4. Ομογενείς και Σχεδόν Ομογενείς (Μη Γραμμικές) Διαφορικές Εξισώσεις

Α. Μη Γραμμικές Ομογενείς ΔΕ

Ορισμός 4.1: Μία συνάρτηση $f(x,y)$ που ορίζεται στο κατάλληλο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ [$\forall (x,y) \in D$ και $\forall \lambda > 0,\ (\lambda x, \lambda y) \in D$] λέγεται ομογενής βαθμού α αν $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x,y)$.

Παραδείγματα:

(i) Η συνάρτηση $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$, είναι ομογενής 4ου βαθμού διότι $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^4 f(x,y)$.

(ii) Η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{x^2+5xy}{2x-y}$ είναι ομογενής 1ου βαθμού διότι $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + 5\lambda^2 xy}{\lambda(2x-y)} = \lambda f(x,y)$

(iii) Η συνάρτηση $f(x,y) = sin\left(\frac{x+2y}{2x-3y}\right)$, είναι ομογενής μηδενικού βαθμού διότι $f(\lambda x, \lambda y) = sin\left(\frac{\lambda x + 2\lambda y}{2\lambda x - 3\lambda y}\right) = sin\left(\frac{x+2y}{2x-3y}\right)$

Όταν η $f(x,y)$είναι ομογενής μηδενικού βαθμού δεν εξαρτάται από τα x, y χωριστά, αλλά από το λόγο x/y

Ορισμός 4.2: Η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

$$y'(x) = f(x,y), \quad (x,y) \in D \qquad \text{(A 4.1)}$$

ονομάζεται ***(μη γραμμική) ομογενής ΔΕ*** αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

Ανάλογα ορίζεται και η μη γραμμική ομογενής ΔΕ όταν είναι της μορφής

$$M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0 \text{ ή } M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \text{(A 4.2)}$$

όπου τώρα οι συντελεστές $M(x,y)$, $N(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ιδίου βαθμού α.

Επίλυση της μη γραμμικής ομογενούς ΔΕ: Για την επίλυση μίας μη γραμμικής ομογενούς ΔΕ (Α 4.1) κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$y(x) = x\,u(x) \qquad \text{(A 4.3)}$$

και η ΔΕ μετατρέπεται σε μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ως προς $u(x)$, οπότε επιλύεται σύμφωνα με τη διαδικασία της Ενότητας ΙΙ.3. Πράγματι, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό (Α 4.3) η ΔΕ (Α 4.1) γράφεται

$$u'x + u = F(u) \Rightarrow u'x = F(u) - u$$

όπου $u = \frac{y}{x}$. Υποθέτοντας ότι $F(u) - u \neq 0$, και $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{1}{[F(u)-u]}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{[F(u)-u]} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{[F(u)-u]} = ln|x| + c \qquad \text{(A 4.4)}$$

Επιλύουμε την (Α 4.4) ως προς $u(x)$ και αντικαθιστούμε το $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ για να προσδιορίσουμε την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$.

Παράδειγμα Α 4.1: Να λυθεί η ΔΕ: $y' = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ (1)

Επίλυση: Η $f(x,y) = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ είναι ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού ως προς x, y, θέτοντας στην (1), $y = xu(x)$, έχουμε

$$u'x + u = u^2 + 2u \Rightarrow u'x = u^2 + u \Rightarrow \frac{du}{u(u+1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{(u+1-u)du}{u(u+1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} - \frac{du}{(u+1)} = \frac{dx}{x}$$

όπου θεωρήσαμε ότι $u \neq 0,\ u+1 \neq 0$ και $x \neq 0$. Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$ln|u| - ln|u+1| = ln|x| + c \Rightarrow ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = ln|x| + c \Rightarrow \left|\frac{u}{u+1}\right| = e^c|x| \Rightarrow$$

$$\frac{u}{u+1} = cx, \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Για $u = \frac{y}{x}$ έχουμε

$$\frac{y}{y+x} = cx \Rightarrow y(x) = \frac{cx^2}{1-cx}, \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Από τους περιορισμούς $u \neq 0$, και $u + 1 \neq 0$ προκύπτουν οι λύσεις $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $y(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $y(x) = 0$ προκύπτει από την γενική λύση, για $c = 0$, ενώ η $y(x) = -x$ είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ.
Επομένως, η πλήρης λύση της ΔΕ (1) είναι:

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{cx^2}{1-cx}, c \in \mathbb{R} \ -\text{γενική λύση} \\ y(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R} - \text{ιδιάζουσα λύση} \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα Α 4.2</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $xy' = y(lny - lnx + 1), x > 0, y > 0$ (1), $y(1) = 2$

<u>Επίλυση</u>: Η $f(x,y) = \frac{y(lny - lnx + 1)}{x} = \frac{y}{x}\left(ln\frac{y}{x} + 1\right)$ είναι ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού ως προς x, y, θέτοντας στην (1), $y = xu(x)$, έχουμε

$$u'x + u = u(lnu + 1) \Rightarrow u'x = ulnu \Rightarrow (\text{για } lnu \neq 0)$$

$$\frac{du}{ulnu} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dlnu}{lnu} = \frac{dx}{x} \Rightarrow ln|lnu| = ln|x| + c \Rightarrow |lnu| = e^c|x| \Rightarrow lnu = cx \Rightarrow$$

$$u = e^{cx} \Rightarrow y(x) = xe^{cx}, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Από τον περιορισμό $lnu \neq 0$, έχουμε τη λύση $y(x) = x, x > 0$, η οποία προκύπτει από τη γενική λύση για $c = 0$. Άρα η πλήρης λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = xe^{cx}, c \in \mathbb{R}$$

<u>Ειδική λύση</u>: Από τη γενική λύση για $x = 1$ και $y = 2$, έπεται ότι $2 = e^c \Rightarrow c = ln2$, οπότε η λύση στο ΠΑΤ είναι

$$y(x) = xe^{xln2} \Rightarrow y(x) = x(2^x), \qquad x > 0$$

<u>Παράδειγμα Α 4.3</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Η ΔΕ (1) δίνεται στη διαφορική μορφή: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, όπου οι συναρτήσεις $M(x,y) = x^2 - xy + y^2$ και $N(x,y) = -xy$ είναι ομογενείς του ιδίου βαθμού (2^{ου} βαθμού).
Επομένως, η ΔΕ (1) είναι μη γραμμική ομογενής. Θέτοντας $y = xu(x)$, έχουμε $dy = xdu + udx$ και με αντικατάσταση στη ΔΕ (1) προκύπτει

$$(x^2 - x^2u + x^2u^2)dx - x^2u(xdu + udx) = 0 \Rightarrow x^2(1-u)dx - x^3udu = 0 \Rightarrow$$

$$(1-u)dx = xudu$$

Για $u \neq 1, x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{udu}{u-1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{(u-1+1)du}{u-1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow du + \frac{du}{u-1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow u + ln|u-1| = -ln|x| + c \Rightarrow$$

$$ln|u-1| + ln|x| = c - u \Rightarrow ln|x(u-1)| = c - u \Rightarrow |x(u-1)| = e^c e^{-u} \Rightarrow x(u-1) = ce^{-u} \Rightarrow$$

$$e^{\frac{y}{x}}(y-x) = c, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, x \neq 0, y \neq x$$

Από τον περιορισμό $u \neq 1$, έχουμε τη λύση $y(x) = x$, η οποία προκύπτει από τη γενική λύση για $c = 0$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$e^{\frac{y}{x}}(y-x) = c, \quad c \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

<u>Παρατήρηση Α 4.1</u>: Αν στη ΔΕ (1) θεωρήσουμε ότι η $x(y)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής y, τότε $x(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ (1) διότι την ικανοποιεί και δεν προκύπτει από τη γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς c.

<u>Παράδειγμα Α 4.4</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $y' = -\frac{4x+3y}{2x+y},\ y(1)=0$ (1).

<u>Επίλυση</u>: Η ΔΕ είναι ομογενής και θέτοντας $y = xu(x)$, έχουμε

$u'x + u = -\frac{4+3u}{2+u} \Rightarrow \frac{(u+2)du}{(u+1)(u+4)} = -\frac{dx}{x}$, για $u \neq -1, u \neq -4, x \neq 0$

- $\frac{(u+2)}{(u+1)(u+4)} = \frac{A}{(u+1)} + \frac{B}{(u+4)} \Rightarrow A(u+4) + B(u+1) = u+2 \Rightarrow (A+B)u + (4A+B) = u+2$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 4A+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1/3 \\ B=2/3 \end{array}$

Επομένως, η ΔΕ γράφεται

$$\frac{1}{3}\frac{du}{(u+1)} + \frac{2}{3}\frac{du}{(u+4)} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \cdots \Rightarrow ln|u+1| + 2ln|u+4| = -3ln|x| + c \Rightarrow$$

$$|u+1|(u+4)^2 = c|x|^{-3}, \qquad x \neq 0, \qquad c > 0$$

$$(y+x)(y+4x)^2 = c, \qquad x \neq 0, \qquad c \neq 0$$

Για $x = 1$ και $y = 0$ προκύπτει ότι $c = 16$.

Άρα το ειδικό ολοκλήρωμα είναι $(y+x)(y+4x)^2 = 16$

<u>Β. Μη γραμμικές Σχεδόν Ομογενείς ΔΕ</u>

Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης οι οποίες με κατάλληλο μετασχηματισμό μπορούν να αναχθούν σε ομογενείς ονομάζονται ***σχεδόν ομογενείς (μη γραμμικές) διαφορικές εξισώσεις***.

Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η ΔΕ:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right) \qquad \text{(B 4.1)}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Στη περίπτωση που $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, θεωρούμε τις μεταβλητές u, v, που ορίζονται από τις σχέσεις

$$x = u + k,\ y = v + l \qquad \text{(B 4.2)}$$

Τότε $\frac{dy}{dx} = \frac{d(v+l)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dv}{du}$ και η ΔΕ (B 4.1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + (\alpha_1 k + \beta_1 l + \gamma_1)}{\alpha_2 u + \beta_2 v + (\alpha_2 k + \beta_2 l + \gamma_2)}\right) \qquad \text{(B 4.3)}$$

Επιλέγουμε τα k, l να είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{array}{l} \alpha_1 k + \beta_1 l + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 k + \beta_2 l + \gamma_2 = 0 \end{array} \qquad \text{(B 4.4)}$$

Εφόσον $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ η λύση του συστήματος προσδιορίζεται μονοσήμαντα ως προς k, l.

Έτσι η ΔΕ (B 4.3) γράφεται στην ομογενή μορφή

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{\alpha_1 u + \beta_1 v}{\alpha_2 u + \beta_2 v}\right) \qquad \text{(B 4.5)}$$

και επιλύεται σύμφωνα με την μέθοδο της υποενότητας Α.

<u>Παράδειγμα Β 4.1</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $y' = -\frac{4x+3y-5}{2x+y-3}$ (1).

<u>Επίλυση</u>: Για την ΔΕ (1) ισχύει: $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 4(1) - 2(3) = -2 \neq 0$. Επομένως, το σύστημα

$$\begin{array}{c} 4k + 3l - 5 = 0 \\ 2k + l - 3 = 0 \end{array}$$

έχει μοναδική λύση ως προς k και l. Επιλύοντας το αλγεβρικό σύστημα βρίσκουμε

$$k = 2 \text{ και } l = -1.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία η ΔΕ (1) για $x = u + 2,\ y = v - 1$ ανάγεται στη ομογενή ΔΕ:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{4u+3v}{2u+v} \qquad (2)$$

Το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ (2) προσδιορίσθηκε στο παράδειγμα Α 4.4 ως ακολούθως

$$(v+u)(v+4u)^2=c,\ \ c\neq 0$$

Άρα για $u=x-2,\ \ v=y+1$, προσδιορίζουμε το γενικό ολοκλήρωμα συναρτήσει της $y(x)$.

$$(y+x-1)(y+4x-7)^2=c,\ \ c\neq 0$$

(ii) Στη περίπτωση που $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0\Rightarrow\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}$, τότε θέτουμε:

$$v=(\alpha_1x+\beta_1y){\alpha_1}^{-1}=(\alpha_2x+\beta_2y){\alpha_2}^{-1} \qquad \text{(B 4.6)}$$

Από τις σχέσεις (Β 4.6) προκύπτει

$$\frac{dv}{dx}=1+\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)$$

Και η ΔΕ (Β 4.1) γράφεται

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)=f\left(\frac{\alpha_1v+\gamma_1}{\alpha_2v+\gamma_2}\right) \qquad \text{(B 4.7)}$$

Η ΔΕ (Β 4.7) είναι μία ΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών, διότι μπορεί ν γραφεί στη μορφή

$$\frac{dv}{dx}=1+\frac{\alpha_1}{\beta_1}f\left(\frac{\alpha_1v+\gamma_1}{\alpha_2v+\gamma_2}\right)\Rightarrow\frac{dv}{\left[1+\frac{\alpha_1}{\beta_1}f\left(\frac{\alpha_1v+\gamma_1}{\alpha_2v+\gamma_2}\right)\right]}=dx \qquad \text{(B 4.8)}$$

<u>Παράδειγμα Β 4.2</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $(2x+3y-1)dx+(2x+3y+2)dy=0,\ \ y(1)=3$ (1).

<u>Επίλυση</u>: Η ΔΕ (1) είναι της μορφής (Β 4.1) με $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=2(3)-3(2)=0$.

Επομένως, θέτοντας $v=\frac{(2x+3y)}{2}$, έχουμε

$$\frac{dv}{dx}=1+\frac{3}{2}\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ του ΠΑΤ (1) προκύπτει μία εξίσωση ως προς $v(x)$ χωριζόμενων μεταβλητών ως ακολούθως

$$\frac{2}{3}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)=-\frac{(2x+3y-1)}{(2x+3y+2)}=-\frac{2v-1}{2v+2}\Rightarrow\frac{dv}{dx}=1-\frac{3}{2}\left(\frac{2v-1}{2v+2}\right)=\frac{7-2v}{4v+4}\Rightarrow$$

$$\frac{(2v+2)dv}{(7-2v)}=\frac{1}{2}dx$$

Επιλύοντας βρίσκουμε

$$v+\frac{9}{2}ln|2v-7|=-\frac{1}{2}x+c,c\in\mathbb{R}$$

Η αντικατάσταση του $v=\frac{(2x+3y)}{2}$ στη παραπάνω εξίσωση, δίνει

$$\frac{(2x+3y)}{2}+\frac{9}{2}ln|2x+3y-7|=-\frac{1}{2}x+c\Rightarrow x+3y+9ln|2x+3y-7|=2c=C,C\in\mathbb{R}$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ του ΠΑΤ (1). Από την αρχική συνθήκη $y(1)=3$ βρίσκουμε ότι $C=4+3ln4$. Άρα το ειδικό ολοκλήρωμα είναι

$$x+3y+9ln|2\mathrm{x}+3\mathrm{y}-7|=4+3ln4$$

5. Πλήρεις (ή Ακριβείς) Διαφορικές Εξισώσεις ή Εξισώσεις Ολικών Διαφορικών

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Διαφορικές Εξισώσεις της μορφής:

$$M(x,y)+N(x,y)y'(x)=0 \qquad (5.1)$$

ή

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (5.2)$$

Ορισμός 5.1: Έστω $M,N: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις στο ανοικτό και απλά συνεκτικό πεδίο D. Μία ΔΕ της μορφής (5.1) ή (5.2) καλείται ***πλήρης ή ακριβής ή ολικού διαφορικού*** αν υπάρχει συνάρτηση $F: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους στο D, έτσι ώστε

$$F_x=M(x,y) \text{ και } F_y=N(x,y) \qquad (5.3)$$

Τότε

$$M(x,y)+N(x,y)y'(x)=0 \Leftrightarrow F_x(x,y)+F_y(x,y)y'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{dF(x,y(x))}{dx}=0 \Leftrightarrow$$
$$F(x,y(x))=c \qquad (5.4)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η σχέση (5.4) είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ (1).

Αντίστοιχα για τη ΔΕ (5.2) έχουμε

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Leftrightarrow F_x(x,y)dx+F_y(x,y)dy=0 \Leftrightarrow dF(x,y)=0 \Leftrightarrow F(x,y)=c$$

Η συνάρτηση $F(x,y)$ ονομάζεται παράγουσα ή αρχική της ΔΕ (5.1) ή (5.2).

(Στη φυσική ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{v}=(M,N)$ ονομάζεται πεδίο κλίσεων ή συντηρητικό πεδίο όταν πηγάζει από κάποιο δυναμικό. Η συνάρτηση $F(x,y)$ ονομάζεται δυναμικό του διανυσματικού πεδίου).

Επομένως οι λύσεις της ΔΕ (5.1) ή (5.2), που είναι πλήρης, δίνονται από τη (5.4) με την προϋπόθεση ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε μία παράγουσα της ΔΕ.

Προκύπτουν τα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Πως γνωρίζουμε αν μία ΔΕ είναι πλήρης;

β) Πως προσδιορίζουμε την παράγουσα αν γνωρίζουμε ότι είναι πλήρης;

Η απάντηση στα ερωτήματα αυτά δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.1: Έστω η ΔΕ: $M(x,y)+N(x,y)y'(x)=0$ (1), όπου M,N συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους στο απλά συνεκτικό πεδίο(*) $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Τότε η ΔΕ (1) είναι πλήρης [$\Rightarrow \exists\, F(x,y)$: $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ και $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$] εάν και μόνο εάν

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (5.5)$$

(*) Ένα σύνολο $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ονομάζεται απλά συνεκτικό πεδίο, αν κάθε κλειστή καμπύλη του πεδίου D περιορίζει ένα φραγμένο τμήμα που βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο D.

(Από φυσικής πλευράς, αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{v}=(M,N)$ η συνθήκη (5.5) είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\nabla\times\vec{v}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$ που είναι η απαίτηση για να είναι το πεδίο αστρόβιλο. Αν το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό τότε ο στροβιλισμός του πεδίου είναι μηδενικός. Το αντίστροφο, αν ο στροβιλισμός είναι μηδενικός και το πεδίο ορισμού της διανυσματικής συνάρτησης είναι ένα απλά συνεκτικό πεδίο τότε το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό).

<u>Απόδειξη</u>: (i) Έστω ότι η ΔΕ (5.1) είναι πλήρης, τότε υπάρχει $F(x,y)$ τέτοια ώστε

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)\Rightarrow\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}\\ \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)\Rightarrow\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Εφόσον, M_y και N_x είναι συνεχείς, έπεται ότι F_{xy} και F_{yx} είναι συνεχείς. Αυτό εγγυάται την ισότητα τους και έτσι αποδεικνύεται η σχέση (5.5).

(ii) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (5.5). Θα δείξουμε ότι $\exists\, F(x,y)$: $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ και $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$

Έστω $\varphi(x,y)$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=M(x,y)$. Μία τέτοια συνάρτηση προκύπτει ολοκληρώνοντας την $M(x,y)$ ως προς x, θεωρώντας το y σταθερό. Άρα

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}\xRightarrow{\text{από την } (5.5)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία σχέση ως προς ως προς x, θεωρώντας το y σταθερό. Στην ολοκλήρωση αυτή ως προς x, η «αυθαίρετη σταθερά» μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση $h(y)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=N(x,y)+h(y)$$

Για τη συνάρτηση: $F(x,y)=\varphi(x,y)-\int h(y)dy$ έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=M(x,y) \text{ και}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-h(y)=N(x,y)+h(y)-h(y)=N(x,y)$$

Άρα η ΔΕ (5.1) είναι πλήρης.

Από την απόδειξη του θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι για την επίλυση της ΔΕ (5.1), που είναι πλήρης, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

(α) Ελέγχουμε αν είναι πλήρης, δηλαδή αν ισχύει η συνθήκη $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Αν είναι πλήρης έπεται ότι $\exists\, F(x,y)$: $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ (5.6) και $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$ (5.7)

(β) Ολοκληρώνουμε την σχέση (5.6) ως προς x, θεωρώντας το y σταθερό και γράφουμε

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+h(y) \qquad (5.8)$$

(γ) Παραγωγίζουμε την σχέση (5.8) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερό, και κάνοντας χρήση της σχέσης (5.7) : $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$, υπολογίζουμε την $h(y)$. Αντικαθιστώντας την $h(y)$ στην εξίσωση (5.8) προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $F(x,y)$.

Η σχέση $F(x,y)=c$ μας δίνει το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ (1).

Σημείωση: Ο προσδιορισμός της συνάρτησης $F(x,y)$ και κατ' επέκταση του γενικού ολοκληρώματος μπορεί να γίνει με ανάλογη διαδικασία ολοκληρώνοντας τη σχέση (5.7) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερό, οπότε $F(x,y)=\int N(x,y)dy+g(x)$. Στη συνέχεια η συνάρτηση $g(x)$ προσδιορίζεται από την σχέση (5.6).

Παράδειγμα 5.1: Να λυθεί η ΔΕ: $e^x+y+siny+(e^y+x+xcosy)y'=0$

Επίλυση: Η ΔΕ είναι πλήρης διότι για $M(x,y)=e^x+y+siny$ και $N(x,y)=e^y+x+xcosy$ έχουμε

$$M_y=1+cosy=N_x \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Άρα $\exists\, F(x,y)$: $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ (5.6) και $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$ (5.7)

Από την σχέση (5.6) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)=e^x+y+siny\Rightarrow F(x,y)=\int(e^x+y+siny)\,dx+h(y)\Rightarrow$$

$$F(x,y)=e^x+xy+xsiny+h(y)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y και συνδυάζοντας την με τη σχέση (5.7) προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)\Rightarrow x+xcosy+h'(y)=e^y+x+xcosy\Rightarrow h'(y)=e^y\Rightarrow h(y)=e^y+c_1$$

Προσοχή! Κατά τον υπολογισμό της συνάρτησης $h'(y)$, οι όροι που περιλαμβάνουν τη μεταβλητή x θα πρέπει να απαλείφονται, ώστε το $h'(y)$ να εξαρτάται μόνο από το y.

Άρα $F(x,y) = e^x + x(y + siny) + e^y + c_1$

Επομένως το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ είναι

$$F(x,y) = c \Rightarrow e^x + x(y + siny) + e^y + c_1 = c \Rightarrow e^x + x(y + siny) + e^y = c - c_1$$
$$e^x + x(y + siny) + e^y = C,\ (C = c - c_1)$$

<u>Παράδειγμα 5.2</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0,\ y(1) = 3$

<u>Επίλυση</u>: Για $M(x,y) = 2x - y$ και $N(x,y) = 2y - x$ έχουμε

$$M_y = -1 = N_x$$

Άρα η ΔΕ είναι πλήρης $\Rightarrow\ \exists\, F(x,y)\colon \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ (5.6) και $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ (5.7)

Από την σχέση (5.7) έχουμε

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = 2y - x \Rightarrow F(x,y) = \int (2y - x)\,dy + g(x) \Rightarrow$

$$F(x,y) = y^2 - xy + g(x)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς x και συνδυάζοντας την με τη σχέση (5.6) προκύπτει

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow -y + g'(x) = 2x - y \Rightarrow g'(x) = 2x \Rightarrow g(x) = x^2 + c_1$

και $F(x,y) = y^2 - xy + x^2 + c_1$

Επομένως το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ είναι

$$F(x,y) = y^2 - xy + x^2 + c_1 = c \Rightarrow y^2 - xy + x^2 = c - c_1$$
$$y^2 - xy + x^2 = C$$

Για την εύρεση της ειδικής λύσης θέτουμε στο γενικό ολοκλήρωμα $x = 1, y = 3$ και έτσι προσδιορίζουμε τη σταθερά C

$$C = 9 - 3 + 1 = 7$$

Άρα το ειδικό λύση είναι: $y^2 - xy + x^2 = 7 \Rightarrow y(x) = \frac{x \pm \sqrt{28 - 3x^2}}{2}$

Η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι αυτή με το θετικό πρόσημο

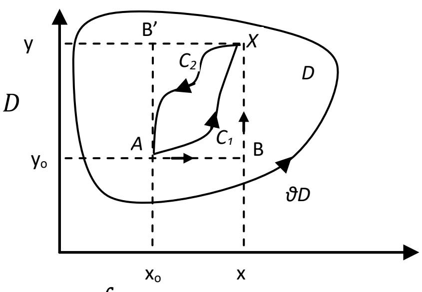
$$y(x) = \frac{x + \sqrt{28 - 3x^2}}{2}, |x| < \sqrt{28/3}$$

<u>Παρατήρηση 5.1</u>: Η ΔΕ είναι και ομογενής, επομένως μπορεί να επιλυθεί και με την μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας για τις ομογενείς μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

<u>Παρατήρηση 5.2</u>: *Το* δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 5.1 μπορεί να αποδειχθεί και με έναν διαφορετικό τρόπο, ο οποίος οδηγεί απευθείας στην εύρεση της ειδικής λύσης που διέρχεται από το σημείο (x_o, y_o).

Από το θεώρημα του Green που δίνει την σχέση μεταξύ του διπλού ολοκληρώματος και του επικαμπυλίου ολοκληρώματος έχουμε:

$\oint_{\partial D} Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dxdy = 0$



δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε μία κλειστή καμπύλη που ανήκει στο D είναι μηδέν. Αυτό συνεπάγεται ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο D είναι ανεξάρτητο του δρόμου, δηλαδή για δύο τυχαία σημεία $(A, X) \in D$ είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη που ενώνει το σημείο A με το σημείο X. Πράγματι για την κλειστή καμπύλη $\widehat{AXA}$ έχουμε ότι

$$\oint_{\widehat{AXA}} Mdx + Ndy = \int_{\widehat{AX}_{C_1}} Mdx + Ndy + \int_{\widehat{XA}_{C_2}} Mdx + Ndy = 0 \Rightarrow \int_{\widehat{AX}_{C_1}} Mdx + Ndy - \int_{\widehat{AX}_{C_2}} Mdx + Ndy = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\widehat{AX}_{C_1}} Mdx + Ndy = \int_{\widehat{AX}_{C_2}} Mdx + Ndy$$

Αν $A(x_o, y_o)$ είναι ένα ορισμένο σημείο του D, τότε $\forall X(x,y) \in D$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από το A στο X εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες του σημείου X και όχι από την καμπύλη που ενώνει τα σημεία A και X. Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από το A στο X ορίζει μία συνάρτηση:

$$F(x,y) = \int_{\widehat{AX}} Mdx + Ndy\,,\ \forall X(x,y) \in D \qquad (5.9)$$

Αν επιλέξουμε για δρόμο ολοκλήρωσης γραμμές παράλληλες με τους άξονες $(A \to B, B \to X)$, έχουμε

$$F(x,y) = \int_{\widehat{AX}} Mdx + Ndy = \int_{\widehat{AB}} Mdx + \cancel{Ndy} + \int_{\widehat{BX}} \cancel{Mdx} + Ndy = \int_{x_o}^{x} M(t,y_o)dt + \int_{y_o}^{y} N(x,t)dt \qquad (5.10)$$

Οπότε, αν παραγωγίσουμε μερικώς την $F(x,y)$ ως προς y, έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

Παραγωγίζοντας μερικώς την (5.10) ως προς x προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y_o) + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_o}^{y} N(x,t)dt = M(x,y_o) + \int_{y_o}^{y} \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}dt =$$

$$= M(x,y_o) + \int_{y_o}^{y} \frac{\partial M(x,t)}{\partial t}dt = M(x,y_o) + M(x,y) - M(x,y_o) = M(x,y)$$

Έτσι αποδείχθηκε ότι αν ισχύει η εξίσωση (5.5) η ΔΕ είναι πλήρης. Η παράγουσα της ΔΕ προσδιρίζεται από την εξίσωση (5.10) και επομένως το γενικό ολοκλήρωμα είναι

$$F(x,y) = \int_{x_o}^{x} M(t,y_o)dt + \int_{y_o}^{y} N(x,t)dt = c \qquad (5.11)$$

Εάν έχουμε ένα ΠΑΤ με αρχική συνθήκη $y(x_o) = y_o$, τότε από τη σχέση (5.11) για $x = x_o$ και $y = y_o$ προκύπτει ότι $c = 0$, όπότε το ειδικό ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{x_o}^{x} M(t,y_o)dt + \int_{y_o}^{y} N(x,t)dt = 0 \qquad (5.12)$$

Αν ακολουθήσουμε για δρόμο ολοκλήρωσης τις γραμμές $(A \to B', B' \to X)$ τότε εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι οι εξισώσεις (5.11) και (5.12) παίρνουν αντίστοιχα τη μορφή

$$F(x,y) = \int_{x_o}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_o}^{y} N(x_o,t)dt = c \qquad (5.13)$$

$$\int_{x_o}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_o}^{y} N(x_o,t)dt = 0 \qquad (5.14)$$

<u>Παράδειγμα 5.3</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $(x^3 + xy^2 sin(2x) + y^2 sin^2(x))dx + 2xysin^2(x)dy = 0$, $y(0) = 0$.

<u>Επίλυση</u>: Για $M(x,y) = x^3 + xy^2 sin(2x) + y^2 sin^2(x)$ και $N(x,y) = 2xysin^2(x)$ έχουμε

$$M_y = 2xysin(2x) + 2ysin^2(x)$$

$$N_x = 4xysin(x)cos(x) + 2ysin^2(x) = 2xysin(2x) + 2ysin^2(x)$$

Επομένως η ΔΕ είναι πλήρης. Από τη σχέση (5.12) για $x_o = 0$ και $y_o = 0$ έχουμε

$$\int_0^x M(t,0)dt + \int_0^y N(x,t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^x t^3 dt + \int_0^y 2xtsin^2(x)dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^4}{4} + xy^2 sin^2(x) = 0 \qquad \text{είναι το ειδικό ολοκλήρωμα}$$

$$\frac{x^4}{4} + xy^2 sin^2(x) = c \qquad \text{είναι το γενικό ολοκλήρωμα}$$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (5.14) αντί της σχέσης (5.12), όμως αυτό θα οδηγούσε σε πολύπλοκους υπολογισμούς, διότι εμπεριέχει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_0^x \left(t^3 + ty^2 sin(2t) + y^2 sin^2(t)\right) dt$$