6. Διαφορικές Εξισώσεις Αναγόμενες σε Πλήρεις-Πολλαπλασιαστής Euler ή Ολοκληρώνων Παράγοντας

Οι διαφορικές εξισώσεις που εμπίπτουν στην κατηγορία των πλήρων ΔΕ δεν είναι πολλές διότι η συνθήκη $M_y = N_x$ επιβάλλει μία ισχυρή συσχέτιση των συναρτήσεων M και N. Όμως, όπως θα δούμε στην ενότητα αυτή, η διαδικασία επίλυσης των πλήρων ΔΕ εφαρμόζεται και σε μία ευρύτερη κατηγορία εξισώσεων οι οποίες μπορούν να αναχθούν σε πλήρη μορφή.

Για παράδειγμα η ΔΕ: $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι δεν είναι πλήρης. Όμως αν πολλαπλασιάσουμε τη ΔΕ με τον παράγοντα $\frac{1}{x^2}$, υποθέτοντας βέβαια ότι $x \neq 0$, προκύπτει μία ισοδύναμη ΔΕ η οποία είναι πλήρης. Πράγματι για τη προκύπτουσα ΔΕ:

$$\frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

έχουμε $M(x,y) = \frac{y}{x^2}$ και $N(x,y) = y - \frac{1}{x}$, οπότε $M_y = \frac{1}{x^2} = N_x$.
Πολλές φορές επιτυγχάνεται, μέσω του πολλαπλασιασμού και των δύο μελών της ΔΕ

$$M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0,\ \ (x,y) \in D \qquad (6.1)$$

ή

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, (x,y) \in D \qquad (6.2)$$

με ένα κατάλληλο παράγοντα $\mu(x,y)$, $(x,y) \in D$, η ΔΕ να γίνει πλήρης. Μία τέτοια συνάρτηση καλείται ***ολοκληρώνων παράγοντας*** της ΔΕ (6.1) ή (6.2). Μέθοδο εύρεσης τέτοιου παράγοντα έδωσε πρώτος ο Euler και γι αυτό το λόγο ο ολοκληρώνων παράγοντας καλείται και ***πολλαπλασιαστής του Euler***.
Στηριζόμενοι στο θεώρημα 5.1 **[**Έστω η ΔΕ: $M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0$ (1), όπου M, N συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους στο απλά συνεκτικό πεδίο$^{(*)}$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Τότε η ΔΕ (1) είναι πλήρης εάν και μόνο εάν $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2)] εύκολα μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω κριτήριο (ικανή συνθήκη) για την ύπαρξη ενός πολλαπλασιαστή Euler.
Θεώρημα 6.1 (κριτήριο υπάρξεως πολλαπλασιαστή Euler): Έστω η ΔΕ: $M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0$ (6.1) ή (6.2), όπου M, N συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους στο απλά συνεκτικό πεδίο$^{(*)}$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Μία συνάρτηση $\mu(x,y)$, $(x,y) \in D$ με $\mu_x(x,y)$ και $\mu_y(x,y)$ συνεχείς στο D είναι ένας ***πολλαπλασιαστής Euler*** για τη ΔΕ (6.1) ή (6.2), δηλαδή ανάγει την (6.1) σε μία πλήρη διαφορική εξίσωση:

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y'(x) = 0,\ \ (x,y) \in D \qquad (6.3)$$

αντίστοιχα την (6.2) στην πλήρη διαφορική εξίσωση:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, (x,y) \in D \qquad (6.4)$$

εάν ισχύει:

1) $\mu(x,y) \neq 0, \forall (x,y) \in D$ και
2) $M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, (x,y) \in D$ (6.5).

Πράγματι έχουμε τότε

$$\frac{\partial[\mu(x,y)M(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x,y)N(x,y)]}{\partial x}, (x,y) \in D \qquad (6.6)$$

Άρα η (6.3), αντίστοιχα η (6.4), είναι πλήρης διαφορική εξίσωση.
Επομένως, υπάρχει συνάρτηση $F(x,y)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu(x,y)M(x,y) \text{ και } \frac{\partial F}{\partial y} = \mu(x,y)N(x,y)$$

και το γενικό ολοκλήρωμα της (6.3) ή (6.4) είναι: $F(x,y) = c$.

Εφόσον $\mu(x,y) \neq 0, \forall (x,y) \in D$ οι διαφορικές εξισώσεις (6.1) και (6.3) είναι ισοδύναμες , δηλαδή έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. Πράγματι, αν $y(x)$ είναι λύση της (6.1) τότε
$M(x,y) + N(x,y)y^{'}(x) = 0 \Rightarrow \mu(x,y)[M(x,y) + N(x,y)y^{'}(x)] = 0$, δηλαδή η $y(x)$ είναι λύση της (6.3). Αντίστροφα, αν $y(x)$ είναι λύση της (6.3) τότε
$\mu(x,y)[M(x,y) + N(x,y)y^{'}(x)] = 0 \Rightarrow M(x,y) + N(x,y)y^{'}(x) = 0$, δηλαδή η $y(x)$είναι λύση της (6.1).
Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι οι διαφορικές εξισώσεις (6.2) και (6.4) είναι ισοδύναμες.

Το πλήρες ολοκλήρωμα της αρχικής ΔΕ (6.1) ή (6.2)

Για τη ΔΕ (6.1) έχουμε

$$M(x,y) + N(x,y)y^{'}(x) = \frac{1}{\mu(x,y)}[\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y^{'}(x)] = \frac{1}{\mu(x,y)}\frac{dF}{dx} = 0$$

Έτσι το πλήρες ολοκλήρωμα της (6.1) είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (6.3) και τα ιδιάζοντα ολοκληρώματα που προκύπτουν από τη σχέση $\mu(x,y(x))^{-1} = 0$. [Για τη ΔΕ (6.2) τα ιδιάζοντα ολοκληρώματα μπορεί να προκύψουν από τις σχέσεις $\mu(x,y(x))^{-1} = 0$, ή $\mu(x(y),y)^{-1} = 0$]

Προσδιορισμός του πολλαπλασιαστή Euler

Το παραπάνω κριτήριο (θεώρημα 6.1) ανάγει την εύρεση ενός πολλαπλασιαστή Euler στον προσδιορισμό μίας λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης με μερικές παραγώγους, δηλαδή της εξίσωσης (6.5), η οποία γράφεται

$$N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = \mu(x,y)\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \qquad (6.7)$$

Η επίλυση τέτοιων διαφορικών εξισώσεων (με μερικές παραγώγους) είναι εν γένει δυσκολότερο πρόβλημα από την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Επειδή όμως δεν ενδιαφερόμαστε να λύσουμε πλήρως την (6.7) αλλά να προσδιορίσουμε μία λύση της, $\mu(x,y)$, μπορούμε να αναζητήσουμε λύσεις ειδικής μορφής.
Έστω λοιπόν ότι $\mu(x,y) = \mu(u)$ όπου u είναι κάποια ειδική μορφή των x και y, τότε

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \frac{d\mu}{du}\frac{\partial u}{\partial x} \text{ και } \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = \frac{d\mu}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Έτσι η σχέση (6.7) γράφεται

$$\frac{d\mu}{du}\frac{\partial u}{\partial x}N(x,y) - \frac{d\mu}{du}\frac{\partial u}{\partial y}M(x,y) = \mu(u)\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{du} = \frac{M_y - N_x}{Nu_x - Mu_y} \qquad (6.8).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε κάποιες απλές περιπτώσεις για το u.
(i) Έστω ότι το $u = x$, οπότε $\mu(x,y) = \mu(x)$ και $u_x = 1, u_y = 0$. Τότε η σχέση (6.8) γίνεται

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \qquad (6.9)$$

Αν η συνάρτηση $\frac{M_y - N_x}{N}$ είναι συνάρτηση μόνο του x, δηλαδή $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$, τότε υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler $\mu(x)$, ο οποίος προσδιορίζεται επιλύοντας την εξίσωση (6.9) (μία εξίσωση ομογενής γραμμική 1ης τάξης). Η γενική της λύση είναι

$$\mu(x) = ce^{\int f(x)dx}, \ c \in \mathbb{R}$$

Για λόγους απλότητας θέτουμε $c = 1$ και θεωρούμε ως πολλαπλασιαστή Euler τη συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} \qquad (6.10)$$

(ii) Έστω ότι το $u = y$, οπότε $\mu(x,y) = \mu(y)$ και $u_x = 0, u_y = 1$. Τότε η σχέση (6.8) γίνεται

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{M_y - N_x}{-M} \qquad (6.11)$$

Αν η συνάρτηση $\frac{M_y - N_x}{-M}$ είναι συνάρτηση μόνο του y, δηλαδή $\frac{M_y - N_x}{-M} = g(y)$, τότε υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler $\mu(y)$, ο οποίος προσδιορίζεται επιλύοντας την εξίσωση (6.11). Η γενική της λύση είναι

$$\mu(y) = ce^{\int g(y)dy},\ c \in \mathbb{R}$$

και για $c = 1$ θεωρούμε ως πολλαπλασιαστή Euler τη συνάρτηση

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} \qquad (6.12)$$

(iii) Έστω ότι το $u = xy$, οπότε $\mu(x, y) = \mu(u)$ και $u_x = y$, $u_y = x$. Τότε η σχέση (6.8) γίνεται

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{du} = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} \qquad (6.13)$$

Αν η συνάρτηση $\frac{M_y - N_x}{yN - xM}$ είναι συνάρτηση μόνο του u, δηλαδή $\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(u)$, τότε υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler $\mu(u)$, ο οποίος προσδιορίζεται επιλύοντας την εξίσωση (6.13). Η γενική της λύση είναι

$$\mu(u) = ce^{\int h(u)du},\ c \in \mathbb{R}$$

και για $c = 1$ θεωρούμε ως πολλαπλασιαστή Euler τη συνάρτηση

$$\mu(u) = e^{\int g(u)du} \qquad (6.14)$$

<u>Παράδειγμα 6.1</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Για $M(x, y) = 3xy + y^2$ και $N(x, y) = x^2 + xy$ έχουμε

$$M_y = 3x + 2y \neq N_x = 2x + y$$

Άρα η ΔΕ δεν είναι πλήρης. Παρατηρούμε ότι η παράσταση

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x} = f(x)$$

είναι συνάρτηση μόνο του x. Επομένως, υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{ln|x|} = |x|$$

Για $x > 0$, η συνάρτηση $\mu(x) = x$ αποτελεί πολλαπλασιαστή Euler της ΔΕ (1), ενώ για $x < 0$, η συνάρτηση $\mu(x) = -x$ αποτελεί πολλαπλασιαστή Euler αυτής. Και στις δύο περιπτώσεις η ΔΕ που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\mu(x)$ είναι η ίδια

$$3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0 \qquad (2)$$

Η ΔΕ (2) είναι πλήρης διότι για $\widetilde{M}(x, y) = 3x^2y + xy^2$ και $\widetilde{N}(x, y) = x^3 + x^2y$

Έχουμε $\widetilde{M}_y = 3x^2 + 2xy = \widetilde{N}_x$

$\Rightarrow\ \exists\, F(x, y)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = \widetilde{M}(x, y)$ (3) και $\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x, y)$ (4). Από την σχέση (3) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 \Rightarrow F(x, y) = \int (3x^2y + xy^2)\, dx + h(y) \Rightarrow$$

$$F(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y και συνδυάζοντας την με τη σχέση (4) προκύπτει

$\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x, y) \Rightarrow x^3 + x^2y + h'(y) = x^3 + x^2y \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$

και $F(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c_1$

Επομένως το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ είναι

$$F(x, y) = c \Rightarrow x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c_1 = c \Rightarrow x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c - c_1$$

$$2x^3y + x^2y^2 = C \ \text{ με } C = 2(c - c_1).$$

<u>Παράδειγμα 6.2</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Για $M(x,y) = y(x+y+1)$ και $N(x,y) = x(x+3y+2)$ έχουμε

$$M_y = x+2y+1 \neq N_x = 2x+3y+2$$

Άρα η ΔΕ δεν είναι πλήρης. Παρατηρούμε ότι η παράσταση $\frac{M_y-N_x}{N} = \frac{x+2y+1-(2x+3y+2)}{x(x+3y+2)} = \frac{-(x+y+1)}{x(x+3y+2)}$ δεν είναι συνάρτηση μόνο του x. Άρα δεν υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler $\mu = \mu(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{x+2y+1-(2x+3y+2)}{-y(x+y+1)} = \frac{-(x+y+1)}{-y(x+y+1)} = \frac{1}{y} = g(y)$$

η οποία είναι συνάρτηση μόνο του y. Επομένως, υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{ln|y|} = |y|$$

Για $y > 0$ η συνάρτηση $\mu(y) = y$ είναι ένας ολοκληρώνων παράγοντας της ΔΕ (1) και για $y < 0$ η συνάρτηση $\mu(y) = -y$ είναι επίσης ολοκληρώνων παράγοντας της ΔΕ (1). Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\mu(y)$, και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει είναι η ίδια ΔΕ

$$y^2(x+y+1)dx + yx(x+3y+2)dy = 0 \qquad (2)$$

Η ΔΕ (2) είναι πλήρης διότι για $\widetilde{M}(x,y) = y^2(x+y+1)$ και $\widetilde{N}(x,y) = yx(x+3y+2)$ έχουμε $\widetilde{M}_y = 2yx + 3y^2 + 2y = \widetilde{N}_x$. Επομένως, $\exists\, F(x,y)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = \widetilde{M}(x,y)$ (3) και $\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y)$ (4).

Από την σχέση (3) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2(x+y+1) \Rightarrow F(x,y) = \int y^2(x+y+1)\,dx + h(y) \Rightarrow$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + y^3x + y^2x + h(y)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y και συνδυάζοντας την με τη σχέση (4) προκύπτει $\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y) \Rightarrow x^2y + 3y^2x + 2yx + h'(y) = x^2y + 3y^2x + 2yx \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$

και $F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + y^3x + y^2x + c_1$

Επομένως το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ είναι

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + y^3x + y^2x + c_1 = c \Rightarrow x^2y^2 + 2y^3x + 2y^2x = 2(c - c_1)$$

$$xy^2(xy + 2y + 2) = C, \text{ με } 2(c - c_1) = C$$

Η συνάρτηση $\mu^{-1}(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν ιδιάζουσες λύσεις.

<u>Παράδειγμα 6.3</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $1 + \left(\frac{x}{y} - siny\right)y' = 0,\ \ y \neq 0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Για $M(x,y) = 1$ και $N(x,y) = \frac{x}{y} - siny$ έχουμε: $M_y = 0 \neq N_x = \frac{1}{y}$, άρα η ΔΕ δεν είναι πλήρης. Παρατηρούμε ότι η παράσταση

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-\frac{1}{y}}{-1} = \frac{1}{y} = g(y)$$

είναι συνάρτηση μόνο του y. Επομένως, υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{ln|y|} = |y|$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με y, έχουμε

$$y + (x - ysiny)y' = 0 \qquad (2)$$

Η ΔΕ (2) είναι πλήρης διότι για $\widetilde{M}(x,y) = y$ και $\widetilde{N}(x,y) = x - ysiny$

Έχουμε $\widetilde{M}_y = 1 = \widetilde{N}_x$

$\Rightarrow \;\; \exists\, F(x,y)\colon \frac{\partial F}{\partial x} = \widetilde{M}(x,y)$ (3) και $\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y)$ (4). Από την σχέση (3) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \Rightarrow F(x,y) = \int y\,dx + h(y) \Rightarrow$$
$$F(x,y) = yx + h(y)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y και συνδυάζοντας την με τη σχέση (4) προκύπτει

$\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y) \Rightarrow x + h'(y) = x - ysiny \Rightarrow h'(y) = -ysiny \Rightarrow h(y) = -\int ysinydy + c_1 \Rightarrow$

$$h(y) = ycosy - \int cosydy + c_1 = ycosy - siny + c_1$$

και $F(x,y) = yx + ycosy - siny + c_1$

Επομένως το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ (1) είναι

$$yx - ycosy - siny = c, y \neq 0$$

Η τετριμμένη συνάρτηση $y(x) = 0$ είναι λύση της ΔΕ (2), αλλά δεν είναι λύση της (1).

<u>Παράδειγμα 6.4</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Για $M(x,y) = y$ και $N(x,y) = 2xy - e^{-2y}$ έχουμε

$$M_y = 1 \neq N_x = 2y$$

Άρα η ΔΕ δεν είναι πλήρης. Παρατηρούμε ότι η παράσταση

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1-2y}{-y} = g(y)$$

είναι συνάρτηση μόνο του y. Επομένως, υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{2y-1}{y}dy} = e^{2y - ln|y|} = \frac{e^{2y}}{|y|}, \qquad y \neq 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\frac{e^{2y}}{y}$ έχουμε

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)y' = 0, \;\; y \neq 0 \qquad (2)$$

Η ΔΕ (2) είναι πλήρης, διότι για $\widetilde{M}(x,y) = e^{2y}$ και $\widetilde{N}(x,y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y}$, έχουμε $\widetilde{M}_y = 2e^{2y} = \widetilde{N}_x$

επομένως $\exists\, F(x,y)\colon \frac{\partial F}{\partial x} = \widetilde{M}(x,y)$ (3) και $\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y)$ (4). Από την σχέση (3) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{2y} \Rightarrow F(x,y) = \int e^{2y}\,dx + h(y) \Rightarrow$$
$$F(x,y) = xe^{2y} + h(y)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y και συνδυάζοντας την με τη σχέση (4) προκύπτει

$\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y) \Rightarrow 2xe^{2y} + h'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \Rightarrow h'(y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow h(y) = -ln|y| + c_1$

και $F(x,y) = xe^{2y} - ln|y| + c_1$

Άρα το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ είναι

$$xe^{2y} - ln|y| = c, y \neq 0$$

Η $y(x) = 0$ είναι λύση της εξίσωση: $\mu^{-1}(y) = \frac{y}{e^{2y}} = 0$, επομένως το πλήρες ολοκλήρωμα της (1) είναι

$$xe^{2y} - ln|y| = c, y \neq 0, \text{ και } y(x) = 0.$$

Η τετριμμένη συνάρτηση $y(x) = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ (1), αλλά δεν είναι λύση της (2).

<u>Παράδειγμα 6.5</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ : $\left(3x + \frac{6}{y}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}\right)dy = 0, y(1) = 1 \quad (1)$

<u>Επίλυση</u>: Για $M(x,y) = 3x + \frac{6}{y}$ και $N(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}$ έχουμε $M_y = -\frac{6}{y^2} \neq N_x = \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x^2}$

άρα η ΔΕ δεν είναι πλήρης. Παρατηρούμε ότι

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\frac{6}{y^2} - \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x^2}}{\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}} = \frac{-6x^2 - 2yx^3 + 3y^3}{y^2x^2(\frac{x^2}{y} + \frac{3y^2}{x})} \neq f(x)$ και $\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-6x^2 - 2yx^3 + 3y^3}{-y^2x^2\left(3x + \frac{6}{y}\right)} \neq g(y)$

Επομένως δεν υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler $\mu = \mu(x)$ ή $\mu = \mu(y)$.

Δοκιμάζουμε αν υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler της μορφής $\mu = \mu(u), u = xy$. Σύμφωνα με τη σχέση (6.13) θα πρέπει

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{du} = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(u)$$

Η παράσταση $\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{-6x^2 - 2yx^3 + 3y^3}{y^2x^2(x^2 + \frac{3y^2}{x} - 3x^2 - \frac{6x}{y})} = \frac{-6x^2 - 2yx^3 + 3y^3}{y^2x^2(-2x^2 + \frac{3y^2}{x} - \frac{6x}{y})} = \frac{-6x^2 - 2yx^3 + 3y^3}{yx(-2yx^3 + 3y^3 - 6x^2)} = \frac{1}{yx} = \frac{1}{u}$

είναι συνάρτηση μόνο του $u = xy$. Επομένως υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler

$$\mu(u) = e^{\int h(u)du} = e^{\int \frac{1}{u}du} = e^{ln|u|} = |u|, \qquad u \neq 0 \; (x \neq 0, y \neq 0)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $u = xy$ έχουμε

$$(3x^2y + 6x)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

Η ΔΕ (2) είναι πλήρης διότι, για $\widetilde{M}(x,y) = 3x^2y + 6x$ και $\widetilde{N}(x,y) = x^3 + 3y^2$, έχουμε $\widetilde{M}_y = 3x^2 = \widetilde{N}_x$. Επομένως, $\exists\, F(x,y)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = \widetilde{M}(x,y)$ (3) και $\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y)$ (4). Από την σχέση (3) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + 6x \Rightarrow F(x,y) = \int 3x^2y + 6x\, dx + h(y) \Rightarrow$$

$$F(x,y) = x^3y + 3x^2 + h(y)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y και συνδυάζοντας την με τη σχέση (4) προκύπτει

$\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y) \Rightarrow x^3 + h^{'}(y) = x^3 + 3y^2 \Rightarrow h^{'}(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3 + c_1$

και $F(x,y) = x^3y + 3x^2 + y^3 + c_1$

Επομένως το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ είναι

$$x^3y + 3x^2 + y^3 = c$$

Εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $y(1) = 1$ και έχουμε ότι $c = 5$.

Άρα το ειδικό ολοκλήρωμα είναι

$$x^3y + 3x^2 + y^3 = 5$$

Παρατήρηση 6.1: Αν η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y(Ax^py^q + Bx^ry^s)dx + x(Cx^py^q + Dx^ry^s)dy = 0 \qquad (6.15)$$

όπου A, B, C, D σταθερές, τότε αποδεικνύεται ότι ο ολοκληρώνων παράγοντας της ΔΕ έχει τη μορφή $\mu(x,y) = x^ay^b$, όπου οι εκθέτες a, b είναι προσδιοριστέες πραγματικές σταθερές.

Παράδειγμα 6.6: Να λυθεί η ΔΕ: $(6xy + 5y^4)dx + (4x^2 + 7xy^3)dy = 0$ (1)

Επίλυση: Η ΔΕ δεν είναι πλήρης, μπορεί όμως να γραφεί στη μορφή της ΔΕ (6.15)

$$y(6x + 5y^3)dx + x(4x + 7y^3)dy = 0$$

Επομένως, αναζητούμε πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $\mu(x,y) = x^ay^b$ με τον περιορισμό $x \neq 0, y \neq 0$. Έτσι πολλαπλασιάζοντας της (1) με αυτόν το πολλαπλασιαστή Euler, προκύπτει η ΔΕ:

$$\left(6x^{1+a}y^{1+b} + 5x^ay^{4+b}\right)dx + \left(4x^{2+a}y^b + 7x^{1+a}y^{3+b}\right)dy = 0 \quad (2)$$

Η ΔΕ (2) είναι πλήρης αν ισχύει

$$M_y = 6(1+b)\, x^{1+a}y^b + 5(4+b)x^ay^{3+b} = N_x = 4(2+a)x^{1+a}y^b + 7(1+a)x^ay^{3+b}$$

Η παραπάνω σχέση για να ισχύει για κάθε $x \neq 0, y \neq 0$, θα πρέπει

$6(1+b) = 4(2+a)$ και $5(4+b) = 7(1+a)$, δηλαδή $a = 4$ και $b = 3$ και η συνάρτηση $\mu(x,y) = x^4y^3$ αποτελεί ένα πολλαπλασιαστή Euler της ΔΕ (1). Άρα η ΔΕ (2) γίνεται

$$(6x^5y^4 + 5x^4y^7)dx + (4x^6y^3 + 7x^5y^6)dy = 0 \quad (3)$$

$$F(x,y) = \int (6x^5y^4 + 5x^4y^7)\, dx + h(y) = x^6y^4 + x^5y^7 + h(y)$$

$$F_y(x,y) = 4x^6y^3 + 7x^5y^6 \Rightarrow 4x^6y^3 + 7x^5y^6 + h'(y) = 4x^6y^3 + 7x^5y^6 \Rightarrow$$
$$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = k$$

Το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ (1) είναι: $x^6y^4 + x^5y^7 = c, x \neq 0, y \neq 0$
Οι συναρτήσεις $x(y) = 0$ και $y(x) = 0$ αποτελούν επίσης λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (1).

7. Διαφορική Εξίσωση Bernoulli

Η διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x)y(x)^n, n \in R \qquad (7.1)$$

ονομάζεται εξίσωση ***Bernoulli τάξης n***. Είναι μία σχεδόν γραμμική διαφορική εξίσωση.

Παρατηρούμε ότι για $n = 0$ η εξίσωση (7.1) είναι μη ομογενής γραμμική, ενώ για $n = 1$, είναι γραμμική ομογενής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n \neq 0{,}1$.

Επίλυση**:** Η επίλυση της (7.1) γίνεται με αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής-του τύπου-

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow u(x) = y(x)^{1-n} \qquad (7.2)$$

Παραγωγίζοντας την (7.2) ως προς x έχουμε: $u'(x) = (1-n)y(x)^{-n}y'(x)$
Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (7.1) με $(1-n)y(x)^{-n}$, οπότε προκύπτει

$$(1-n)y(x)^{-n}y'(x) + (1-n)p(x)y(x)^{1-n} = (1-n)g(x) \Rightarrow$$
$$u'(x) + (1-n)p(x)u(x) = (1-n)g(x) \qquad (7.3)$$

Η μετασχηματισμένη εξίσωση (7.3) είναι μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης ως προς $u(x)$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$u(x) = \frac{c}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)}\{\textstyle\int (1-n)g(x)\mu(x)dx\}, \;\; \mu(x) = e^{(1-n)\int p(x)dx} \qquad (7.4)$$

Έχοντας προσδιορίσει την $u(x)$ επιλύουμε την εξίσωση (7.2) ως προς $y(x)$ και βρίσκουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (7.1).

Παράδειγμα 7.1: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $xy' = y + xy^2, \;\; y(1) = 2$ (1)
Επίλυση: Η διαφορική εξίσωση του ΠΑΤ είναι μία εξίσωση Bernoulli τάξης 2: $y' - \frac{1}{x}y = y^2$.

Θέτουμε $y = u^{\frac{1}{1-2}} \Rightarrow y = u^{-1} \Rightarrow \; u = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$
Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $-y^{-2}$ και προκύπτει

$$-y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -1$$

Άρα η γραμμική μη ομογενής είναι: $u' + \frac{1}{x}u = -1$, της οποίας η γενική λύση είναι:
$u = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x} = \frac{2c - x^2}{2x}$. Άρα $y = u^{-1} = \frac{2x}{2c - x^2}$ είναι η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης.
Από την αρχική συνθήκη έχουμε: $y(1) = \frac{2}{2c-1} = 2 \Rightarrow c = 1$
Άρα η ειδική λύση είναι $y(x) = \frac{2x}{2 - x^2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Παράδειγμα 7.2: να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y' + xy = xy^{-3}, \; y \neq 0$ (1)
Επίλυση: Η διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση Bernoulli τάξης -3.

Θέτουμε $y = u^{\frac{1}{1+3}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \; u = y^4 \Rightarrow u' = 4y^3y'$
Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $4y^3$ και προκύπτει η ΔΕ: $4y^3y' + 4xy^4 = 4x$. Άρα η γραμμική μη ομογενής είναι: $u' + 4xu = 4x$, της οποίας η γενική λύση είναι: $u(x) = 1 + ce^{-2x^2}$. Άρα η γραμμική μη ομογενής είναι: $u' + 4xu = 4x$, η γενική λύση της οποίας είναι: $u(x) = 1 + ce^{-2x^2}$.
Επομένως, $y^4 = u = 1 + ce^{-2x^2} \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt[4]{1 + ce^{-2x^2}}$ είναι η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης.

<u>Παράδειγμα 7.3</u>: να βρεθεί η πλήρης λύση της ΔΕ: $x^2y' + 2xy - y^3 = 0,\ x > 0$ (1)
<u>Επίλυση</u>: Η διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση Bernoulli τάξης 3

$$y' + \frac{2}{x}y = x^{-2}y^3$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με y^{-3}: $\quad y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = x^{-2}$ (2)
και θέτουμε $u = y^{-2} \Rightarrow u' = -2y^{-3}y'$. Άρα από τη (2) πολλαπλασιάζοντας με -2 έχουμε :
$-2y^{-3}y' - \frac{4}{x}y^{-2} = -2x^{-2} \Rightarrow u' - \frac{4}{x}u = -2x^{-2}$ (3)
Η εξίσωση (3) είναι η γραμμική ΔΕ ως προς $u(x)$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$u(x) = \frac{2}{5x} + cx^4, c \in \mathbb{R}$$

Επομένως, $y^{-2} = u = \frac{2}{5x} + cx^4 \Rightarrow y(x) = \pm\left(\frac{2}{5x} + cx^4\right)^{-\frac{1}{2}}$ είναι η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης. Η πλήρης λύση της ΔΕ (1) είναι η γενική λύση και η μηδενική συνάρτηση: $y(x) = 0$ που επίσης ικανοποιεί την ΔΕ (1).

<u>Παράδειγμα 7.4</u>: να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $(2x + x^2y^2)yy' = 1$, (1)
<u>Επίλυση</u>: Η διαφορική εξίσωση (1) γράφεται:
$(2xy + x^2y^3)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow 2xy + x^2y^3 = \frac{dx}{dy} \Rightarrow x'(y) - 2yx(y) = x^2(y)y^3$ (2)
η οποία είναι μία εξίσωση Bernoulli τάξης 2 με άγνωστη συνάρτηση την $x(y)$.
Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2) με x^{-2}: $\quad x^{-2}x' - 2yx^{-1} = y^3$ (3)
και θέτουμε $u = x^{-1} \Rightarrow u' = -x^{-2}x'$. Άρα από τη (3) πολλαπλασιάζοντάς την με -1 έχουμε :
$-x^{-2}x' + 2yx^{-1} = -y^3 \Rightarrow u' + 2yu = -y^3$ (4)
Η εξίσωση (4) είναι μία γραμμική ΔΕ ως προς $u(x)$, της οποίας ο ολοκληρώνων παράγοντας είναι $\mu(y) = e^{\int 2ydy} = e^{y^2}$. Οπότε η (4) γράφεται:

$$\left(e^{y^2}u\right)' = -e^{y^2}y^3 \Rightarrow e^{y^2}u = -\int e^{y^2}y^3dy + c = -\frac{1}{2}\int\left(e^{y^2}\right)'y^2dy + c = -\frac{1}{2}y^2e^{y^2} + \frac{1}{2}\int e^{y^2}ydy + c =$$
$$= -\frac{1}{2}y^2e^{y^2} + \frac{1}{2}e^{y^2} + c \Rightarrow u = \frac{1}{2}(1 - y^2) + ce^{-y^2}$$

Άρα η γενική λύση της (1) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή:

$$\frac{1}{2}(1 - y^2) + ce^{-y^2} = \frac{1}{x}, c \in \mathbb{R}$$

8. Διαφορική Εξίσωση Riccati

Η διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = f_2(x)y^2(x) + f_1(x)y(x) + f_o(x) \qquad (8.1)$$

ονομάζεται ***εξίσωση Riccati*** και είναι μία σχεδόν γραμμική διαφορική εξίσωση.
Παρατηρούμε ότι για $f_2(x) = 0$ η εξίσωση (1) γίνεται γραμμική μη ομογενής, ενώ αν $f_o(x) = 0$, η (8.1) είναι εξίσωση Bernoulli. Θεωρούμε ότι οι $f_2(x),\ f_1(x),\ f_o(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I.
<u>Επίλυση</u>: Για την επίλυση της (8.1) θα πρέπει να γνωρίζουμε μία ειδική λύση της, έστω $y_1(x)$. Τότε κάνουμε τον μετασχηματισμό:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)} \qquad (8.2)$$

όπου $w(x)$ είναι μία άγνωστη συνάρτηση. Παραγωγίζοντας την (8.2) ως προς x έχουμε

$$y' = y_1{}' - \frac{w'}{w^2}$$

και αντικαθιστώντας στη (8.1) προκύπτει μία γραμμική μη ομογενής διαφορική εξίσωση 1ης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση $w(x)$

$$w' + (2f_2\, y_1 + f_1)w = -f_2 \qquad (8.3)$$

Προσδιορίζουμε την γενική λύση της (8.3) κατά τα γνωστά και αντικαθιστώντας στην (8.2) έχουμε την γενική λύση της (8.1).
Η πλήρης λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati είναι η γενική λύση και η ιδιάζουσα λύση $y_1(x)$.
Αν δεν γνωρίζουμε κάποια ειδική λύση της (8.1) μπορούμε να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής: $y = ax^b$ ή $y = ax + b$, όπου a, b προσδιοριστέες σταθερές.

<u>Παράδειγμα 8.1</u>: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $xy' = y^2 + y - 2,\ \ y(1) = 3,$ αφού παρατηρηθεί ότι η συνάρτηση $y_1(x) = 1$ είναι ειδική λύση της εξίσωσης.
<u>Επίλυση</u>: Η $y_1(x) = 1$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση διότι $y_1'(x) = 0$ και το 2ο μέλος μηδενίζεται για $y_1(x) = 1$.
Θέτουμε $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)} \Rightarrow y'(x) = y_1'(x) - \frac{w'(x)}{w^2(x)}$ και αντικαθιστούμε στην αρχική διαφορική εξίσωση. Μετά από τις πράξεις προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$w' + \frac{3}{x}w = -x^{-1}$$

της οποίας η γενική λύση είναι: $w(x) = -\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}$, c αυθαίρετη σταθερά.
Επομένως η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι: $y(x) = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3}+\frac{c}{x^3}} = \frac{2x^3+k}{k-x^3}$, $k = 3c$
Παρατηρούμε ότι η $y_1(x) = 1$ δεν προκύπτει από την γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς k.
Άρα η πλήρης λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $\begin{cases} y(x) = \frac{2x^3+k}{k-x^3} \\ y(x) = 1 \end{cases}$
Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη, θα πρέπει $\frac{2+k}{k-1} = 3 \Rightarrow k = 5/2$
Άρα η ειδική λύση που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι: $y(x) = \frac{4x^3+5}{5-2x^3}$.

<u>Παράδειγμα 8.2</u>: Να βρεθεί η πλήρης λύση της ΔΕ: $y' = -y^2 + \frac{2}{x^2}$ (1).
<u>Επίλυση</u>: Εφόσον δεν δίνεται κάποια λύση της ΔΕ αναζητούμε λύση της μορφής $y = ax^b$.
Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$abx^{b-1} + a^2x^{2b} = \frac{2}{x^2} \qquad (2)$$

η οποία ικανοποιείται για $a = b = -1$. Άρα μία λύση της ΔΕ είναι $y_1 = -x^{-1}$.
Θέτουμε $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)} \Rightarrow y' = x^{-2} - \frac{w'(x)}{w^2(x)}$ και αντικαθιστούμε στην αρχική διαφορική εξίσωση. Μετά από τις πράξεις προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$w' + \frac{2}{x}w = 1$$

της οποίας η γενική λύση είναι: $w(x) = \frac{x}{3} + \frac{c}{x^2} = \frac{x^3+3c}{3x^2}$, c αυθαίρετη σταθερά.
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ (1) είναι: $y(x) = -x^{-1} + \frac{3x^2}{x^3+3c}$, c αυθαίρετη σταθερά.
Η ειδική λύση $y_1 = -x^{-1}$ είναι ιδιάζουσα λύση διότι δεν προκύπτει από τη γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς c.
Η πλήρης λύση της ΔΕ (1) είναι η γενική λύση και η ιδιάζουσα λύση $y_1 = -x^{-1}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Η εξίσωση (2) ικανοποιείται και για $a = 2, b = -1$. Άρα η $y_2 = 2x^{-1}$ είναι επίσης λύση της ΔΕ (1). Επιλύοντας τη ΔΕ με τη χρήση της y_2, η λύση $y_1 = -x^{-1}$ προκύπτει από τη γενική λύση για κάποια πεπερασμένη τιμή της σταθεράς c, ενώ η y_2 είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ (1).

9. Διαφορικές Εξισώσεις σε πεπλεγμένη μορφή

Οι διαφορικές εξισώσεις που μελετήθηκαν μέχρι στιγμής γράφονται σε λυμένη μορφή $y' = f(x,y)$. Όμως αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Από το σύνολο των πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων $F(x,y,y') = 0$ θα μελετήσουμε κάποιες περιπτώσεις που ενώ δεν ανάγονται στην λυμένη μορφή, μπορούν εν τούτοις να επιλυθούν.

Διαφορική εξίσωση Clairaut

Η διαφορική εξίσωση Clairaut είναι της μορφής: $y = xy^{'}(x) + g\big(y^{'}(x)\big)$ (9.1)
όπου η συνάρτηση $g(y^{'})$ είναι μη γραμμική ως προς τη παράγωγο y'.
Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (9.1) γίνεται με αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής: $p(x) = y^{'}$. Όποτε προκύπτει η σχέση:

$$y = xp + g(p) \qquad (9.2)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) ως προς x παίρνουμε

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dg}{dp}\,\frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x + g^{'}(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0 \qquad (9.3)$$

Από τη σχέση (9.3) έχουμε δύο δυνατότητες. Η πρώτη περίπτωση είναι ο μηδενισμός του $\frac{dp}{dx}$

$(\alpha)\quad \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p(x) = c,\ c$ αυθαίρετη σταθερά.

Επομένως από τη σχέση (9.2) οδηγούμαστε στην μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων

$$y(x) = xc + g(c) \qquad (9.4)$$

για τις οποίες ισχύει $y''(x) = 0$.
Η (9.4) είναι μία οικογένεια ευθειών και αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (9.1).
Εναλλακτικά, η σχέση (9.3) ικανοποιείται όταν: $(\beta)\quad x + g^{'}(p) = 0$, η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση (9.2) οδηγεί σε μία λύση εκφρασμένη στην ακόλουθη παραμετρική μορφή:

$$x = -g^{'}(p) \qquad (9.5)$$

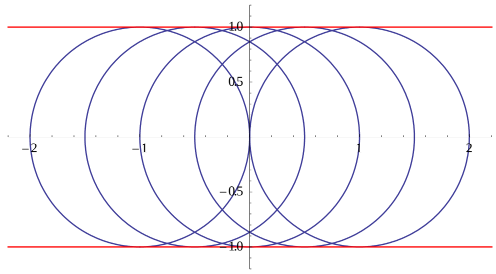
$$y = -pg^{'}(p) + g(p) \qquad (9.6)$$

Υπάρχουν περιπτώσεις που η παράμετρος p απαλείφεται. Πράγματι, αν η συνάρτηση $g'(p)$ αντιστρέφεται [δηλαδή αν $g'(p)$ είναι γνησίως μονότονη], τότε από την (9.5) έχουμε $p = (g')^{-1}(-x) = h(x)$ σε κατάλληλο διάστημα, και έτσι προκύπτει άμεσα η λύση (σε καρτεσιανές συντεταγμένες)

$$y(x) = x(g^{'})^{-1}(-x) + g\big((g')^{-1}(-x)\big) = xh(x) + g\big(h(x)\big) \qquad (9.7)$$

Η λύση (9.7) δεν αποτελεί μέλος της οικογένειας ευθειών (9.4), είναι ***ιδιάζουσα λύση*** και έχει ιδιαίτερη σχέση με την μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών (9.4).

Για τις διαφορικές εξισώσεις Clairaut αποδεικνύεται ότι η ιδιάζουσα λύση αντιπροσωπεύει μία καμπύλη γραμμή η οποία είναι η ***περιβάλλουσα*** της οικογενείας των ευθειών της γενικής λύσης. Έστω ότι μία οικογένεια καμπυλών περιγράφεται από την εξίσωση $\Phi(x,y,c) = 0$, όπου για κάθε c ανακύπτει ένα διαφορετικό μέλος της οικογένειας. Έστω ότι η οικογένεια αυτή διαθέτει περιβάλλουσα $f(x,y) = 0$. Η περιβάλλουσα έχει την ιδιότητα ότι εφάπτεται σε κάθε μέλος της οικογενείας καμπυλών και ότι κάθε σημείο της είναι σημείο επαφής με κάποιο μέλος της οικογενείας αυτής. Για παράδειγμα, η οικογένεια καμπυλών: $\Phi(x,y,c) = (x-c)^2 + y^2 - 1 = 0$, που είναι μία οικογένεια κύκλων ακτίνας 1, που τα κέντρα τους είναι πάνω στο άξονα x, έχει περιβάλλουσες τις ευθείες $y = 1$ και $y = -1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η εξίσωση της περιβάλλουσας προκύπτει απαλείφοντας την σταθερά c από τις εξισώσεις:

$$\Phi(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

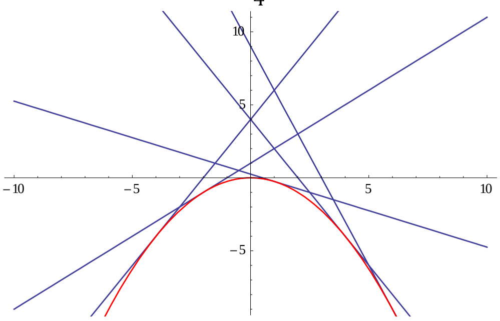
Για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε: $\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 2(x - c) = 0 \Rightarrow c = x$, οπότε αντικαθιστώντας στην $(x - c)^2 + y^2 - 1 = 0$, έχουμε $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Είναι αναμενόμενο, η περιβάλλουσα μιας οικογένειας λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, διότι κάθε σημείο της ανήκει σε ένα μέλος της οικογένειας και η κλίση της στο σημείο αυτό ταυτίζεται με την αντίστοιχη κλίση της συγκεκριμένης καμπύλης της οικογένειας στο ίδιο σημείο.

<u>Παράδειγμα 9.1</u>: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y = xy' + (y')^2$ (1)
<u>Επίλυση</u>: Θέτουμε $y' = p$, οπότε η (1) γράφεται $y = xp + p^2$ (2).
Παραγωγίζουμε τη (2) ως προς x και έχουμε:
$p = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow (x + 2p)\frac{dp}{dx} = 0$

$$=> \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c\,, & (\alpha) \\ x + 2p \Rightarrow x = -2p\,, & (\beta) \end{cases}$$

(α) Θέτοντας στην εξίσωση (2) όπου $p = c$ έχουμε τη γενική λύση της (1): $y(x) = xc + c^2$.
(β) Επιλύοντας την (β) ως p, έχουμε ότι $p = -\frac{x}{2}$, οπότε από την εξίσωση (2) προκύπτει η λύση της (1): $y(x) = -\frac{x^2}{4}$, η οποία είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ και περιβάλλουσα της οικογενείας ευθειών της γενικής λύσης.
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι ολοκληρωτικές καμπύλες $y(x) = xc + c^2$ για κάποιες τιμές της σταθεράς c και η περιβάλλουσα αυτών $y(x) = -\frac{x^2}{4}$.



<u>Παράδειγμα 9.2</u>: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$ (1)
<u>Επίλυση</u>: Θέτουμε $y' = p$, οπότε η (1) γράφεται $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$ (2).
Παραγωγίζουμε τη (2) ως προς x και έχουμε:
$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0$

$$=> \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c & (\alpha) \\ x + \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} & (\beta) \end{cases}$$

(α) Θέτοντας στην εξίσωση (2) όπου $p = c$ έχουμε τη γενική λύση της (1):

$$y(x) = xc + \sqrt{1+c^2}, c \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

(β) Η εξίσωση (2) λόγω της (β) γράφεται

$$y = -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2} = \frac{-p^2+1+p^2}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

Και έτσι λαμβάνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad (i) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad (ii) \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

που ορίζουν παραμετρικά την ιδιάζουσα λύση της ΔΕ (1). Είναι δε πάντοτε $xp \leq 0$.

Δια απαλοιφής της παραμέτρου p από τις παραπάνω εξισώσεις θα προκύψει η ιδιάζουσα λύση στη μορφή: $y(x) = xh(x) + \sqrt{1+h(x)^2}$ όπου $p = h(x)$ είναι η αντίστροφος συνάρτηση της

$$x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

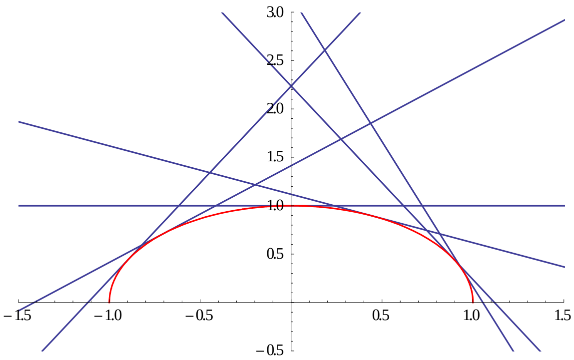
Επιλύοντας αυτήν ως προς p, έχουμε

$x^2 = \frac{p^2}{1+p^2} \Rightarrow x^2(1+p^2) = p^2 \Rightarrow p^2(1-x^2) = x^2 \Rightarrow p^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\,,\ x \in (-1,1)$

Εδώ θα πρέπει να κρατήσουμε το αρνητικό πρόσημο διότι $xp \leq 0$. Επομένως, η αντίστροφος της (i) είναι $p(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\,,\ x \in (-1,1)$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ii) έχουμε: $y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2}\,, x \in (-1,1)$.

Η λύση αυτή είναι η ημιπεριφέρεια, πάνω από τον άξονα x, κέντρου $(0,0)$, ακτίνας 1 και χωρίς τα σημεία πάνω στον άξονα x.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι ολοκληρωτικές καμπύλες $y(x) = xc + \sqrt{1+c^2}$, για κάποιες τιμές της σταθεράς c και η περιβάλλουσα αυτών: $y(x) = \sqrt{1-x^2}\,, x \in (-1,1)$.



Διαφορική εξίσωση D' Alembert-Lagrange

Η διαφορική εξίσωση Lagrange είναι της μορφής: $y = xf(y') + g(y')$ (9.8)

όπου η συνάρτηση $f(y') \neq y'$.

Αν $f(y') = y'$ τότε είναι η εξίσωση Clairaut που μελετήθηκε παραπάνω.

Ο μετασχηματισμός $p(x) = y'$ στην (1) οδηγεί στην εξίσωση: $y = xf(p)) + g(p)$ (9.9)

Με συνεπακόλουθη παραγώγιση ως προς x έχουμε τη σχέση:

$$p - f(p) = \left(xf'(p) + g'(p)\right)\frac{dp}{dx} \tag{9.10}$$

Η εξίσωση $p - f(p) = 0$, ενδέχεται να έχει ένα σύνολο ριζών $p_i, i = 1,2, \dots n$. Στην περίπτωση αυτή οι σταθερές συναρτήσεις $p(x) = p_i$ ικανοποιούν την εξίσωση (9.10) και οδηγούν-δια μέσου της σχέσης (9.9)- στις λύσεις $y_i(x) = xf(p_i)) + g(p_i), i = 1,2, \dots n$, - ιδιάζουσες λύσεις.

Αν αποφύγουμε τις ρίζες p_i και θεωρήσουμε τα υποδιαστήματα όπου $p \neq f(p)$, τότε η συνάρτηση $p(x)$ αντιστρέφεται με παράγωγο συνάρτηση το αντίστροφο της $p'(x)$ ($\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}}$), οπότε από τη σχέση (9.10) προκύπτει πως

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xf'(p)}{p-f(p)} + \frac{g'(p)}{p-f(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{xf'(p)}{f(p)-p}x = \frac{g'(p)}{p-f(p)} \tag{9.11}$$

Η (9.11) είναι μια γραμμική μη ομογενής διαφορική εξίσωση 1[ης] τάξης ως προς $x(p)$ και η οποία λύνεται κατά τα γνωστά. Η λύση της είναι της μορφής $x = x(p,c)$ και μαζί με την (9.9) αποτελεί την γενική λύση της (1) σε παραμετρική μορφή:

$$\begin{aligned} x &= x(p,c) \\ y &= x(p,c)f(p)) + g(p) \end{aligned} \tag{9.12}$$

<u>Παράδειγμα 9.1</u>: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y = 2xy' - (y')^2$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Θέτουμε $y' = p$, οπότε η (1) γράφεται $y = 2xp - p^2$ (2).

Παραγωγίζουμε τη (2) ως προς x και έχουμε:

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow -p = (2x - 2p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = (2p - 2x)\frac{dp}{dx}.$$

Για $p \neq 0$, διαιρούμε με p και έχουμε

$$1 = \left(2 - 2\frac{x}{p}\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = 2 - \frac{2}{p}x \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2, \quad p \neq 0 \quad (3)$$

Η (3) είναι μία γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση 1[ης] τάξης και η λύση της είναι:

$$x(p) = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}, \quad p \neq 0 \qquad (4)$$

η οποία μαζί με την εξίσωση (2):

$$y(p) = 2\left(\frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}\right)p - p^2 = \frac{p^2}{3} + \frac{2c}{p} \qquad (5)$$

Οι εξισώσεις (4) και (5) εκφράζουν τις λύσεις της (1) σε παραμετρική μορφή με παράμετρο p.

Στην περίπτωση που το $c = 0$, η (4) επιλύεται ως προς p, οπότε έχουμε: $p = \frac{3}{2}x$ και αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε τη λύση: $y(x) = \frac{3}{4}x^2$.

Υποθέσαμε παραπάνω ότι $p \neq 0$. Για $p = 0$, από την εξίσωση (2) προκύπτει η ευθεία-λύση $y = 0$ της ΔΕ(1), η οποία εφάπτεται της παραβολής $y(x) = \frac{3}{4}x^2$ στο σημείο 0. Η λύση αυτή είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ (1).

<u>Παράδειγμα 9.2</u>: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y = x(y')^2 + (y')^3$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Θέτουμε $y' = p$, οπότε η (1) γράφεται $y = xp^2 + p^3$ (2).

Παραγωγίζουμε τη (2) ως προς x και έχουμε:

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow p - p^2 = (2x + 3p)p\frac{dp}{dx} \Rightarrow p(1 - p) = (2x + 3p)p\frac{dp}{dx}.$$

Για $p \neq 0$ και $p \neq 1$, έχουμε

$1 = \frac{(2+3p)}{(1-p)}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2}{1-p}x + \frac{3p}{1-p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = -\frac{3p}{p-1}, \quad p \neq 0, p \neq 1$ (3)

Η (3) είναι μία γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης και η λύση της είναι:

$$x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left[c - p^3 + \frac{3}{2}p^2\right], \quad (4)$$

Από την εξίσωση (2) και (4) έχουμε

$$y(p) = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left[c - p^3 + \frac{3}{2}p^2\right] + p^3 \qquad (5)$$

Οι εξισώσεις (4) και (5), για $p \neq 0$ και $p \neq 1$, αποτελούν την γενική λύση της ΔΕ (1) σε παραμετρική μορφή.

(i) Για $p = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$, έχουμε την μηδενική λύση της ΔΕ (1): $y = 0$, άλλη συνάρτηση $y = c \neq 0$ δεν αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης.

(ii) Για $p = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$, έχουμε από την εξίσωση (2) τη λύση: $y = x + 1$.

Οι παραπάνω λύσεις είναι ιδιάζουσες λύσεις της ΔΕ (1).