H(A) \Rightarrow (f')' \in H(A)$
δηλ. $f'' \in H(A) \Rightarrow (f'')' \in H(A)$
δηλ. $f''' \in H(A)$ κ.ο.κ.

$\boxtimes$

<u>Πόρισμα III.2.</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f \in H(A)$. Εάν $0 < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ με

$$D(z_0, R) \subseteq A,$$

τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

για $|z - z_0| < R$.

Ειδικότερα, αν $A=\mathbb{C}$, τότε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \ \forall z_0, z\in\mathbb{C}.$$

<u>Απόδειξη</u>: Άμεσο από το Θ. ΙΙΙ. 1.

<u>Πόρισμα ΙΙΙ. 3. (Ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy για παραγώγους)</u>

Έστω γ θετικά προσανατολισμένη, κλειστή, απλή, τμ. λεία κ' f ολόμορφη στο $A=\operatorname{int}\gamma^*$ κ' συνεχής στο γ^*.
Υποθέτουμε ότι A απλά συνεκτικό.
Εάν $z_0\in A$, τότε

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \ n\in\mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη</u>:

Επιλέγω $R>0 \mid D(z_0,R)\subset A$ κ' $0<r<R$. Θέτω

$\gamma_r(t)=z_0+re^{it}, t\in[0,2\pi]$.

Από Θ. ΙΙΙ. 1, έχουμε

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw =$$

(<u>Αρχή</u> Παραμόρφ.)

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \ n\in\mathbb{N}. \ \boxtimes$$