Κεφάλαιο ΙΙ. Συνήθεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Μελετήσαμε τις γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης:

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad (1)$$

και είδαμε ότι η γενική λύση της (1) δίνεται από την σχέση:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad (2)$$

όπου $\{y_1(x), y_2(x)\}$ ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (1) και c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Θα μας ενδιέφερε να βρούμε μία στρατηγική για τον προσδιορισμό του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ (1). Όταν οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις κάτι τέτοιο είναι αρκετά δύσκολο. Εάν γνωρίζουμε την μία από τις δύο συναρτήσεις του θεμελιώδους συνόλου τότε με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης μπορούμε να προσδιορίσουμε την άλλη λύση. Το ερώτημα που ανακύπτει είναι αν μπορούμε να καταστρώσουμε μία τεχνική να καθορίζουμε τη συνάρτηση $y_1(x)$ ή ταυτόχρονα και τις δύο λύσεις. Στην αμέσως επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι αυτό είναι εύκολο όταν οι συντελεστές p, q είναι τετριμμένες σταθερές συναρτήσεις. Επίσης, σε επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι και πάλι είναι υλοποιήσιμο-αν και πιο απαιτητικό-στην περίπτωση που οι συναρτήσεις p, q είναι αναλυτικές συναρτήσεις ή διαθέτουν ελεγχόμενη μη αναλυτικότητα έτσι ώστε οι συναρτήσεις $xp, x^2 q$ να είναι αναλυτικές.

1. Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Όταν οι συναρτήσεις p και q είναι σταθερές, ανακύπτουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές:

$$L[y] = y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (1.1)$$

όπου a, b είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Η μελέτη τους είναι σημαντική διότι προκύπτουν σε πολλές εφαρμογές. Οποτεδήποτε τα φυσικά χαρακτηριστικά ενός γραμμικού συστήματος δεν εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή, η μοντελοποίηση οδηγεί σε μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Το βασικό επιχείρημα για την κατασκευή του θεμελιώδους συνόλου λύσεων είναι η σκέψη ότι η ΔΕ (1.1) επιδέχεται αναγκαστικά λύσεις εκθετικού τύπου της μορφής $e^{\lambda x}$ από τη στιγμή που κάθε όρος της αναπαράγει την υποψήφια εκθετική λύση οδηγώντας σε μία αλγεβρική σχέση που εμπλέκει την παράμετρο λ. Πράγματι, αντικαθιστώντας την υποτιθέμενη λύση $e^{\lambda x}$ στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0 => \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (1.2)$$

Το πολυώνυμο $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ ονομάζεται *<u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u>* της διαφορικής εξίσωσης και το τριώνυμο $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ καλείται *<u>χαρακτηριστικό εξίσωση (ΧΕ)</u>* της διαφορικής εξίσωσης. Οι ρίζες της ΧΕ, που είναι τελικά οι επιτρεπτοί εκθέτες της δοκιμαστικής συνάρτησης $e^{\lambda x}$ ώστε να αποτελούν αυτές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, ονομάζονται *<u>ιδιοτιμές</u>* της διαφορικής εξίσωσης.

Αναδεικνύονται τρείς χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

α) **Εάν $\boldsymbol{D = a^2 - 4b}$** > 0, η ΧΕ διαθέτει δύο πραγματικές ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{D}}{2}$, με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ που οδηγούν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ για τα μέλη του οποίου η γραμμική ανεξαρτησία αποδεικνύεται εύκολα μέσα από τον μη μηδενισμό της ορίζουσας Wronski, που ισούται απλά με $W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-\frac{\alpha}{2}x} \neq 0$.

Η γενική λύση της διαφορικής είναι: $y(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left(c_1 e^{\frac{\sqrt{D}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{D}}{2}x}\right) \qquad (1.3)$

Παράδειγμα 1.1: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$.
Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Οι ρίζες της ΧΕ είναι: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$, οπότε η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.

β) **Εάν** $\boldsymbol{D = a^2 - 4b} < 0$, η ΧΕ διαθέτει δύο μιγαδικές ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{-D}}{2}$, οπότε προκύπτουν οι καθαρά μιγαδικές ανεξάρτητες λύσεις:

$$\tilde{y}_1(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{i\sqrt{-D}}{2}x} = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left\{cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right) + i\,sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right)\right\}$$
$$\tilde{y}_2(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{-i\sqrt{-D}}{2}x} = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left\{cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right) - i\,sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right)\right\}.$$

Σε προβλήματα εφαρμογών όπου οι συντελεστές , οι διεγέρσεις , οι αρχικές συνθήκες έχουν πραγματικές τιμές, δεν είναι επιθυμητό να έχουμε ως βάση ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων που είναι μιγαδικές συναρτήσεις. Μπορούμε εναλλακτικά να πάρουμε ως θεμελιώδες σύνολο αυτό που προκύπτει αν στηριχθούμε στην αρχή της υπέρθεσης και θεωρήσουμε το ημι-άθροισμα και την ημι-διαφορά (ακολουθούμενη από διαίρεση με τη φανταστική μονάδα) των συναρτήσεων $\tilde{y}_i(x), i = 1,2$ και όντως τότε αποκτάται το θεμελιώδες σύνολο πραγματικών συναρτήσεων(*):

$$y_1(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\,cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right), \qquad y_2(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\,sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right).$$

Η γενική λύση της διαφορικής είναι: $y(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left\{c_1 cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right) + c_2\,sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right)\right\}$. (1.4)

Παρατήρηση 1.2: Η έκφραση: $c_1 cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}x) + c_2 sin(\frac{\sqrt{-D}}{2}x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή: $Rcos(\frac{\sqrt{-D}}{2}x - \varphi)$, όπου $c_1 = Rcos\varphi, c_2 = Rsin\varphi$, και $R = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$ [κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής σχέσης: $cos(\alpha - \beta) = cosacosb + sinasin\beta$]. Οπότε η γενική λύση γράφεται: $y(x) = Re^{-\frac{\alpha}{2}x}cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}x - \varphi)$.

(*)Γενικότερα, για μία ΔΕ: $L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, αν $p(x), q(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις και $\tilde{y}(x) = u(x) + iv(x)$ είναι μία μιγαδική λύση της τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι το πραγματικό μέρος: $Re(\tilde{y}(x)) = u(x)$ και το φανταστικό μέρος: $Im(\tilde{y}(x)) = v(x)$ της μιγαδικής λύσης αποτελούν πραγματικές λύσεις της ΔΕ.

Παράδειγμα 1.3: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$.
Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Οι ρίζες της ΧΕ είναι: $\lambda_1 = -1 + 2i,\ \lambda_2 = -1 - 2i$, οπότε μία μιγαδική λύση της ΔΕ είναι: $\tilde{y}_1(x) = e^{-x}e^{-i2x} = e^{-x}(cos2x + isin2x)$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = e^{-x}(c_1\,cos(2x) + c_2\,sin(2x))$.

γ) Εάν $\boldsymbol{D = a^2 - 4b = 0}$, η ΧΕ έχει μόνο μία ιδιοτιμή (διπλή): την $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2}$ που οδηγεί σε μία μόνο λύση, την $y_1(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}$. Αν ακολουθήσουμε την τεχνική του υποβιβασμού τάξης μπορούμε να προσδιορίσουμε τη δεύτερη λύση:

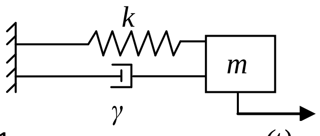
$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a dx}\,dx = xy_1(x) = xe^{-\frac{\alpha}{2}x}.$$

Η γενική λύση της διαφορικής είναι: $y(x) = c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{\alpha}{2}x} = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{\alpha}{2}x}$. (1.5)

Παράδειγμα 1.4: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$.
Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$. Οι ρίζες της ΧΕ είναι: $\lambda_{1,2} = -3$, οπότε η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$.

Εφαρμογή-Μηχανικές ταλαντώσεις (Ελεύθερη ταλάντωση)

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη της κίνησης ενός σώματος μάζας m, το οποίο προσαρτάται σε ένα ελατήριο σταθεράς k και σε κάποιον αποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης γ, όπως φαίνεται στο σχ. 1. Έστω $x(t)$, μετρούμενη θετικά προς τα δεξιά, η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή t.



Σχ.1

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι: $mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = 0$. (1.6)

Την χρονική στιγμή $t = 0$, θεωρούμε ότι το σώμα έχει μία μετατόπιση x_o από την θέση ισορροπίας και η ταχύτητά του είναι υ_o. Άρα οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x(0) = x_o$ και $x'(0) = \upsilon_o$.

Να προσδιορισθεί η μετατόπιση του σώματος $x(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t. Επίσης να υπολογισθεί το πλάτος, η περίοδος και η φάση της ταλάντωσης στις παρακάτω περιπτώσεις:

- **(i)** όταν ο συντελεστής απόσβεσης $\gamma = 0$, (ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση)
- **(ii)** όταν $0 < \gamma^2 < 4km$, (ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση)

<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της (1.6) στη μορφή $x(t) = e^{\lambda t}$, οδηγούμαστε στην ΧΕ:

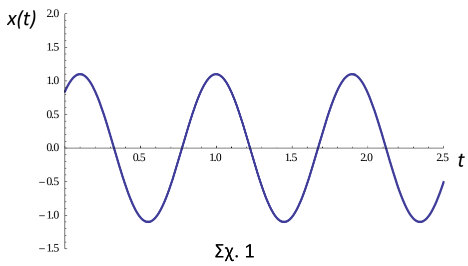
$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 => \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$$

(i) Για $\gamma = 0$, οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές, $\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4km}}{2m} = \frac{\pm i\sqrt{4km}}{2m} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_o$, με $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Άρα η γενική λύση της (1.6) είναι: $x(t) = c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t)$.

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες, έχουμε $c_1 = x_o$ και $c_2 = \frac{\upsilon_o}{\omega_o}$, και η ειδική λύση γράφεται: $x(t) = R\cos(\omega_o t - \varphi)$, με $R = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} = \sqrt{{x_o}^2 + \left(\frac{\upsilon_o}{\omega_o}\right)^2}$, και $\tan\varphi = \frac{\upsilon_o}{x_o\omega_o}$.

[Κατά τον υπολογισμό του φ θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην επιλογή του σωστού τεταρτημορίου. Αυτό γίνεται ελέγχοντας τα πρόσημα των $\cos\varphi = \frac{c_1}{R}$ και $\sin\varphi = \frac{c_2}{R}$.]



Σχ. 1

Η κίνηση που περιγράφεται από την ειδική λύση είναι μία περιοδική, ή απλή αρμονική κίνηση (Σχ.1).

Η ***περίοδος*** της κίνησης είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ και η κυκλική συχνότητα $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ μετρούμενη σε ακτίνια ανά μονάδα χρόνου- η ***ιδιοσυχνότητα*** του συστήματος, η οποία παραμένει η ίδια ανεξαρτήτων των αρχικών συνθηκών.

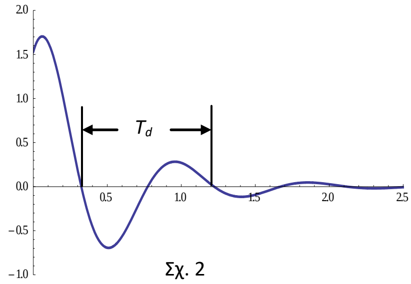
Η μέγιστη μετατόπιση R της μάζας από τη θέση ισορροπίας είναι το **πλάτος** της κίνησης, το οποίο εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, αλλά παραμένει σταθερό με τον χρόνο (λόγω απουσίας αποσβέσεων-δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας που είχε αρχικά το σύστημα λόγω της αρχικής μετατόπισης και ταχύτητας). Η αδιάστατη παράμετρος φ καλείται ***φάση*** ή ***γωνία φάσης***, και μετρά τη μετατόπιση του κύματος από την κανονική θέση (που αντιστοιχεί στο $\varphi = 0$).

(ii) Όταν $0 < \gamma^2 < 4km$, οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές: $\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}$, με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Η γενική λύση της (1.6) είναι: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right)\right)$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες έχουμε $c_1 = x_o$ και $c_2 = \frac{2mv_o+\gamma x_o}{\sqrt{4km-\gamma^2}}$, και η ειδική λύση γράφεται: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} R \cos\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t - \varphi\right)$, με $R = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} = \sqrt{{x_o}^2 + \left(\frac{2mv_o+\gamma x_o}{\sqrt{4km-\gamma^2}}\right)^2}$

και $tan\varphi = \frac{2mv_o+\gamma x_o}{x_o\sqrt{4km-\gamma^2}}$.



Σχ. 2

Η κίνηση του σώματος έχει τη μορφή συνημιτονικού κύματος, του οποίου το πλάτος φθίνει καθώς ο χρόνος αυξάνεται - **αποσβεννύμενη ταλάντωση** (Σχ.2).

Παρόλο που η κίνηση δεν είναι περιοδική, η παράμετρος $\mu = \frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} = \sqrt{{\omega_o}^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$ προσδιορίζει την συχνότητα με την οποία το σώμα ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας. Το μ ονομάζεται ***ψευδοσυχνότητα*** και η ποσότητα $T_d = \frac{2\pi}{\mu}$ καλείται ***ψευδοπερίοδος*** και είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων της μάζας από τη θέση ισορροπίας καθώς κινείται προς την ίδια κατεύθυνση.

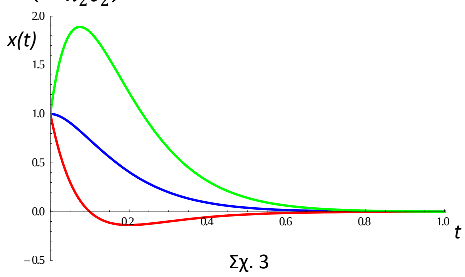
Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι καθώς το $\gamma \to \sqrt{4km}$, $\mu \to 0$ και $T_d \to \infty$.

α) Για $\gamma = \sqrt{4km}$ (κρίσιμη απόσβεση) – διπλή ιδιοτιμή, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda$, αρνητική. Έτσι η γενική λύση είναι $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + tc_2)$. Η παράγωγος $x'(t)$ έχει το πολύ ένα σημείο t_o όπου αυτή αλλάζει πρόσημο. Το σημείο t_o προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη σχέση $x'(t_o) = 0 \Rightarrow e^{-\lambda t_o}(-\lambda c_1 - \lambda t c_2 + c_2) = 0 \Rightarrow t_o = \frac{c_2-\lambda c_1}{\lambda c_2}$.

Μετά από αυτό το σημείο η λύση τείνει μονότονα στο 0 καθώς το $t \to \infty$.

β) Για $\gamma > \sqrt{4km}$ (ισχυρή απόσβεση) – ιδιοτιμές πραγματικές αρνητικές $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Η γενική λύση είναι $x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$. Πάλι η λύση τείνει μονότονα στο 0 καθώς το $t \to \infty$ με μία το πολύ αλλαγή μονοτονίας στο σημείο $t_o = ln\left(-\frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_2 c_2}\right)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$.

Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις η μάζα μπορεί να διέλθει από τη θέση ισορροπίας το πολύ μία φορά τείνοντας μετά στη θέση ισορροπίας, Σχ.3.



Σχ. 3

<u>**Παράδειγμα:**</u> Σώμα μάζας $m = 20gr$ προσδένεται σε ελατήριο σταθεράς $k = 3.92N/m$ και αποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης $\gamma = 0.4\ Ns/m$. Κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα έχει μία απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας $x_o = 2cm$ και αφήνεται ελεύθερη. Να βρεθεί η θέση της, $x(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή. Να υπολογισθεί επίσης, η συχνότητα, η περίοδος και το πλάτος και η φάση της κίνησης.

Επίλυση: Η ΔΕ η οποία περιγράφει την κίνηση της μάζας είναι: $20x''(t) + 400x'(t) + 3920x(t) = 0 \Rightarrow x''(t) + 20x'(t) + 196x(t) = 0$

Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $x(t) = e^{\lambda t}$ προκύπτει η ΧΕ: $\lambda^2 + 20\lambda + 196 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -10 \pm i4\sqrt{6}$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$x(t) = e^{-10t}\{c_1\cos(4\sqrt{6}t) + c_2\sin(4\sqrt{6}t)\}$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες: $x(0) = 2cm,\ x'(0) = 0$, έχουμε την ειδική λύση:

$$x_{\varepsilon\iota\delta}(t) = e^{-10t}\left\{2\cos(4\sqrt{6}t) + \frac{5}{\sqrt{6}}\sin(4\sqrt{6}t)\right\} = Re^{-10t}\cos(4\sqrt{6}\,t - \varphi)\,cm, (t\ \sigma\varepsilon\ s),$$

όπου ο συντελεστής πλάτους, $R = \sqrt{2^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2} = 2.86cm$, και $tan\varphi = \frac{5}{2\sqrt{6}} => \varphi = 0.79$, η γωνία φάσης (στο 1ο τεταρτημόριο). Η περίοδος της ταλάντωσης: $T_d = \frac{2\pi}{4\sqrt{6}}\ s$ και η συχνότητα: $\mu = 4\sqrt{6}\ rad/s$.

2. Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Δίνεται η γραμμική μη ομογενής ΔΕ 2ης τάξης:

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \qquad (2.1)$$

με $p(x), q(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $I = (\alpha, \beta)$.

<u>Πρόταση 2.1</u>: Αν $y_{\varepsilon\iota\delta\,(1)}(x)$ και $y_{\varepsilon\iota\delta\,(2)}(x)$ είναι ειδικές λύσεις της (2.1) τότε η διαφορά τους, $y_{\varepsilon\iota\delta\,(1)}(x) - y_{\varepsilon\iota\delta\,(2)}(x)$, είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \qquad (2.2)$$

Μπορείτε να το αποδείξετε;

<u>Πρόταση 2.2</u>: Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (2.2) και $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ είναι μία ειδική λύση της (2.1), να δειχθεί ότι η γενική λύση της (2.1) είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x) \qquad (2.3)$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $y(x)$ μία τυχαία λύση της (2.1) τότε βάσει της πρότασης 2.1, $y(x) - y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$, είναι λύση της (2.2). Άρα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, έτσι ώστε $y(x) - y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Άρα η τυχαία λύση γράφεται: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ (α)
Εφόσον $y(x)$ είναι μία τυχαία λύση της (2.1) έπεται ότι κάθε λύση της μπορεί να γραφεί στην μορφή (α). Επομένως, η γενική λύση της (2.1) είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x).$$

<u>Παρατήρηση 2.1</u>: Η γενική λύση της (2.1) είναι η υπέρθεση της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μίας ειδικής λύσης της μη ομογενούς. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα που αφορούν τη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης. Η τεχνική ανάλυσης της λύσης σε τμήματα ονομάζεται **αρχή της υπέρθεσης** και μπορεί πάντα να εφαρμοστεί στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Αν ο μη ομογενής όρος $g(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)$, δηλαδή αποτελεί άθροισμα k το πλήθος όρων, τότε το πρόβλημα $L[y] = g(x)$ μπορεί να αναλυθεί στα υποπροβλήματα: $L[y] = 0, L[y] = g_i(x), i = 1,2 \ldots k$, δηλαδή μία ομογενή και k μη ομογενείς εξισώσεις. Επιλύουμε τις εξισώσεις αυτές και στη συνέχεια προσθέτουμε τη λύση της ομογενούς και τις ειδικές λύσεις $y_{\varepsilon\iota\delta\,(i)}$ των k μη ομογενών εξισώσεων. Έτσι καταλήγουμε στη γενική λύση της εξίσωσης (2.1), που είναι: $y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + \sum_{i=1}^{k} y_{\varepsilon\iota\delta\,(i)}(x)$.

Παράδειγμα: Αν δίνεται η ΔΕ: $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 3e^{2t} - 8e^{t}cos2t$
Τότε διασπώντας το δεξί μέλος της εξίσωσης λαμβάνουμε τις δύο εξισώσεις:

$$y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 3e^{2t}$$
$$y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = -8e^{t}cos2t$$

Λύσεις αυτών των δύο εξισώσεων είναι: $y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$ και $y(t) = \frac{10}{13}e^{t}cos2t + \frac{2}{13}e^{t}sin2t$

αντίστοιχα. Επομένως, μια ειδική λύση της ΔΕ είναι το άθροισμα τους, το οποίο προστιθέμενο στην γενική λύση της ομογενούς μας δίνει την γενική λύση της ΔΕ.

Αρκεί λοιπόν η γνώση μιας ειδικής λύσης της (2.1) και του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της (2.2) για να προσδιορίσουμε τη γενική λύση της (2.1). Για να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς ακολουθούμε μία από τις επόμενες δύο μεθόδους, ανάλογα με τη μορφή των συντελεστών της εξίσωσης και του μη ομογενούς όρου.

Μέθοδοι προσδιορισμού μιας ειδικής λύσης

α) Η μέθοδος της *μεταβολής των παραμέτρων ή μέθοδος Lagrange*

Η μέθοδος αυτή αφορά την γενική περίπτωση κατά την οποία οι συντελεστές και ο μη ομογενής όρος της εξίσωσης (2.1) είναι πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις, εν γένει μη σταθερές. Η βασική ιδέα είναι να αντικατασταθούν οι σταθερές c_1 και c_2 της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς με μεταβλητές συναρτήσεις, με την ελπίδα να βρεθεί μία ειδική λύση της εξίσωσης (2.1). Υποθέτουμε λοιπόν ότι η ειδική λύση είναι της μορφής:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \qquad (\alpha1)$$

Αντικαθιστούμε την (α1) στη ΔΕ (2.1) και έχουμε

$$(u_1y_1 + u_2y_2)'' + p(x)(u_1y_1 + u_2y_2)' + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \Rightarrow$$
$$(u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_1y_1' + u_2y_2')' + p(x)(u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x)$$

Θεωρούμε ότι: $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ (α2.1)

οπότε από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει

$$(u_1y_1' + u_2y_2')' + p(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \Rightarrow$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'' + p(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \Rightarrow$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + u_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = g(x)$$

Όμως $y_1(x), y_2(x)$ αποτελούν λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς, άρα
$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ και $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$. Επομένως

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x), \qquad (\alpha2.2)$$

Οι συναρτήσεις $u_1(x), u_2(x)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \text{ και } u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x). \qquad (\alpha2)$$

Το σύστημα (α2) έχει μοναδική λύση εφόσον $W(y_1, y_2|x) = W(x) \neq 0$.
Επιλύοντας το σύστημα (α2) ως προς u_1', u_2' και ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx + c_1, \; u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx + c_2. \qquad (\alpha3)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $c_1 = c_2 = 0$, οπότε η ειδική λύση της (2.1) είναι:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx. \qquad (\alpha4)$$

<u>Παρατήρηση (α)1</u>: Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει κατευθείαν τις εξισώσεις του συστήματος (α2) ή τον τύπο (α4).

<u>Παράδειγμα (α)1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$.

<u>Επίλυση</u>: Για την αντίστοιχη ομογενή, υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$, η χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 => \lambda_1 = \lambda_2 = -2$, άρα η βάση του χώρου λύσεων της ομογενούς παράγεται από τις συναρτήσεις $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = xe^{-2x}$ με ορίζουσα Wronski $W(x) = e^{-4x}$. Εφαρμόζοντας τον τύπο (α4) βρίσκουμε την ειδική λύση

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -e^{-2x}\int \frac{xe^{-2x}e^{-2x}}{e^{-4x}x^2}dx + xe^{-2x}\int \frac{e^{-2x}e^{-2x}}{e^{-4x}x^2}dx = -e^{-2x}ln|x| - e^{-2x}, x \neq 0$$

Άρα η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι
$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}ln|x| - e^{-2x} = (c_1 - 1)e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}ln|x| = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}ln|x|, x \neq 0$. (Ο όρος $-e^{-2x}$, αφομοιώνεται στην γενική λύση της ομογενούς).