Κεφάλαιο ΙΙ. Συνήθεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Μελετήσαμε τις γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης:

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad (1)$$

και είδαμε ότι η γενική λύση της (1) δίνεται από την σχέση:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad (2)$$

όπου $\{y_1(x), y_2(x)\}$ ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (1) και c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Θα μας ενδιέφερε να βρούμε μία στρατηγική για τον προσδιορισμό του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ (1). Όταν οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις κάτι τέτοιο είναι αρκετά δύσκολο. Εάν γνωρίζουμε την μία από τις δύο συναρτήσεις του θεμελιώδους συνόλου τότε με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης μπορούμε να προσδιορίσουμε την άλλη λύση. Το ερώτημα που ανακύπτει είναι αν μπορούμε να καταστρώσουμε μία τεχνική να καθορίζουμε τη συνάρτηση $y_1(x)$ ή ταυτόχρονα και τις δύο λύσεις. Στην αμέσως επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι αυτό είναι εύκολο όταν οι συντελεστές p, q είναι τετριμμένες σταθερές συναρτήσεις. Επίσης, σε επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι και πάλι είναι υλοποιήσιμο-αν και πιο απαιτητικό-στην περίπτωση που οι συναρτήσεις p, q είναι αναλυτικές συναρτήσεις ή διαθέτουν ελεγχόμενη μη αναλυτικότητα έτσι ώστε οι συναρτήσεις xp, x^2q να είναι αναλυτικές.

1. Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Όταν οι συναρτήσεις p και q είναι σταθερές, ανακύπτουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές:

$$L[y] = y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \qquad (1.1)$$

όπου a, b είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Η μελέτη τους είναι σημαντική διότι προκύπτουν σε πολλές εφαρμογές. Οποτεδήποτε τα φυσικά χαρακτηριστικά ενός γραμμικού συστήματος δεν εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή, η μοντελοποίηση οδηγεί σε μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Το βασικό επιχείρημα για την κατασκευή του θεμελιώδους συνόλου λύσεων είναι η σκέψη ότι η ΔΕ (1.1) επιδέχεται αναγκαστικά λύσεις εκθετικού τύπου της μορφής $e^{\lambda x}$ από τη στιγμή που κάθε όρος της αναπαράγει την υποψήφια εκθετική λύση οδηγώντας σε μία αλγεβρική σχέση που εμπλέκει την παράμετρο λ. Πράγματι, αντικαθιστώντας την υποτιθέμενη λύση $e^{\lambda x}$ στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (1.2)$$

Το πολυώνυμο $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ ονομάζεται ***<u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u>*** της διαφορικής εξίσωσης και το τριώνυμο $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ καλείται ***<u>χαρακτηριστική εξίσωση</u>*** *<u>(ΧΕ)</u>* της διαφορικής εξίσωσης. Οι ρίζες της ΧΕ, που είναι τελικά οι επιτρεπτοί εκθέτες της δοκιμαστικής συνάρτησης $e^{\lambda x}$ ώστε να αποτελούν αυτές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, ονομάζονται ***<u>ιδιοτιμές</u>*** της διαφορικής εξίσωσης.

Αναδεικνύονται τρείς χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

α) **Εάν $\boldsymbol{D = a^2 - 4b} > 0$**, η ΧΕ διαθέτει δύο πραγματικές ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{D}}{2}$, με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ που οδηγούν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ για τα μέλη του οποίου η γραμμική ανεξαρτησία αποδεικνύεται εύκολα μέσα από τον μη μηδενισμό της ορίζουσας Wronski, που ισούται απλά με $W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-\frac{\alpha}{2}x} \neq 0$.

Η γενική λύση της διαφορικής είναι: $y(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left(c_1 e^{\frac{\sqrt{D}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{D}}{2}x}\right) \qquad (1.3)$

Παράδειγμα 1.1: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$.
Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Οι ρίζες της ΧΕ είναι: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$, οπότε η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.

β) **Εάν $D = a^2 - 4b < 0$**, η ΧΕ διαθέτει δύο μιγαδικές ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{-D}}{2}$, οπότε προκύπτουν οι καθαρά μιγαδικές ανεξάρτητες λύσεις:

$$\tilde{y}_1(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{i\sqrt{-D}}{2}x} = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left\{cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right) + i\,sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right)\right\}$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{-i\sqrt{-D}}{2}x} = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left\{cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right) - i\,sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right)\right\}.$$

Σε προβλήματα εφαρμογών όπου οι συντελεστές , οι διεγέρσεις , οι αρχικές συνθήκες έχουν πραγματικές τιμές, δεν είναι επιθυμητό να έχουμε ως βάση ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων που είναι μιγαδικές συναρτήσεις. Μπορούμε εναλλακτικά να πάρουμε ως θεμελιώδες σύνολο αυτό που προκύπτει αν στηριχθούμε στην αρχή της υπέρθεσης και θεωρήσουμε το ημι-άθροισμα και την ημι-διαφορά (ακολουθούμενη από διαίρεση με τη φανταστική μονάδα) των συναρτήσεων $\tilde{y}_i(x), i = 1,2$ και όντως τότε αποκτάται το θεμελιώδες σύνολο πραγματικών συναρτήσεων(*):

$$y_1(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\, cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right), \qquad y_2(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\, sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right).$$

Η γενική λύση της διαφορικής είναι: $y(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left\{c_1 cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right) + c_2\, sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right)\right\}$. (1.4)

Παρατήρηση 1.2: Η έκφραση: $c_1 cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}x) + \ c_2 sin(\frac{\sqrt{-D}}{2}x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή: $Rcos(\frac{\sqrt{-D}}{2}x - \varphi)$, όπου $c_1 = Rcos\varphi, c_2 = Rsin\varphi$, και $R = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$ [κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής σχέσης: $cos(\alpha - \beta) = cosacosb + sin\alpha sin\beta$]. Οπότε η γενική λύση γράφεται: $y(x) = \ Re^{\,-\frac{\alpha}{2}x} cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}x - \varphi)$.

(*)Γενικότερα, για μία ΔΕ: $L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, αν $p(x), q(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις και $\tilde{y}(x) = u(x) + iv(x)$ είναι μία μιγαδική λύση της τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι το πραγματικό μέρος: $Re(\tilde{y}(x)) = u(x)$ και το φανταστικό μέρος: $Im(\tilde{y}(x)) = v(x)$ της μιγαδικής λύσης αποτελούν πραγματικές λύσεις της ΔΕ.

Παράδειγμα 1.3: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$.
Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Οι ρίζες της ΧΕ είναι: $\lambda_1 = -1 + 2i,\ \lambda_2 = -1 - 2i$, οπότε μία μιγαδική λύση της ΔΕ είναι: $\tilde{y}_1(x) = e^{-x}e^{-i2x} = e^{-x}(cos2x + isin2x)$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = e^{-x}(c_1\, cos(2x) + c_2\, sin(2x))$.

γ) Εάν $\boldsymbol{D = a^2 - 4b = 0}$, η ΧΕ έχει μόνο μία ιδιοτιμή (διπλή) την $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2}$ που οδηγεί σε μία μόνο λύση, την $y_1(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}$. Αν ακολουθήσουμε την τεχνική του υποβιβασμού τάξης μπορούμε να προσδιορίσουμε τη δεύτερη λύση:

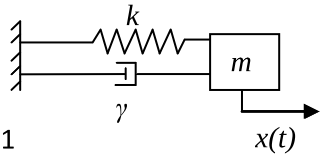
$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int adx}\, dx = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\int \frac{e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha x}} dx = xe^{-\frac{\alpha}{2}x}.$$

Η γενική λύση της διαφορικής είναι: $y(x) = c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{\alpha}{2}x} = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{\alpha}{2}x}$. (1.5)

Παράδειγμα 1.4: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$.
Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$. Οι ρίζες της ΧΕ είναι: $\lambda_{1,2} = -3$, οπότε η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$.

Εφαρμογή-Μηχανικές ταλαντώσεις (Ελεύθερη ταλάντωση)

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη της κίνησης ενός σώματος μάζας m, το οποίο προσαρτάται σε ένα ελατήριο σταθεράς k και σε κάποιον αποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης γ, όπως φαίνεται στο σχ. 1. Έστω $x(t)$, μετρούμενη θετικά προς τα δεξιά, η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή t.



Σχ.1

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι: $mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = 0$. (1.6)

Την χρονική στιγμή $t = 0$, θεωρούμε ότι το σώμα έχει μία μετατόπιση x_o από την θέση ισορροπίας και η ταχύτητά του είναι υ_o. Άρα οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x(0) = x_o$ και $x'(0) = \upsilon_o$.

Να προσδιορισθεί η μετατόπιση του σώματος $x(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t. Επίσης να υπολογισθεί το πλάτος, η περίοδος και η φάση της ταλάντωσης στις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) όταν ο συντελεστής απόσβεσης $\gamma = 0$, (ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση)

(ii) όταν $0 < \gamma^2 < 4km$, (ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση)

Επίλυση: Υποθέτοντας λύσεις της (1.6) στη μορφή $x(t) = e^{\lambda t}$, οδηγούμαστε στην ΧΕ:

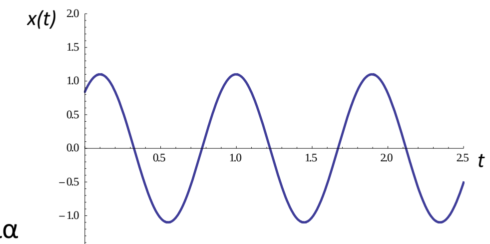
$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$$

(i) Για $\gamma = 0$, οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές, $\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4km}}{2m} = \frac{\pm i\sqrt{4km}}{2m} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_o$, με $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Άρα η γενική λύση της (1.6) είναι: $x(t) = c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t)$.

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες, έχουμε $c_1 = x_o$ και $c_2 = \frac{\upsilon_o}{\omega_o}$, και η ειδική λύση γράφεται: $x(t) = R\cos(\omega_o t - \varphi)$, με $R = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} = \sqrt{{x_o}^2 + \left(\frac{\upsilon_o}{\omega_o}\right)^2}$, και $\tan\varphi = \frac{\upsilon_o}{x_o \omega_o}$.

[Κατά τον υπολογισμό του φ θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην επιλογή του σωστού τεταρτημορίου. Αυτό γίνεται ελέγχοντας τα πρόσημα των $\cos\varphi = \frac{c_1}{R}$ και $\sin\varphi = \frac{c_2}{R}$.]



Σχ. 1

Η κίνηση που περιγράφεται από την ειδική λύση είναι μία περιοδική, ή απλή αρμονική κίνηση (Σχ.1).

Η ***περίοδος*** της κίνησης είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ και η κυκλική συχνότητα $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ μετρούμενη σε ακτίνια ανά μονάδα χρόνου είναι η ***ιδιοσυχνότητα*** του συστήματος, η οποία παραμένει η ίδια ανεξαρτήτων των αρχικών συνθηκών.

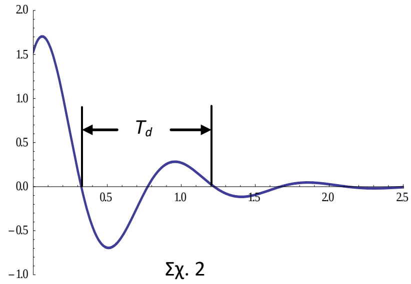
Η μέγιστη μετατόπιση R της μάζας από τη θέση ισορροπίας είναι το ***πλάτος*** της κίνησης, το οποίο εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, αλλά παραμένει σταθερό με τον χρόνο (λόγω απουσίας αποσβέσεων-δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας που είχε αρχικά το σύστημα λόγω της αρχικής μετατόπισης και ταχύτητας). Η αδιάστατη παράμετρος φ καλείται ***φάση*** ή ***γωνία φάσης***, και μετρά τη μετατόπιση του κύματος από την κανονική θέση (που αντιστοιχεί στο $\varphi = 0$).

(ii) Όταν $0 < \gamma^2 < 4km$, οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές: $\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}$, με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Η γενική λύση της (1.6) είναι: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right)\right)$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες έχουμε: $c_1 = x_o$ και $c_2 = \frac{2mv_o+\gamma x_o}{\sqrt{4km-\gamma^2}}$, και η ειδική λύση γράφεται: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} R \cos\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t - \varphi\right)$, με $R = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} = \sqrt{{x_o}^2 + \left(\frac{2mv_o+\gamma x_o}{\sqrt{4km-\gamma^2}}\right)^2}$ και $\tan\varphi = \frac{2mv_o+\gamma x_o}{x_o\sqrt{4km-\gamma^2}}$.

Η κίνηση του σώματος έχει τη μορφή συνημιτονικού κύματος, του οποίου το πλάτος φθίνει καθώς ο χρόνος αυξάνεται - ***αποσβεννύμενη ταλάντωση*** (Σχ.2).



Σχ. 2

Παρόλο που η κίνηση δεν είναι περιοδική, η παράμετρος $\mu = \frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} = \sqrt{{\omega_o}^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$ προσδιορίζει την συχνότητα με την οποία το σώμα ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας. Το μ ονομάζεται ***ψευδοσυχνότητα*** και η ποσότητα $T_d = \frac{2\pi}{\mu}$ καλείται ***ψευδοπερίοδος*** και είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων της μάζας από τη θέση ισορροπίας καθώς κινείται προς την ίδια κατεύθυνση.

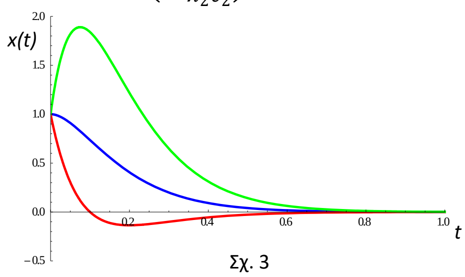
Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι καθώς το $\gamma \to \sqrt{4km}$, $\mu \to 0$ και $T_d \to \infty$.

α) Για $\gamma = \sqrt{4km}$ (***κρίσιμη απόσβεση***) έχουμε διπλή ιδιοτιμή, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda$, αρνητική. Έτσι η γενική λύση είναι $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + tc_2)$. Η παράγωγος $x'(t)$ έχει το πολύ ένα σημείο t_o όπου αυτή αλλάζει πρόσημο. Το σημείο t_o προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη σχέση $x'(t_o) = 0 \Rightarrow e^{-\lambda t_o}(-\lambda c_1 - \lambda t c_2 + c_2) = 0 \Rightarrow t_o = \frac{c_2 - \lambda c_1}{\lambda c_2}$.

Μετά από αυτό το σημείο η λύση τείνει μονότονα στο 0 καθώς το $t \to \infty$.

β) Για $\gamma > \sqrt{4km}$ (***ισχυρή απόσβεση***) οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές αρνητικές $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Η γενική λύση είναι $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. Πάλι η λύση τείνει μονότονα στο 0 καθώς το $t \to \infty$ με μία το πολύ αλλαγή μονοτονίας στο σημείο $t_o = \ln\left(-\frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_2 c_2}\right)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$.

Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις η μάζα μπορεί να διέλθει από τη θέση ισορροπίας το πολύ μία φορά τείνοντας μετά στη θέση ισορροπίας, Σχ.3.



Σχ. 3

Παράδειγμα: Σώμα μάζας $m = 20gr$ προσδένεται σε ελατήριο σταθεράς $k = 3.92N/m$ και αποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης $\gamma = 0.4\ Ns/m$. Κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα έχει μία απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας $x_o = 2cm$ και αφήνεται ελεύθερη. Να βρεθεί η θέση της, $x(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή. Να υπολογισθεί επίσης, η συχνότητα, η περίοδος, το πλάτος και η φάση της κίνησης.

<u>Επίλυση</u>**:** Η ΔΕ η οποία περιγράφει την κίνηση της μάζας είναι:

$20x''(t) + 400x'(t) + 3920x(t) = 0 \Rightarrow x''(t) + 20x'(t) + 196x(t) = 0$

Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $x(t) = e^{\lambda t}$ προκύπτει η ΧΕ: $\lambda^2 + 20\lambda + 196 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_{1,2} = -10 \pm i4\sqrt{6}$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$x(t) = e^{-10t}\{c_1 \cos(4\sqrt{6}t) + c_2 \sin(4\sqrt{6}t)\}$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες: $x(0) = 2cm,\ x'(0) = 0$, έχουμε την ειδική λύση:

$x_{\varepsilon\iota\delta}(t) = e^{-10t}\left\{2\cos(4\sqrt{6}t) + \frac{5}{\sqrt{6}}\sin(4\sqrt{6}t)\right\} = Re^{-10t}\cos(4\sqrt{6}\,t - \varphi)\,cm, (t\ \sigma\varepsilon\ s)$,

όπου ο συντελεστής πλάτους, $R = \sqrt{2^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2} = 2.86cm$, και $\tan\varphi = \frac{5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \varphi = 0.79$, η γωνία φάσης (στο 1$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο). Η περίοδος της ταλάντωσης: $T_d = \frac{2\pi}{4\sqrt{6}}\ s$ και η συχνότητα: $\mu = 4\sqrt{6}\ rad/s$.

2. Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2$^{\text{ης}}$ τάξης

Δίνεται η γραμμική μη ομογενής ΔΕ 2$^{\text{ης}}$ τάξης:

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \qquad (2.1)$$

με $p(x), q(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $I = (\alpha, \beta)$.

<u>Πρόταση 2.1</u>: Αν $y_{\varepsilon\iota\delta\,(1)}(x)$ και $y_{\varepsilon\iota\delta\,(2)}(x)$ είναι ειδικές λύσεις της (2.1) τότε η διαφορά τους, $y_{\varepsilon\iota\delta\,(1)}(x) - y_{\varepsilon\iota\delta\,(2)}(x)$, είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \qquad (2.2)$$

Μπορείτε να το αποδείξετε;

<u>Πρόταση 2.2</u>: Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (2.2) και $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ είναι μία ειδική λύση της (2.1), να δειχθεί ότι η γενική λύση της (2.1) είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x) \qquad (2.3)$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $y(x)$ μία τυχαία λύση της (2.1) τότε βάσει της πρότασης 2.1, $y(x) - y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$, είναι λύση της (2.2). Άρα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, έτσι ώστε $y(x) - y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Επομένως, η τυχαία λύση γράφεται: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ (α)

Εφόσον $y(x)$ είναι μία τυχαία λύση της (2.1) έπεται ότι κάθε λύση της μπορεί να γραφεί στην μορφή (α). Επομένως, η γενική λύση της (2.1) είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x).$$

<u>Παρατήρηση 2.1</u>: Η γενική λύση της (2.1) είναι η υπέρθεση της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μίας ειδικής λύσης της μη ομογενούς. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα που αφορούν τη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση 1$^{\text{ης}}$ τάξης. Η τεχνική ανάλυσης της λύσης σε τμήματα ονομάζεται ***<u>αρχή της υπέρθεσης</u>*** για τις μη ομογενείς ΔΕ και μπορεί πάντα να εφαρμοστεί στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Αν ο μη ομογενής όρος $g(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)$, δηλαδή αποτελεί άθροισμα k το πλήθος όρων, τότε το πρόβλημα $L[y] = g(x)$ μπορεί να αναλυθεί στα υποπροβλήματα: $L[y] = 0, L[y] = g_i(x), i = 1,2 \dots k$, δηλαδή μία ομογενή διαφορική εξίσωση και k μη ομογενείς εξισώσεις. Επιλύουμε τις εξισώσεις αυτές και στη συνέχεια προσθέτουμε τη λύση της ομογενούς και τις ειδικές λύσεις $y_{\varepsilon\iota\delta\,(i)}$ των k μη ομογενών εξισώσεων. Έτσι καταλήγουμε στη γενική λύση της εξίσωσης (2.1), που είναι: $y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + \sum_{i=1}^{k} y_{\varepsilon\iota\delta\,(i)}(x)$.

Παράδειγμα: Αν δίνεται η ΔΕ: $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 3e^{2t} - 8e^t\cos 2t$

Τότε διασπώντας το δεξί μέλος της εξίσωσης λαμβάνουμε τις δύο εξισώσεις:

$$y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 3e^{2t}$$

$$y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = -8e^t\cos 2t$$

Λύσεις αυτών των δύο εξισώσεων είναι: $y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$ και $y(t) = \frac{10}{13}e^t cos2t + \frac{2}{13}e^t sin2t$ αντίστοιχα. Επομένως, μια ειδική λύση της ΔΕ είναι το άθροισμα τους, το οποίο προστιθέμενο στην γενική λύση της ομογενούς μας δίνει την γενική λύση της ΔΕ.

Αρκεί λοιπόν η γνώση μιας ειδικής λύσης της (2.1) και του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της (2.2) για να προσδιορίσουμε τη γενική λύση της (2.1). Για να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς ακολουθούμε μία από τις επόμενες δύο μεθόδους, ανάλογα με τη μορφή των συντελεστών της εξίσωσης και του μη ομογενούς όρου.

Μέθοδοι προσδιορισμού μιας ειδικής λύσης

α) Η μέθοδος της *μεταβολής των παραμέτρων ή μέθοδος Lagrange*

Η μέθοδος αυτή αφορά την γενική περίπτωση κατά την οποία οι συντελεστές και ο μη ομογενής όρος της εξίσωσης (2.1) είναι πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις, εν γένει μη σταθερές. Η βασική ιδέα είναι να αντικατασταθούν οι σταθερές c_1 και c_2 της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς με μεταβλητές συναρτήσεις, με την ελπίδα να βρεθεί μία ειδική λύση της εξίσωσης (2.1). Υποθέτουμε λοιπόν ότι η ειδική λύση είναι της μορφής:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \qquad (α1)$$

Αντικαθιστούμε την (α1) στη ΔΕ (2.1) και έχουμε

$$(u_1y_1 + u_2y_2)'' + p(x)(u_1y_1 + u_2y_2)' + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \Rightarrow$$
$$(u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_1y_1' + u_2y_2')' + p(x)(u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x)$$

Θεωρούμε ότι: $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ (α2.1)

οπότε από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει

$$(u_1y_1' + u_2y_2')' + p(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \Rightarrow$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'' + p(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \Rightarrow$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + u_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = g(x)$$

Όμως $y_1(x), y_2(x)$ αποτελούν λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς, άρα
$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ και $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$. Επομένως

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x), \qquad (α2.2)$$

Οι συναρτήσεις $u_1(x), u_2(x)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \text{ και } u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x). \qquad (α2)$$

Το σύστημα (α2) έχει μοναδική λύση εφόσον $W(y_1, y_2|x) = W(x) \neq 0$.
Επιλύοντας το σύστημα (α2) ως προς u_1', u_2' και ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx + c_1,\ u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx + c_2. \qquad (α3)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $c_1 = c_2 = 0$, οπότε η ειδική λύση της (2.1) είναι:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx. \qquad (α4)$$

<u>Παρατήρηση (α)1</u>: Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει κατευθείαν τις εξισώσεις του συστήματος (α2) ή τον τύπο (α4).

<u>Παράδειγμα (α)1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$.

<u>Επίλυση</u>: Για την αντίστοιχη ομογενή, υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$, άρα η βάση του χώρου λύσεων της ομογενούς παράγεται από τις συναρτήσεις $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = xe^{-2x}$ με ορίζουσα Wronski $W(x) = e^{-4x}$.
Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης, με την μέθοδο Lagrange, θεωρούμε ότι αυτή έχει τη μορφή:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

όπου οι συναρτήσεις $u_1'(x)$ και $u_2'(x)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του συστήματος (α2):

$$u_1'e^{-2x} + u_2'xe^{-2x} = 0 \text{ και } -2u_1'e^{-2x} + u_2'(1-2x)e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{x^2}.$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα ως προς u_1' και u_2' προκύπτει ότι

$$u_1' = -\frac{1}{x},\ u_2' = \frac{1}{x^2}.$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις (παραλείποντας τις αυθαίρετες σταθερές), έχουμε

$$u_1(x) = -ln|x| \text{ και } u_2(x) = -\frac{1}{x}$$

Επομένως, η ειδική λύση $y_{ειδ}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ είναι:

$$y_{ειδ}(x) = -e^{-2x}ln|x| - xe^{-2x}\left(-\frac{1}{x}\right) = -e^{-2x}ln|x| - e^{-2x}, x \neq 0.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας τον τύπο (α4):

$$y_{ειδ}(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx \Rightarrow$$

$$y_{ειδ}(x) - e^{-2x}\int \frac{xe^{-2x}e^{-2x}}{e^{-4x}x^2}dx + xe^{-2x}\int \frac{e^{-2x}e^{-2x}}{e^{-4x}x^2}dx = -e^{-2x}ln|x| - e^{-2x}, x \neq 0$$

Άρα η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}ln|x| - e^{-2x} =$$

$$(c_1 - 1)e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}ln|x| = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}ln|x|, x \neq 0.$$

(Ο όρος $-e^{-2x}$, αφομοιώνεται στην γενική λύση της ομογενούς).

<u>Παράδειγμα (α)2</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ:

$x^2(1-lnx)y'' + xy' - y = \frac{(1-lnx)^2}{x}, x > e$ αν $y_1(x) = x$, είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

<u>Επίλυση</u>: Γνωρίζοντας την λύση $y_1(x) = x$ της αντίστοιχης ομογενούς:

$x^2(1-lnx)y'' + xy' - y = 0$, εφαρμόζουμε την μέθοδο υποβιβασμού τάξης για να προσδιορίσουμε μία δεύτερη λύση $y_2(x)$, έτσι ώστε το ζεύγος $\{y_1(x), y_2(x)\}$ να αποτελεί ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς.

Θέτοντας $y_2(x) = u(x)y_1 \Rightarrow y_2 = u\,x \Rightarrow y_2' = u'x + u \Rightarrow y_2'' = u''x + 2u'$ και αντικαθιστώντας στην ομογενή ΔΕ παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$x^3(1-lnx)u'' + (2x^2(1-lnx) + x^2)u' = 0 \Rightarrow u'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x(lnx-1)}\right)u' = 0$. Με την αντικατάσταση $u' = v$ οδηγούμαστε σε μία γραμμική ομογενή ΔΕ 1ης τάξης ως προς v, της οποίας μία λύση είναι η $v(x) = x^{-2}(lnx - 1)$. Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προσδιορίζουμε την συνάρτηση $u(x) = -x^{-1}lnx$. Άρα $y_2(x) = u(x)y_1 = -lnx$. Επομένως, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι: $y_{γεν}^{ομ}(x) = c_1x + c_2lnx$.

Για την εύρεση της μερικής λύσης θεωρούμε ότι $y_{ειδ}(x) = u_1(x)x + u_2(x)lnx$.

Η ορίζουσα Wronski των $\{y_1(x), y_2(x)\}$ είναι $W(x) = \begin{vmatrix} x & lnx \\ 1 & 1/x \end{vmatrix} = 1 - lnx \neq 0, x > e$

Από τις σχέσεις (α3): $u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx + c_1,\ u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx + c_2$, με $c_1 = c_2 = 0$

έχουμε: $u_1(x) = -\int \frac{lnx}{(1-lnx)}\frac{(1-lnx)}{x^3}dx = -\int \frac{lnx}{x^3}dx = \frac{lnx}{2x^2} + \frac{1}{4x^2}$

και $u_2(x) = \int \frac{x}{(1-lnx)}\frac{(1-lnx)}{x^3}dx = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}$

Επομένως : $y_{ειδ}(x) = x\left(\frac{lnx}{2x^2} + \frac{1}{4x^2}\right) + lnx\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1-2lnx}{4x}$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y_{γεν}^{μη\ ομ}(x) = c_1x + c_2lnx + \frac{1-2lnx}{4x}$.

<u>Προσοχή:</u> Όταν επικαλούμαστε το σύστημα (α2) ή τις σχέσεις (α3), (α4) για να προσδιορίσουμε την ειδική λύση θα πρέπει η συνάρτηση $g(x)$ να είναι αυτή που αντιστοιχεί στην κανονική (λυμένη μορφή) της δοθείσης ΔΕ.

<u>Παράδειγμα (α)3</u>: Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'' + y = \frac{sinx}{cos^2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

<u>Επίλυση</u>: Ο μη ομογενής όρος $g(x) = \frac{sinx}{cos^2x}$ δεν ορίζεται για $x = \pm(2\kappa + 1)\frac{\pi}{2}, \kappa = 0,1,2 \ldots$
Εφόσον το $x_o = 0$, το διάστημα για το οποίο το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας εξασφαλίζει ότι θα υπάρχει μοναδική λύση στο ΠΑΤ είναι το διάστημα $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
Για την αντίστοιχη ομογενή, υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$, άρα η βάση του χώρου λύσεων της ομογενούς παράγεται από τις συναρτήσεις $y_1(x) = cosx$, $y_2(x) = sinx$ με ορίζουσα Wronski $W(x) = 1$. Εφαρμόζοντας απευθείας τον τύπο (α4):

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx \Rightarrow$$

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -cosx\int sinx\frac{sinx}{cos^2x}\,dx + sinx\int cosx\frac{sinx}{cos^2x}dx =$$

$$= -cosx\int \frac{sin^2x}{cos^2x}\,dx + sinx\int \frac{sinx}{cosx}dx = -cosx\int \frac{1 - cos^2x}{cos^2x}dx - sinx\int \frac{(cosx)'}{cosx}dx =$$

$-cosx\int(tanx)'\,dx + xcosx - sinx\,ln(cosx) = -\,sinx + xcosx - sinx\,ln(cosx)$.
Η απόλυτος τιμή στον όρο $ln(cosx)$ δεν χρειάζεται διότι $cosx > 0$ για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1cosx + c_2sinx - sinx + xcosx - sinx\,ln(cosx) =$$
$$= c_1cosx + c_2sinx + xcosx - sinx\,ln(cosx)$$

Παραγωγίζουμε την γενική λύση και έχουμε

$$y'(x) = -c_1sinx + c_2cosx + cosx - xsinx - cosx\,ln(cosx) + \frac{sin^2x}{cosx}$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = c_1 = 0,\ y'(0) = c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$$

Επομένως η λύση στο ΠΑΤ είναι:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -sinx + xcosx - sinx\,ln(cosx), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Σημείωση: Μία ειδική λύση της ΔΕ: $L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$ δίνεται και στη μορφή

$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -y_1(x)\int_{x_o}^{x}\frac{y_2(t)g(t)}{W(t)}dt + y_2(x)\int_{x_o}^{x}\frac{y_1(t)g(t)}{W(t)}dt = \int_{x_o}^{x}\frac{[y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)]}{W(t)}g(t)dt$ (α5)

όπου x_o οποιοδήποτε κατάλληλο σημείο του πεδίου ορισμού των συντελεστών και του μη ομογενούς όρου της ΔΕ.
Η $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ που δίνεται από τη σχέση (α5) αποτελεί τη λύση του ΠΑΤ:

$$L[y] = g(x), y(x_o) = 0, y'(x_o) = 0.$$

Με εφαρμογή του τύπου (α5) στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = -cosx\int_0^x \frac{sin^2t}{cos^2t}\,dt + sinx\int_0^x \frac{sint}{cost}\,dt = -cosx[tanx - x]_0^x - sinx[ln(cosx)]_0^x =$$

$-cosx(tanx - x) - sinx\,ln(cosx) = -sinx + xcosx - sinx\,ln(cosx)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
που είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που προσδιορίστηκε εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στη γενική λύση της ΔΕ.

β) Η μέθοδος των *προσδιοριστέων συντελεστών*

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών εφαρμόζεται σε ΔΕ με σταθερούς συντελεστές της μορφής:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x), \qquad (\beta 1)$$

στη περίπτωση που ο μη ομογενής όρος, $g(x)$, ανήκει σε μία ευρεία αλλά συγκεκριμένη κλάση συναρτήσεων της μορφής:

$$g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x) + Q_m(x)sin(\beta x)\} \qquad (\beta 2)$$

όπου $P_n(x)$ και $Q_m(x)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n και m αντίστοιχα. Οι παράμεροι ρ και β καθώς και όλοι οι συντελεστές των πολυωνύμων είναι γνωστοί και προφανώς μπορεί να μηδενίζονται κάποιοι από αυτούς, οδηγώντας σε απλούστερες εκδοχές για τη διέγερση. Η φιλοσοφία της μεθόδου είναι να αναζητηθεί ειδική λύση που 'μιμείται' τη διέγερση και έχει τη μορφή

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = x^s e^{\rho x}\{A_N(x)cos(\beta x) + B_N(x)sin(\beta x)\} \qquad (\beta 3)$$

όπου τα πολυώνυμα $A_N(x)$ και $B_N(x)$ με $N = max\{n, m\}$ δίνονται από τις εκφράσεις

$$A_N(x) = A_N x^N + A_{N-1}x^{N-1} + \cdots + A_1 x + A_o$$

$$B_N(x) = B_N x^N + B_{N-1}x^{N-1} + \cdots + B_1 x + B_o$$

και όλοι οι συντελεστές τους είναι πλέον άγνωστες ποσότητες προς προσδιορισμό, έτσι ώστε η αναπαράσταση (β3) να είναι όντως ειδική λύση της (2.1). Στην έκφραση (β3) υπάρχει και ο παράγοντας x^s που διαφοροποιείται από τη διαδικασία της πλήρους 'μίμησης' που προαναφέρθηκε. Η παράμετρος s είναι η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται, ως ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, η παράμετρος $\rho + i\beta$. Όταν η παράμετρος $\rho + i\beta$ δεν είναι ρίζα της ΧΕ λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι μηδενική-και συνεπώς δεν υπάρχει ο όρος x^s-ενώ αν είναι απλή ή διπλή ρίζα τότε $s = 1$, ή 2 αντίστοιχα.

<u>**Παράδειγμα (β)1**</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y'' - y' + y = x^2$.
<u>Επίλυση</u>: Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$.
<u>*Λύση ομογενούς*</u>: Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ: $y'' - y' + y = 0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Οπότε η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\, cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\, sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

<u>*Προσδιορισμός μίας ειδικής λύσης*</u>: Ο μη ομογενής όρος που δίνεται είναι x^2 και προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x) + Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho = 0$, $\beta = 0$ και $P_n(x) = x^2$. Επομένως, η παράμετρος $\rho + i\beta$ είναι ίση με μηδέν και το μηδέν <u>δεν αποτελεί ρίζα</u> της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς. Εφόσον ο μη ομογενής όρος είναι ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, η υποψήφια ειδική λύση θα είναι ένα πλήρες πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, δηλαδή:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_o.$$

Στη μορφή αυτή δεν συμπεριλαμβάνεται ο όροςx^s, διότι το $\rho + i\beta = 0$, <u>δεν είναι ρίζα</u> της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, και επομένως $s = 0$, άρα $x^0 = 1$.

Υπολογίζουμε τις απαραίτητες παραγώγους της $y_{ειδ}\,(x)$και αντικαθιστούμε στη ΔΕ, οπότε προκύπτει:

$$A_2x^2+(A_1-2A_2)x+2A_2-A_1+A_o=x^2$$

Η ισχύς της τελευταίας σχέσης επιβάλλεται σε όλα τα x με αποτέλεσμα να έχουμε αντιστοίχηση συντελεστών ως ακολούθως:

$$A_2=1, \qquad A_1-2A_2=0, \qquad 2A_2-A_1+A_o=0$$

Επιλύοντας τις τελευταίες σχέσεις για τους άγνωστους συντελεστές $A_i, i=0{,}1{,}2$ βρίσκουμε ότι $A_2=1, A_1=2, A_o=0$, οπότε: $y_{ειδ}\,(x)=x^2+2x$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}\,(x)=y_{γεν}^{ομ}\,(x)+y_{ειδ}\,(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+x^2+2x$$

Παρατήρηση (β)1: i) Αν είχαμε την ΔΕ: $y''-y'=x^2$ τότε η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ είναι $y''-y'=0$. Υποθέτοντας λύσεις αυτής της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0$ και $\lambda_2=1$ και η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι: $y_{γεν}^{ομ}\,(x)=c_1+c_2e^x$.

Για το προσδιορισμό της ειδικής λύσης, παρατηρούμε ότι ο μη ομογενής όρος είναι x^2 και επομένως θα πρέπει να υποθέσουμε ως $y_{ειδ}\,(x)$ ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού. Όμως σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός $\rho+i\beta=0$, είναι μία φορά ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, οπότε η υποψήφια ειδική λύση θα περιλαμβάνει τον όρο x^s με $s=1$. Άρα

$$y_{ειδ}\,(x)=x(A_2x^2+A_1x+A_o).$$

Παραγωγίζοντας την $y_{ειδ}\,(x)$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ βρίσκουμε ότι: $A_2=-\frac{1}{3}, A_1=-1, A_o=-2$. Άρα η ειδική λύση είναι: $y_{ειδ}\,(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2-2x$.

Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}\,(x)=y_{γεν}^{ομ}\,(x)+y_{ειδ}\,(x)=c_1+c_2e^x-\frac{1}{3}x^3-x^2-2x.$$

ii) Αν είχαμε την ΔΕ: $y''=x^2$ τότε η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ είναι: $y''=0$. Υποθέτοντας λύσεις αυτής της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$ και η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι: $y_{γεν}^{ομ}\,(x)=c_1e^{0x}+c_2xe^{0x}=c_1+c_2x$.

Για το προσδιορισμό της ειδικής λύσης, παρατηρούμε ότι ο μη ομογενής όρος είναι x^2 και επομένως θα πρέπει να υποθέσουμε ως $y_{ειδ}\,(x)$ ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού. Όμως σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός $\rho+i\beta=0$, είναι δύο φορές ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, οπότε η υποψήφια ειδική λύση θα περιλαμβάνει τον όρο x^s με $s=2$. Άρα η ειδική λύση θα έχει την μορφή:

$$y_{ειδ}\,(x)=x^2(A_2x^2+A_1x+A_o).$$

Παραγωγίζοντας τη μορφή αυτή και αντικαθιστώντας στη ΔΕ βρίσκουμε ότι: $A_2=\frac{1}{12}, A_1=0, A_o=0$. Άρα η ειδική λύση είναι: $y_{ειδ}\,(x)=\frac{1}{12}x^4$.

Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}\,(x)=y_{γεν}^{ομ}\,(x)+y_{ειδ}\,(x)=c_1+c_2x+\frac{1}{12}x^4.$$

Υπόδειξη: Επιβεβαιώστε τις λύσεις των περιπτώσεων (i) και (ii) επιλύοντας τις διαφορικές εξισώσεις με διαφορετικό τρόπο. Για την (i), θα θέσετε $y'=u$, οπότε θα έχετε μία μη ομογενή γραμμική ΔΕ 1^{ης} τάξης και για την (ii) θα προβείτε σε άμεση ολοκλήρωση.

Παράδειγμα (β)2: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''+4y'+4y=3xe^{-2x}$.

Επίλυση: Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y_{γεν}^{μη\ ομ}\,(x)=y_{γεν}^{ομ}\,(x)+y_{ειδ}\,(x)$.

Λύση ομογενούς: Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ: $y'' + 4y' + 4y = 0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Οπότε η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Προσδιορισμός μίας ειδικής λύσης: Ο μη ομογενής όρος που δίνεται είναι $3xe^{-2x}$ και προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x) + Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho = -2, \beta = 0$ και $P_n(x) = 3x$. Επομένως, η παράμετρος $\rho + i\beta = -2$ και το -2 είναι ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς με πολλαπλότητα δύο. Εφόσον ο μη ομογενής όρος είναι $3xe^{-2x}$, δηλαδή το γινόμενο ενός πολυωνύμου 1[ου] βαθμού επί την εκθετική συνάρτηση e^{-2x}, η υποψήφια ειδική λύση θα είναι ένα πλήρες πολυώνυμο 1[ου] βαθμού επί την εκθετική συνάρτηση e^{-2x}, όμως θα περιλαμβάνει και τον όρο x^2, $(s = 2)$ δηλαδή:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = x^2(A_1 x + A_o)e^{-2x}.$$

Υπολογίζουμε τις απαραίτητες παραγώγους της $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$και αντικαθιστούμε στη ΔΕ, οπότε προκύπτει:

$$6A_1 x + 2A_o = 3x$$

Η ισχύς της τελευταίας σχέσης επιβάλλεται σε όλα τα x με αποτέλεσμα να έχουμε αντιστοίχηση συντελεστών ως ακολούθως

$$A_1 = 1/2, \; A_o = 0.$$

Επομένως, η ειδική λύση είναι: $y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = \frac{1}{2}x^3 e^{-2x}$.

Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x^3 e^{-2x}.$$

Παρατήρηση (β)2: Αν στο παραπάνω πρόβλημα ο μη ομογενής όρος ήταν $3xe^{-x}$ τότε αυτός προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x) + Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho = -1, \beta = 0$ και $P_n(x) = 3x$. Επομένως, η παράμετρος $\rho + i\beta = -1$ και το -1 δεν είναι ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, οπότε η μορφή της υποψήφιας λύσης (με $s = 0$) θα είναι: $y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = (A_1 x + A_o)e^{-x}$.

Παράδειγμα (β)3: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y'' - 2y' - 3y = 5sin3x$.

Επίλυση: Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$.

Λύση ομογενούς: Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ: $y'' - 2y' - 3y = 0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$. Οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$. Οπότε η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

Προσδιορισμός μίας ειδικής λύσης: Ο μη ομογενής όρος που δίνεται είναι $5sin3x$ και προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x) + Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho = 0, \beta = 3$ και $P_n(x) = 0, \; Q_m(x) = 5$. Επομένως, η παράμετρος $\rho + i\beta = 3i$, και το $3i$ δεν είναι ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς. Εφόσον ο μη ομογενής όρος είναι $5sin3x$, δηλαδή το γινόμενο ενός πολυωνύμου 0[ου] βαθμού επί την τριγωνομετρική συνάρτηση $sin3x$, η υποψήφια ειδική λύση θα περιλαμβάνει και τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις[(*)], με συντελεστές πολυώνυμα 0[ου] βαθμού. Ο αριθμός $s = 0$, οπότε

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = Acos3x + Bsin3x.$$

Υπολογίζουμε τις απαραίτητες παραγώγους και αντικαθιστούμε στη ΔΕ, οπότε προκύπτει:

$$(-12A - 6B)cos3x + (-12B + 6A)sin3x = 5sin3x.$$

Η ισχύς της τελευταίας σχέσης επιβάλλεται σε όλα τα x με αποτέλεσμα να έχουμε αντιστοίχηση συντελεστών ως ακολούθως

$$-12A-6B=0,\ -12B+6A=5.$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα για τις σταθερές A και B, έχουμε την ειδική λύση

$$y_{ειδ}(x)=\frac{1}{6}cos3x-\frac{1}{3}sin3x.$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{6}cos3x-\frac{1}{3}sin3x.$$

(*) Όταν ο μη ομογενής όρος περιέχει μία από τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις $cos\beta x$ ή $sin\beta x$, στην υποψήφια ειδική λύση θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ώστε να λάβουμε υπόψη ότι η ειδική λύση (η απόκριση του συστήματος στην εξωτερική διέγερση), ενδεχομένως να μη είναι σε φάση με τον μη ομογενή όρο (τη διέγερση), όπως προκύπτει και στο παραπάνω παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα (β)4</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y''+y=xcosx+sinx$.

<u>Επίλυση</u>: Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y_{γεν}^{μη\ ομ}(x)=y_{γεν}^{ομ}(x)+y_{ειδ}(x)$.

<u>Λύση ομογενούς</u>: Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ: $y''+y=0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2+1=0$. Οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$. Οπότε η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_{γεν}^{ομ}(x)=c_1cosx+c_2sinx.$$

<u>Προσδιορισμός μίας ειδικής λύσης</u>: Ο μη ομογενής όρος που δίνεται είναι: $xcosx+sinx$ και προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x)=e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x)+Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho=0$, $\beta=1$ και $P_n(x)=x,\ Q_m(x)=1$.

Εφόσον στο μη ομογενή όρο που δίνεται τα πολυώνυμα: $P_n(x)=x$ και $Q_m(x)=1$ είναι 1ου και 0ου βαθμού αντίστοιχα, στην μορφή της ειδικής λύσης, θα πρέπει να θεωρήσουμε το γινόμενο ενός πολυωνύμου $A_N(x)$ επί το $cosx$ συν το γινόμενο ενός πολυωνύμου$B_N(x)$ επί το $sinx$, όπου $N=max\{0,1\}=1$. Επίσης, η παράμετρος $\rho+i\beta=i$, και το i <u>είναι μία φορά ρίζα</u> της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, άρα $s=1$. Επομένως, η υποψήφια ειδική λύση θα είναι:

$$y_{ειδ}(x)=x[(A_1x+A_o)cosx+(B_1x+B_o)sinx].$$

Υπολογίζουμε τις απαραίτητες παραγώγους και αντικαθιστούμε στη ΔΕ, οπότε προκύπτει:

$$(2A_1+B_o)cosx+(2B_1-2A_o)sinx-4A_1xsinx+4B_1xcosx=xcosx+sinx.$$

Η ισχύς της τελευταίας σχέσης επιβάλλεται σε όλα τα x με αποτέλεσμα να έχουμε αντιστοίχηση συντελεστών ως ακολούθως

$$2A_1+B_o=0,\ 2B_1-2A_o=1,\ -4A_1=0,\ 4B_1=1.$$

Η ειδική λύση που ανακύπτει έχει τη μορφή: $y_{ειδ}(x)=-\frac{1}{4}xcosx+\frac{1}{4}x^2sinx.$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x)=c_1cosx+c_2sinx-\frac{1}{4}xcosx+\frac{1}{4}x^2sinx.$

<u>Παράδειγμα (β)5</u>: Να λυθεί το Π.Α.Τ.: $y''-2y'+2y=e^xsin^2\left(\frac{x}{2}\right), y(0)=0, y'(0)=0.$

<u>Επίλυση</u>: Ο μη ομογενής όρος δεν είναι της μορφής που μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών. Επικαλούμενοι όμως την τριγωνομετρική σχέση $2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1-cosx$, ο μη ομογενής όρος γράφεται: $\frac{e^x}{2}-\frac{e^xcosx}{2}$. Με βάση την αρχή της υπέρθεσης (*Παρατήρηση 2.1*) η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x)=y_{γεν}^{ομ}(x)+y_{ειδ\,(1)}(x)+y_{ειδ\,(2)}(x),$$

όπου $y_{ειδ\,(1)}(x)$ και $y_{ειδ\,(2)}(x)$ είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων: $L[y] = \frac{e^x}{2}$ και $L[y] = -\frac{e^x cosx}{2}$ αντίστοιχα.

Λύση ομογενούς: Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ: $y'' - 2y' + 2y = 0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$. Οπότε η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_{γεν}^{ομ}(x) = e^x(c_1 cosx + c_2 sinx).$$

Προσδιορισμός μίας ειδικής λύσης:

-Στη ΔΕ: $L[y] = \frac{e^x}{2}$, ο μη ομογενής όρος προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x) + Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho = 1, \beta = 0$ και $P_n(x) = 1/2$. Η υποψήφια ειδική λύση θα είναι το γινόμενο της εκθετικής συνάρτησης e^x επί μία σταθερά. Η παράμετρος $\rho + i\beta$ είναι ίση με 1 και δεν είναι ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, άρα $s = 0$. Επομένως η υποψήφια ειδική λύση θα είναι της μορφής:

$$y_{ειδ\,(1)}(x) = Ae^x.$$

Αντικαθιστώντας στην ΔΕ $L[y] = \frac{e^x}{2}$, προκύπτει ότι $A = \frac{1}{2}$. Επομένως, $y_{ειδ\,(1)}(x) = \frac{1}{2}e^x$.

-Στη ΔΕ: $L[y] = -\frac{e^x cosx}{2}$, ο μη ομογενής όρος προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x) + Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho = 1, \beta = 1, P_n(x) = 1/2$ και $Q_m(x) = 0$. Η υποψήφια ειδική λύση θα είναι το γινόμενο της εκθετικής συνάρτησης e^x επί το άθροισμα των γινομένων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $cosx$ και $sinx$ επί μία σταθερά έκαστη. Η παράμετρος $\rho + i\beta$ είναι ίση με $1 + i$ και είναι μία φορά ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, άρα $s = 1$. Επομένως η υποψήφια ειδική λύση θα είναι της μορφής:

$$y_{ειδ\,(2)}(x) = xe^x(Acosx + Bsinx).$$

Αντικαθιστώντας στην ΔΕ: $L[y] = -\frac{e^x cosx}{2}$, προκύπτει ότι $A = 0, B = -\frac{1}{4}$, άρα

$$y_{ειδ\,(2)}(x) = -\frac{1}{4}xe^x sinx.$$

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x) = e^x(c_1 cosx + c_2 sinx) + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}xe^x sinx.$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στην γενική λύση έχουμε: $y(0) = c_1 + \frac{1}{2} = 0$ και

$$y'(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0, \text{ άρα } c_1 = -\frac{1}{2} \text{ και } c_2 = 0.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των c_1, c_2 βρίσκουμε τη λύση στο Π.Α.Τ.:

$y(x) = -\frac{1}{2}e^x cosx + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}xe^x sinx.$

Παράδειγμα (β)6: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2} + sin2x.$

Επίλυση: Ο μη ομογενής όρος είναι το άθροισμα δύο όρων. Ο 1ος όρος, $\frac{e^{2x}}{x^2}$, δεν είναι της μορφής που μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών και επομένως η ειδική λύση που αντιστοιχεί στον όρο αυτό θα προσδιορισθεί αναγκαστικά με την μέθοδο Lagrange. Για τον 2ο όρο, $sin2x$, ο προσδιορισμός της ειδικής λύσης δύναται να γίνει και με τις δύο μεθόδους. Η περίπτωση μίας τέτοιας ΔΕ καλείται ***μεικτή*** περίπτωση. Με βάση την αρχή της υπέρθεσης (*Παρατήρηση 2.1*) η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x) = y_{γεν}^{ομ}(x) + y_{ειδ\,(1)}(x) + y_{ειδ\,(2)}(x),$$

όπου $y_{ειδ\,(1)}(x)$ και $y_{ειδ\,(2)}(x)$ είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων: $L[y]=\frac{e^{2x}}{x^2}$ και $L[y]=sin2x$ αντίστοιχα.

Λύση ομογενούς: Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ: $y''-4y'+4y=0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ομογενή ΔΕ παίρνουμε την ΧΕ: $\lambda^2-4\lambda+4=0$. Οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1=\lambda_2=2$. Επομένως η γενική λύση είναι:

$$y_{γεν}^{ομ}(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}.$$

Προσδιορισμός μίας ειδικής λύσης:

-Στη ΔΕ: $L[y]=\frac{e^{2x}}{x^2}$, η ειδική λύση είναι: $y_{ειδ\,(1)}(x)=u_1(x)e^{2x}+u_2(x)xe^{2x}$, όπου $u_1(x)=-\int\frac{xe^{2x}}{e^{4x}}\frac{e^{2x}}{x^2}dx=-ln|x|$ και $u_2(x)=\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}}\frac{e^{2x}}{x^2}dx=-\frac{1}{x}$

Άρα $y_{ειδ\,(1)}(x)=-e^{2x}ln|x|-e^{2x}$

-Στη ΔΕ: $L[y]=sin2x$, ο μη ομογενής όρος προκύπτει από την γενική μορφή: $g(x)=e^{\rho x}\{P_n(x)cos(\beta x)+Q_m(x)sin(\beta x)\}$ αν σε αυτή θέσουμε $\rho=0$, $\beta=2$, $P_n(x)=0$, $Q_m(x)=1$. Η παράμετρος $\rho+i\beta$ είναι ίση με $2i$ και <u>δεν είναι ρίζα</u> της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, άρα $s=0$. Επομένως η υποψήφια ειδική λύση θα είναι της μορφής:

$$y_{ειδ\,(2)}(x)=Acos2x+Bsin2x.$$

Υπολογίζουμε τις απαραίτητες παραγώγους και αντικαθιστούμε στη ΔΕ: $L[y]=sin2x$, οπότε προκύπτει:

$$-4Acos2x-4Bsin2x-4(-2Asin2x+2Bcos2x)+4(Acos2x+Bsin2x)=sin2x\Rightarrow$$

$$8Asin2x-8Bcos2x=sin2x\Rightarrow A=\frac{1}{8},B=0$$

Άρα

$$y_{ειδ\,(2)}(x)=\frac{1}{8}cos2x.$$

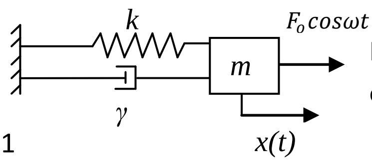
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}-e^{2x}ln|x|-e^{2x}+\frac{1}{8}cos2x=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}-e^{2x}ln|x|+\frac{1}{8}cos2x.$

<u>Παρατήρηση</u>: Για τον 2^{ο} όρο, $sin2x$, ο προσδιορισμός της ειδικής λύσης μπορεί να γίνει και με τη μέθοδο Lagrange. Όμως η μέθοδος Lagrange θα οδηγήσει σε πολύπλοκες ολοκληρώσεις, ενώ η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών είναι απλούστερη.

Εφαρμογή-Μηχανικές ταλαντώσεις (Εξαναγκασμένη ταλάντωση)

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη της κίνησης ενός σώματος μάζας m, το οποίο προσαρτάται σε ένα ελατήριο σταθεράς k και σε κάποιον αποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης γ, όπως φαίνεται στο Σχ. 1. Στο σώμα επιβάλλεται εξωτερική αρμονική δύναμη της μορφής $F(t)=F_o cos\omega t$. Να υπολογισθεί η μετατόπιση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου. Θεωρείστε την περίπτωση $0<\gamma^2<4km$.



Σχ.1

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι: $mx''(t)+\gamma x'(t)+kx(t)=F_o cos\omega t$ (1)

Την χρονική στιγμή $t=0$, θεωρούμε ότι το σώμα έχει μία μετατόπιση x_o από την θέση ισορροπίας και μία ταχύτητα v_o. Άρα οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x(0)=x_o$ και $x'(0)=v_o$.

<u>Επίλυση:</u> Η γενική λύση της ΔΕ είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς συν μία ειδική λύση της μη ομογενούς. Η γενική λύση της ομογενούς έχει προσδιορισθεί στο προηγούμενο παράδειγμα της ελεύθερης ταλάντωσης και είναι:

$$x_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right)\right)$$

Μπορούμε να προσδιρίσουμε μία ειδική λύση για την μη ομογενή με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Η διέγερση είναι μία απλή τριγωνομετρική συνάρτηση και η μόνη μέριμνα είναι να ελέγξουμε αν η παράμετρος $\rho + i\beta = i\omega$ είναι ρίζα της ΧΕ της διαφορικής. Παρατηρούμε όμως ότι για μη μηδενικό συντελεστή απόσβεσης, είναι ανέφικτο να αποτελεί ρίζα της ΧΕ ένας καθαρά φανταστικός αριθμός. Η ειδική λύση θα είναι λοιπόν της μορφής: $x_{\varepsilon\iota\delta}(t) = Acos\omega t + Bsin\omega t$. Αντικαθιστούμε τη μορφή αυτή στη ΔΕ (1) και βρίσκουμε ότι:

$$\{(k-m\omega^2)A + B\omega\gamma\}cos\omega t + \{(k-m\omega^2)B - A\omega\gamma\}sin\omega t = F_o cos\omega t$$

Καταλήγουμε στο αλγεβρικό σύστημα: $\begin{bmatrix}(k-m\omega^2) & \omega\gamma \\ -\omega\gamma & (k-m\omega^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A \\ B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_o \\ 0\end{bmatrix}$

με λύσεις $A = \frac{F_o(k-m\omega^2)}{\Delta}, B = \frac{F_o\omega\gamma}{\Delta}$, όπου $\Delta = (k-m\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2$. Επικαλούμενοι την γωνία φ με $cos\varphi = \frac{(k-m\omega^2)}{\sqrt{\Delta}}$ και $sin\varphi = \frac{\omega\gamma}{\sqrt{\Delta}}$ μπορούμε να γράψουμε την ειδική λύση στη μορφή: $x_{\varepsilon\iota\delta}(t) = \frac{F_o}{\sqrt{\Delta}}\, cos(\omega t - \varphi)$.

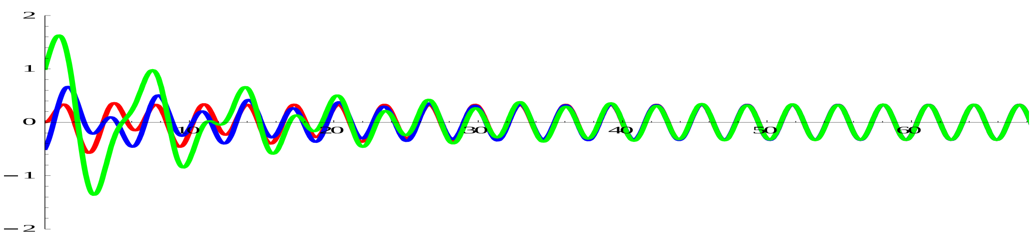
Η γενική λύση είναι:

$$x_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(t) = \underbrace{e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left\{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}t\right)\right\}}_{\text{Μεταβατική λύση}} + \underbrace{\frac{F_o}{\sqrt{\Delta}}\, cos(\omega t - \varphi)}_{\text{Στάσιμη λύση}}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα προσδιορισθούν εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στη γενική λύση, δηλαδή από τις σχέσεις:

$$x(0) = c_1 + \frac{F_o}{\sqrt{\Delta}} cos\,\varphi = x_o, \quad x'(0) = -\frac{\gamma}{2m}c_1 + \frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}c_2 + \frac{F_o\omega}{\sqrt{\Delta}} sin\,\varphi = v_o.$$

Βλέπουμε ότι η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η υπέρθεση της λύσης της ομογενούς η οποία μηδενίζεται καθώς το $t \to \infty$ και μίας περιοδικής λύσης περιόδου $\frac{2\pi}{\omega}$. Η λύση της ομογενούς καλείται ***<u>μεταβατική λύση</u>*** και εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Στη μόνιμη κατάσταση επιζεί μόνο η περιοδική λύση (η ειδική λύση), η οποία δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Από κάποια χρονική στιγμή και μετά, όλα τα χαρακτηριστικά πλέον της κίνησης σχετίζονται αποκλειστικά με τα στοιχεία της διεγείρουσας δύναμης (F_o, ω) και τις φυσικές παραμέτρους του ταλαντωτή (m, γ, k). Η περιοδική λύση αναπαριστά μία ταλάντωση σταθερού πλάτους με την ίδια συχνότητα όπως η εξωτερική δύναμη, και καλείται ***<u>στάσιμη λύση</u>***.



Σχ. 2 Και οι τρεις αρχικές συνθήκες: Κόκκινο: $x(0) = 0, x'(0) = 0$, Μπλε: $x(0) = -0.5, x'(0) = 0.5$, Πράσινο: $x(0) = 1, x'(0) = 1$ οδηγούνται τελικά στην ίδια ταλάντωση $x(t)$ μετά από κάποια μεταβατική περίοδο. Εδώ $\frac{F_o}{m} = 1$, $\omega = 2$, $\omega_o = 1$, $\gamma = 0.2$.

Συντονισμός

Ας δούμε τώρα την εξάρτηση του πλάτους της κίνησης του διεγειρόμενου συστήματος με τη συχνότητα της διέγερσης. Όπως είδαμε παραπάνω το πλάτος της στάσιμης λύσης μεταβάλλεται σύμφωνα με την έκφραση

$$R = R(\omega) = \frac{F_o}{\sqrt{\Delta}} = \frac{F_o}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}} = \frac{F_o}{\sqrt{m^2({\omega_o}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}} \qquad (2)$$

όπου ${\omega_o}^2 = \frac{k}{m}$ η ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Από τη μορφή της έκφρασης αυτής παρατηρεί κανείς ότι για διεγέρσεις χαμηλής συχνότητας, δηλαδή όταν $\omega \to 0$, έχουμε

$$\lim_{\omega\to 0} R(\omega) = \frac{F_o}{k}$$

Το πλάτος είναι όσο θα ήταν η επιμήκυνση του ελατηρίου αν ασκούνταν πάνω του δύναμη ίση με το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης. Είναι αναμενόμενο, εφόσον η συχνότητα της διέγερσης είναι σχεδόν μηδενική η μάζα δέχεται μια σταθερή δύναμη F_o και το ελατήριο επιμηκύνεται αναλόγως.

Από την άλλη πλευρά, αν η συχνότητα της διέγερσης είναι εξαιρετικά μεγάλη, πολύ μεγαλύτερη από τη φυσική συχνότητα του συστήματος ω_o, το πλάτος της ταλάντωσης φθίνει. Από την σχέση (2) έχουμε ότι

$$\lim_{\omega\to \infty} R(\omega) = 0$$

Η δύναμη διέγερσης μεταβάλλεται τόσο γρήγορα που ο ταλαντωτής δεν προλαβαίνει να ανταποκριθεί και να ακολουθήσει την ταχύτατη εναλλαγής της φοράς της δύναμης.

Για ενδιάμεσες τιμές του ω, το πλάτος μπορεί να γίνεται μέγιστο. Θα εξετάσουμε τώρα για ποιες τιμές του ω το πλάτος $R(\omega)$ γίνεται μέγιστο, που συμβαίνει όταν η υπόρριζη ποσότητα γίνει ελάχιστη. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για ***συντονισμό***.

α) Υποθέτουμε ότι $m^2({\omega_o}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2 = 0$, που σημαίνει ότι $\omega\gamma = 0$ και $m({\omega_o}^2 - \omega^2) = 0$. Επειδή, $\omega \neq 0$, θα πρέπει $\gamma = 0$, οπότε η εξίσωση είναι (1) γίνεται:

$$mx''(t) + kx(t) = F_o cos\omega t \qquad (3)$$

Από τη σχέση $({\omega_o}^2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_o = \sqrt{k/m}$, δηλαδή έχουμε συντονισμό όταν η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα του μη αποσβεννύμενου συστήματος και η εξίσωση (3) γίνεται

$$mx''(t) + kx(t) = F_o cos\omega_o t \qquad (4)$$

Μία ειδική λύση της (4) είναι της μορφής:

$x_{\varepsilon\iota\delta}(t) = t(Acos\omega_o t + Bsin\omega_o t) \Rightarrow x'_{\varepsilon\iota\delta}(t) = (A + Bt\omega_o)cos\omega_o t + (B - At\omega_o)sin\omega_o t \Rightarrow$
$x''_{\varepsilon\iota\delta}(t) = (2B\omega_o - At{\omega_o}^2)cos\omega_o t + (-2A\omega_o - Bt{\omega_o}^2)sin\omega_o t.$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (2): $x''(t) + {\omega_o}^2 x(t) = \frac{F_o}{m} cos\omega t$, έχουμε

$$\left(2B\omega_o - At{\omega_o}^2 + At{\omega_o}^2\right)cos\omega_o t + (-2A\omega_o - Bt{\omega_o}^2 + Bt{\omega_o}^2)sin\omega_o t = \frac{F_o}{m} cos\omega t \Rightarrow$$

$B = \frac{F_o}{2m\omega_o}$, $A = 0$. Άρα η ειδική λύση είναι: $x_{\varepsilon\iota\delta}(t) = \frac{F_o}{2m\omega_o} tsin\omega_o t.$

Επομένως, έχουμε μία ταλάντωση της οποίας το πλάτος αυξανομένου του t γίνεται οσοδήποτε μεγάλο.

β) Έστω τώρα ότι $\gamma \neq 0$ (δηλαδή έχουμε αποσβεννύμενο μηχανικό σύστημα). Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του ω η συνάρτηση $N(\omega) = m^2({\omega_o}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2$ γίνεται ελάχιστη. Έχουμε $N'(\omega) = 2m^2({\omega_o}^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2\omega\gamma^2 = 0$ ή για $\omega \neq 0$, η ισοδύναμη σχέση $-2m^2({\omega_o}^2 - \omega^2) + \gamma^2 = 0$, οπότε προκύπτει η ***συχνότητα συντονισμού***

$$\omega = \sqrt{{\omega_o}^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2}} = \omega_\sigma$$

Επειδή $N''(\omega_\sigma) > 0$, έχουμε ότι για $\omega = \omega_\sigma$, ελάχιστη τιμή του $N(\omega)$, και άρα μέγιστη τιμή του $R(\omega)$.
Παρατηρούμε ότι το $\omega_\sigma \rightarrow \omega_o$ καθώς το $\gamma \rightarrow 0$, δηλαδή για μικρή απόσβεση το μέγιστο πλάτος επιτυγχάνεται όταν η συχνότητα διέγερσης είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος ω_o.