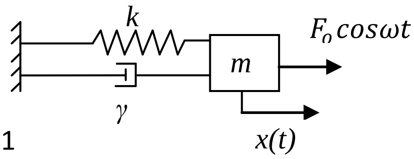
Κεφάλαιο ΙΙ. Συνήθεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Εισαγωγή: Η μελέτη των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης είναι ιδιαίτερης σημασίας για δύο λόγους:

1. Εν γένει, οι γραμμικές ΔΕ διαθέτουν πλούσια θεωρητική δομή και συστηματικές μεθόδους επίλυσης. Η κατανόηση των μεθόδων αυτών είναι εύκολη στις ΔΕ 2ης τάξης, οπότε διατηρώντας τις βασικές ιδέες μπορούμε να τις γενικεύσουμε και σε ΔΕ ανώτερης τάξης.
2. Οι εξισώσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές διότι προκύπτουν σε πολλά προβλήματα της μαθηματικής φυσικής. Ειδικότερα κατά την μοντελοποίηση προβλημάτων όπως:
   - Μηχανικών και ηλεκτρικών ταλαντώσεων
   - Διάδοσης θερμότητας
   - Κυματικής διάδοσης
   - Ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων

   προκύπτουν γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης.

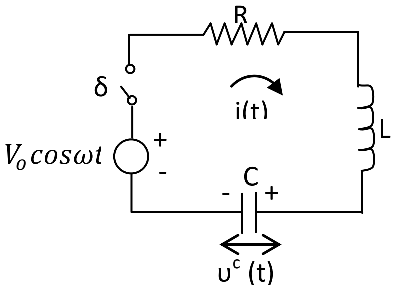
<u>**Παράδειγμα 1:**</u> Η κίνηση ενός σώματος μάζας m, προσδεμένου με ένα ελατήριο σταθεράς k και με έναν αποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης γ, όταν στο σώμα εξασκείται μία αρμονική εξωτερική δύναμη, σχ.1, περιγράφεται από μία ΔΕ 2ης τάξης:



$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = F_o cos\omega t$$

Σχ.1

<u>**Παράδειγμα 2:**</u> Έστω ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με συγκεντρωμένα στοιχεία μια ωμική αντίσταση μέτρου R, έναν πυκνωτή χωρητικότητας C, και ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L, στα άκρα του οποίου επιβάλλεται αρμονική χρονικά ηλεκτρεγερτική δύναμη με τον χρόνο.



Σχ. 2

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μεταβολή της τάσης στον πυκνωτή είναι:

$$L\frac{d^2}{dt^2}\upsilon^c(t) + R\frac{d}{dt}\upsilon^c(t) + \frac{1}{C}\upsilon^c(t) = V_o cos\omega t$$

<u>**Παράδειγμα 3**</u>: Άλλες εξισώσεις που προκύπτουν από την προτυποποίηση άλλων φαινομένων, όπως οι ταλαντώσεις μίας κυκλικής μεμβράνης ή το ηλεκτρικό πεδίο (δυναμικό) σε ένα σφαιρικό πυκνωτή είναι της μορφής:

$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0$ Εξίσωση Bessel

$x^2y''(x) + xp_oy'(x) + q_oy(x) = 0$ Εξίσωση Euler

$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + a(a-1)y(x) = 0$ Εξίσωση Legendre

Μορφή ΣΔΕ 2ης τάξης

- **Γενική (πεπλεγμένη)**: $F(x, y, y', y'') = 0$, όπου F δοσμένη συνάρτηση
- **Κανονική (λυμένη)**: $y'' = f(x, y, y')$, όπου f δοσμένη συνάρτηση

Αν f είναι γραμμική συνάρτηση ως προς y και y', τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

- **Γραμμική μη ομογενής**: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$ (1)

Όπου $p(x), q(x)$ και $g(x)$ γνωστές συνεχείς συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x, σε ένα διάστημα $I = (\alpha, \beta)$.

Οι συναρτήσεις $p(x), q(x)$ είναι οι **συντελεστές** της ΔΕ (εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του υπό μελέτη συστήματος) και $g(x)$ ο **μη ομογενής όρος** της ΔΕ (διέγερση-εξαναγκασμός του συστήματος). Αν $g(x) = 0, \forall x \in I$, τότε έχουμε

- **Γραμμική ομογενής**: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ (2)

Όταν οι συντελεστές είναι τετριμμένες σταθερές συναρτήσεις, ανακύπτουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές (παραδείγματα 1 και 2):

- **Γραμμικές με σταθερούς συντελεστές**:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = \begin{cases} g(x) & \text{μη ομογενής} \\ 0 & \text{ομογενής} \end{cases} \tag{3}$$

όπου a, b είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Αρχικές συνθήκες - Πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

Όταν $p(x), q(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $I = (\alpha, \beta)$ των πραγματικών αριθμών και στο εσωτερικό σημείο x_o του διαστήματος αυτού δίνονται οι συνθήκες: $y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_1$

Τότε δημιουργείται ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$\begin{gathered} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \\ y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_1 \end{gathered} \tag{4}$$

για το οποίο το **θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας (Θ.Υ.Μ.)** μας εξασφαλίζει ότι διαθέτει ακριβώς μία λύση $y(x)$ η οποία ορίζεται σε όλο το διάστημα $I = (\alpha, \beta)$.

<u>**Παράδειγμα 4**</u>: Αν $p(x), q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο I και $x_o \in I$, να προσδιορισθεί η μοναδική λύση στο (Π.Α.Τ.):

$$\begin{gathered} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \\ y(x_o) = 0, \qquad y'(x_o) = 0 \end{gathered}$$

Μία λύση του Π.Α.Τ. είναι η τετριμμένη σταθερή συνάρτηση $y(x) = 0$. Το **Θ.Υ.Μ.** μας εξασφαλίζει ότι αυτή η λύση είναι η μοναδική.

<u>**Παράδειγμα 5**</u>: Να προσδιορισθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο το παρακάτω Π.Α.Τ. είναι βέβαιο ότι έχει μοναδική λύση.

$$\begin{gathered} x(x-4)y''(x) + 3xy'(x) + 4y(x) = 2 \\ y(3) = 0, \qquad y'(3) = -1 \end{gathered}$$

$p(x) = \frac{3}{(x-4)}$, συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 4), (4, \infty)$

$q(x) = \frac{4}{x(x-4)}$, και $g(x) = \frac{2}{x(x-4)}$ συνεχείς στα διαστήματα $(-\infty, 0), (0,4), (4, \infty)$

Επομένως, το μέγιστο ανοικτό διάστημα που περιέχει το αρχικό σημείο $x_o = 3$ και στο οποίο οι συντελεστές είναι συνεχείς συναρτήσεις είναι το $(0,4)$. Άρα σύμφωνα με το **Θ.Υ.Μ.** θα υπάρχει μοναδική λύση του Π.Α.Τ. τουλάχιστον στο ανοικτό διάστημα $(0,4)$.

1. Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης

Εισάγοντας τον γραμμικό διαφορικό τελεστή: $L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$, η ΔΕ:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{1.1}$$

μπορεί να γραφεί σε τελεστική μορφή : $L[y](x) = 0$

<u>**Αρχή της υπέρθεσης:**</u> Αν $y_1(x), y_2(x)$ είναι δύο λύσεις της (1.1) τότε ο γραμμικός συνδυασμός $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ για οποιεσδήποτε τιμές των σταθερών c_1, c_2 είναι λύση της (1.1).

<u>Απόδειξη:</u> Ισχύει $L[y_1](x) = 0$ και $L[y_2](x) = 0$. Επομένως,

$L[c_1\, y_1 + c_2\, y_2](x) = c_1 L[y_1](x) + c_2 L[y_2](x) = 0.$

<u>*Συμπέρασμα:*</u> Η εξίσωση (1.1) διαθέτει χώρο λύσεων που είναι γραμμικός.

<u>**Παράδειγμα 1.1:**</u> Οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}$ είναι λύσεις της ΔΕ:

$y''(x) - y(x) = 0$. Από την αρχή της υπέρθεσης έπεται ότι $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές είναι λύση της ΔΕ.

<u>Σημείωση</u>: Η αρχή της υπέρθεσης <u>δεν ισχύει για μη γραμμικές ΔΕ και για γραμμικές μη ομογενείς ΔΕ</u>. [Π.χ. η $y_1(x) = x + 1$ είναι λύση της ΔΕ: $y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x + 4$, ενώ η $y_2(x) = 2(x + 1)$ δεν είναι λύση της ΔΕ].

Από την αρχή της υπέρθεσης συμπεραίνουμε ότι αν έχουμε δύο λύσεις της (1.1.) τότε έχουμε μία άπειρη οικογένεια (διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών) λύσεων της (1.1).

<u>**Ερώτημα**</u>: Σ' αυτή την άπειρη οικογένεια εμπεριέχονται όλες οι λύσεις της (1.1);

Η απάντηση δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

<u>**Θεώρημα**</u>: Έστω $y_1(x), y_2(x)$ δύο λύσεις της (1.1) και έστω ότι $\exists\, x_o \in I$, τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση: $W(x_o) = y_1(x_o)y_2{}'(x_o) - y_2(x_o)y_1{}'(x_o) \neq 0$, τότε η οικογένεια λύσεων $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές περιλαμβάνει όλες τις λύσεις της ΔΕ (1.1).
<u>Απόδειξη:</u> Έστω $z(x)$ μία τυχαία λύση της ΔΕ η οποία διέρχεται από το σημείο (x_o, y_o), και η κλίση της στο σημείο αυτό είναι $y_o{}'$, δηλαδή ισχύει: $z(x_o) = y_o, z'(x_o) = y_o{}'$.
Θεωρούμε το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} c_1\, y_1(x_o) + c_2\, y_2(x_o) &= y_o \\ c_1\, y_1'(x_o) + c_2\, y_2'(x_o) &= y_o{}' \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Το παραπάνω σύστημα διαθέτει μοναδική μη τετριμμένη λύση ως προς τις σταθερές c_1, c_2, διότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων $W(x_o)$ είναι διάφορη του μηδενός. Έστω ότι η λύση είναι $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση: $y(x) = \tilde{c}_1\, y_1(x) + \tilde{c}_2\, y_2(x)$. Λόγω της αρχής της υπέρθεσης η $y(x)$ είναι λύση της ΔΕ. Επίσης, εφόσον οι σταθερές $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ ικανοποιούν το σύστημα (1.2) η λύση αυτή ικανοποιεί τις ίδιες αρχικές συνθήκες, που ικανοποιεί και η $z(x)$, δηλαδή: $y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_o{}'$. Το Θ.Υ.Μ. μας εξασφαλίζει ότι $y(x) \equiv z(x), \forall x \in I$, συνεπώς η τυχαία λύση $z(x)$, αναπαρίσταται ως γραμμικός συνδυασμός των λύσεων $y_1(x), y_2(x)$. Εφόσον η $z(x)$ είναι μία τυχαία λύση της ΔΕ, έπεται ότι κάθε για κάθε λύση της (1.1) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των λύσεων $y_1(x), y_2(x)$.

Άρα <u>***η γενική λύση***</u> της (1.1) είναι: $y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, (1.3)
με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.
Οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$ ικανοποιούν την προϋπόθεση του θεωρήματος:
$\exists\, x_o \in I{:}\, W(x_o) = \begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) \\ y_1{}'(x_o) & y_2{}'(x_o) \end{vmatrix} \neq 0$, και αυτό αποδείχθηκε καθοριστικό για την επιλυσιμότητα του συστήματος (1.2).
Η συνάρτηση $W(x) = W(\,y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) \end{vmatrix}, \forall x \in I$ καλείται <u>***ορίζουσα Wronski***</u> των $y_i, i = 1{,}2$ και η απαίτηση του μη μηδενισμού της στο σημείο x_o εξασφαλίζει την **γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων** y_1, y_2(*). Όπως θα δείξουμε παρακάτω, αν $\exists\, x_o \in I{:}\, W(\,y_1, y_2)(x_o) \neq 0 \Rightarrow W(\,y_1, y_2)(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Το σύνολο συναρτήσεων $\{y_1, y_2\}$ αποτελεί μία βάση του γραμμικού χώρου των λύσεων της ΔΕ. Συνεπώς, η διάσταση του χώρου είναι ίση με δύο. Όπως και στους απλούς διανυσματικούς χώρους η βάση δεν είναι μοναδική.
Το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ ονομάζεται ***θεμελιώδες σύνολο λύσεων*** της ΔΕ (1.1).

Ισοδύναμες προτάσεις: Τα προηγούμενα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- Το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ είναι ***θεμελιώδες σύνολο λύσεων*** της ΔΕ (1.1).
- Η ορίζουσα ***Wronski των δύο λύσεων είναι διάφορη του μηδενός***
- Τα μέλη του συνόλου $\{y_1, y_2\}$, είναι ***γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις*** της ΔΕ (1.1)

(*) *Σημείωση:* Πράγματι, αν υποτεθεί ότι για δύο-οποιεσδήποτε- συναρτήσεις $f_i(x), x \in I, (i = 1,2)$ ισχύει ό μη μηδενισμός $W(f_1, f_2)(\xi) \neq 0$ σε κάποιο σημείο ξ του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Όμως η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει αν οι συναρτήσεις είναι τυχαίες και δεν συνδέονται με την επιλυσιμότητα κάποιας ΔΕ. Αντίθετα, αν οι συναρτήσεις είναι λύσεις της ΔΕ τότε ισχύει η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή: αν $y_i, i = 1,2$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1.1) στο I, τότε $\exists\, x_o \in I: W(y_1, y_2)(x_o) \neq 0$.

Παράδειγμα 1.2: Οι συναρτήσεις $y_1(x) = cosx, y_2(x) = sinx$ είναι λύσεις της ΔΕ: $y''(x) + y(x) = 0$. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ.
Η ορίζουσα Wronski των δύο λύσεων είναι: $W(x) = \begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \forall x \epsilon \mathbb{R}$.
Επομένως, οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 cosx + c_2\, sinx$, με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 1.3: Οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}$ είναι λύσεις της ΔΕ: $y''(x) - y(x) = 0$. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ.
Η ορίζουσα Wronski των δύο λύσεων είναι: $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \forall x \epsilon \mathbb{R}$.
Επομένως, οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 e^x + c_2\, e^{-x}$, με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.
Οι συναρτήσεις: $u_1(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = coshx$ και $u_2(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = sinhx$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ. Επομένως, η γενική λύση της μπορεί να γραφεί

$$y(x) = c_1 coshx + c_2\, sinhx \text{ με } c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Η ορίζουσα Wronski και οι χρήσεις της

Όπως είδαμε η ορίζουσα Wronski είναι μία πολύ χρήσιμη ποσότητα γιατί ο μηδενισμός της ή μη μηδενισμός της αποτελεί κριτήριο για την γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία ενός ζεύγους λύσεων της ΔΕ (1.1).
Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε και μερικές άλλες χρήσεις της ορίζουσας Wronski που την αναδεικνύουν σε ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο.

- **Θεώρημα του Abel** Αν $y_1(x), y_2(x)$ δύο λύσεις της (1.1), τότε:
  (i) Η ορίζουσα $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$ ικανοποιεί την γραμμική ομογενή ΔΕ 1ης τάξης:
  $W'(x) + p(x)W(x) = 0 => W(x) = ce^{-\int p(x)dx}$ (Τύπος του Abel) (1.4)
  (ii) Εάν $\exists\, x_o \in I: W(y_1, y_2)(x_o) \neq 0 => W(y_1, y_2)(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Απόδειξη:
(i) Έστω $y_i, i = 1,2$, δύο λύσεις της (1.1). Η παράγωγος της ορίζουσας Wronski είναι $W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -p(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - q(x)\cancel{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} = -p(x)W(x)$. Άρα η $W(x)$ ικανοποιεί την γραμμική ομογενή ΔΕ 1ης τάξης: $W'(x) + p(x)W(x) = 0$.
(ii) Επιλύοντας τη παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε: $W(x) = ce^{-\int p(x)dx}$, όπου c αυθαίρετη σταθερά. Αν κατά την επίλυση χρησιμοποιήσουμε κάτω όριο ολοκλήρωσης ένα x_o τότε η λύση γράφετε: $W(x) = W(x_o)e^{-\int_{x_o}^{x} p(s)ds} => W(x): \begin{cases} = 0, \forall x \in I, & αν\ W(x_o) = 0 \\ \neq 0, \forall x \in I, & αν\ W(x_o) \neq 0 \end{cases}$

Συμπέρασμα: Από την σχέση (1.4) έπεται ότι η ορίζουσα Wronski δύο λύσεων της ΔΕ προσδιορίζεται με απροσδιοριστία μίας πολλαπλασιαστικής σταθεράς κατ' ευθείαν από τον συντελεστή $p(x)$ της ΔΕ χωρίς προηγούμενη γνώση των λύσεών της.

Παράδειγμα 1.4: Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski δύο λύσεων της ΔΕ:
$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$
Επίλυση: Από τον τύπο του Abel έχουμε: $W(x) = ce^{-\int p(x)dx}$
Ο συντελεστής $p(x)$ της δοσμένης ΔΕ είναι $p(x) = \frac{1}{x}$ [προσοχή θα πρέπει η ΔΕ να είναι στην κανονική μορφή για να προσδιορίσουμε το συντελεστή $p(x)$].
Επομένως, $W(x) = ce^{-\int \frac{1}{x}dx} = ce^{-lnx} = ce^{ln|x|^{-1}} = \frac{c}{|x|}, x \neq 0.$

- Από τον ορισμό της ορίζουσας Wronski, έχουμε:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} => W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 => \frac{W(x)}{{y_1}^2} = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{{y_1}^2} => \frac{W(x)}{{y_1}^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' =>$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(x)}{{y_1}^2}dx => y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{{y_1}^2}dx = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}dx.$$

Παρατήρηση 1.1: Κατά τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος αγνοήσαμε τις σταθερές ολοκλήρωσης. Αν τις είχαμε κρατήσει, τότε στη θέση της y_2, θα παίρναμε την γενική λύση της ΔΕ.

Συμπέρασμα: Από το γεγονός ότι η ορίζουσα Wronski μπορεί να υπολογισθεί κατ' ευθείαν από την ΔΕ, αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μία λύση της ΔΕ την $y_1(x)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε μία δεύτερη λύση της. Επομένως, η γνώση μίας λύσης επαρκεί για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της ΔΕ.

Παράδειγμα 1.5: Η ΔΕ: $xy'' - (x+2)y' + (1+\frac{2}{x})y = 0$, έχει σαν μία λύση της την $y_1(x) = x$ (να το επαληθεύσετε). Να προσδιορισθεί μία δεύτερη λύση της.

Επίλυση: Όπως δείξαμε προηγουμένως η δεύτερη λύση της θα δίνεται από τον τύπο:

$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}dx$, όπου $p(x) = \frac{-(x+2)}{x}$ [ο συντελεστής $p(x)$ είναι αυτός που αντιστοιχεί στην κανονική μορφή της ΔΕ].

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{-(x+2)}{x}dx} = e^x x^2$ και αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε

$$y_2 = x\int \frac{e^x x^2}{x^2}dx = x \int e^x dx = xe^x.$$

Παράδειγμα 1.6: Δίνεται η ΔΕ: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, x > 0$. Μία λύση της είναι η $y_1(x) = x^2$ και μία δεύτερη λύση της $y_2(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $W(x) = 1$ και $y_2(1) = -\frac{1}{3}$. α) Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ, β) Να προσδιορισθούν οι συντελεστές της ΔΕ.

Επίλυση: α) Από τον ορισμό της ορίζουσας Wronski, έχουμε:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} => W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 => \frac{W(x)}{{y_1}^2} = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{{y_1}^2} => \frac{W(x)}{{y_1}^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' =>$$

$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(x)}{{y_1}^2}dx + c => y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{{y_1}^2}dx + cy_1, c$ αυθαίρετη σταθερά.
Επομένως, με δεδομένο ότι $y_1 = x^2$ και $W(x) = 1$ βρίσκουμε ότι $y_2 = x^2 \int \frac{1}{x^4}dx + c = -\frac{1}{3x} + cx^2$. Από τη συνθήκη $y_2(1) = -\frac{1}{3}$, προκύπτει ότι $c = 0$, άρα $y_2 = -\frac{1}{3x}$.
Έχοντας προσδιορίσει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ έχουμε την γενική λύση της

$$y(x) = c_1x^2 + c_2(-\frac{1}{3})\, x^{-1} = c_1x^2 + c_2x^{-1}$$

β) Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές της ΔΕ, χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0$$

Εφόσον η ορίζουσα Wronski των λύσεων $\left\{x^2, -\frac{1}{3x}\right\}$ είναι ίση με 1, από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι $p(x) = 0$.
Επίσης η $y_1(x) = x^2$ ικανοποιεί τη ΔΕ. Επομένως αντικαθιστώντας αυτή στη ΔΕ έχουμε:
$2 + q(x)x^2 = 0 => q(x) = -\frac{2}{x^2}$
Άρα η ΔΕ είναι: $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0 => x^2y'' - 2y = 0,\ x > 0.$

<u>Παράδειγμα 1.7:</u> Δίνεται η ΔΕ: $y'' + ay' + by = 0$. Αν $y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$ είναι μία λύση της να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ.
Επίλυση: Η ορίζουσα Wronski δύο λύσεων της ΔΕ είναι:
$W(x) = ce^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int adx} = ce^{-ax}$
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το παραπάνω παράδειγμα, έχουμε

$$y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{{y_1}^2}dx + c_1y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} \int \frac{ce^{-ax}}{e^{-ax}}dx + c_1e^{-\frac{a}{2}x} = cxe^{-\frac{a}{2}x} + c_1e^{-\frac{a}{2}x}$$

Ο τελευταίος όρος στην παραπάνω σχέση είναι ένα πολλαπλάσιο της 1ης λύσης, άρα
$y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$.

<u>Παρατήρηση 1.2:</u> Εφόσον η $y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$ είναι λύση της ΔΕ θα την ικανοποιεί. Εισάγοντας την
$y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$ στην ΔΕ βρίσκουμε:
$\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b\right)e^{-\frac{a}{2}x} = 0 => \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0 => a^2 - 4b = 0.$
Άρα η ΔΕ: $y'' + ay' + by = 0$, για την οποία ισχύει $a^2 - 4b = 0$ έχει γενική λύση:

$$y(x) = c_1e^{-\frac{a}{2}x} + c_2xe^{-\frac{a}{2}x}.$$

<u>Η μέθοδος του υποβιβασμού τάξης</u>

Μία διαφορετική τεχνική η οποία οδηγεί στον προσδιορισμό της δεύτερης λύσης του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ (1.1), όταν είναι γνώστη μία λύση $y_1(x)$ της διαφορικής εξίσωσης, είναι η μέθοδος υποβιβασμού τάξης. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στον γραμμικό ομογενή μετασχηματισμό: $y(x) = u(x)y_1(x)$.
Απαιτούμε από τη συνάρτηση $y(x) = u(x)y_1(x)$ να ικανοποιεί την ΔΕ (1.1), ελπίζοντας ότι έτσι θα προσδιορίσουμε και μία δεύτερη ανεξάρτητη λύση. Η συνάρτηση $u(x)$ είναι άγνωστη και ο προσδιορισμός της μέσα από την παραπάνω απαίτηση θα είναι ικανός να μας χαρακτηρίσει τελικά όλο τον χώρο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης.
Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$L[uy_1] = 0 => u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 = 0 =>$$

$y_1u'' + u'(2y_1' + py_1) + uL[y_1] = 0 => y_1u'' + u'(2y_1' + py_1) = 0,$
Όπου $L[y_1] = 0$ εφόσον y_1 είναι λύση της ΔΕ.
Θέτοντας $u' = v$ στην τελευταία εξίσωση, προκύπτει μία γραμμική, ομογενής ΔΕ 1ης τάξης:
$y_1v' + v(2y_1' + p(x)y_1) = 0$. Επιλύοντας αυτή, έχουμε:

$$v(x) = ce^{-\int\frac{(2y_1' + p(x)y_1)}{y_1}dx} = ce^{-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)dx} = ce^{ln(y_1)^{-2}}e^{-\int p(x)dx} =>$$

$$v(x) = c\frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}, c \neq 0$$

Δεδομένου ότι $u' = v$ βρίσκουμε: $u(x) = c\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}\,dx + c_1$

Επομένως, $y(x) = u(x)y_1(x) = cy_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}\,dx + c_1y_1(x)$.
Συνεπώς, προέκυψε ότι η γενική λύση της ΔΕ είναι η γραμμική υπέρθεση των $y_1(x)$ και $y_2(x)$, με $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}\,dx$.
Αν δείξουμε ότι οι $y_i(x),\ i = 1{,}2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τότε έχουμε ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ (1.1).

Υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski των δύο λύσεων σε ένα τυχαίο σημείο x και παίρνουμε
$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = y_1(u' y_1 + u y_1') - u y_1 y_1' = u'\, {y_1}^2 = c e^{-\int p(x)dx} \neq 0.$
Άρα το θεμελιώδες σύνολο λύσεων δίνεται από τη $y_1(x)$ η οποία είναι γνωστή και από την $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx.$

<u>Παρατήρηση 1.3:</u> Η $y_2(x)$ όπως προσδιορίστηκε μέσα από την μέθοδο υποβιβασμού τάξης είναι η ίδια με αυτή η οποία προέκυψε με την χρήση της ορίζουσας Wronski.

<u>Παράδειγμα 1.8:</u> Αν $y_1(x) = x$ είναι λύση της ΔΕ: $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, να βρεθεί η γενική λύση της.
<u>Επίλυση:</u> Θέτουμε $y(x) = u(x) y_1(x) = u(x) x \Rightarrow y' = u' x + u \Rightarrow y'' = u'' x + 2u'$ και αντικαθιστούμε στη ΔΕ, οπότε προκύπτει

$$(x^2+1)xu'' + 2u' = 0$$

Για $u' = v$, έχουμε τη ΔΕ 1ης τάξης:

$$v' + \frac{2}{x(x^2+1)} v = 0 \Rightarrow v(x) = c e^{-\int \frac{2}{x(x^2+1)} dx}$$

$e^{-\int \frac{2}{x(x^2+1)} dx} = e^{-2\int \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)} dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x}{x^2+1} dx} = x^{-2}(x^2+1)$

Άρα $v(x) = c\,\frac{x^2+1}{x^2}$. Όμως $u' = v$, οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε

$$u(x) = c \int \frac{x^2+1}{x^2} dx + c_1 = c(x - \frac{1}{x}) + c_1$$

Άρα η γενική λύση είναι: $y(x) = u(x) y_1(x) = c(x^2 - 1) + c_1 x$

Άσκηση: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, x > 0$, αν $y_1(x) = \frac{sinx}{\sqrt{x}}$ είναι μία λύση της.