3. Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζόμενων Μεταβλητών

Στην προηγούμενη ενότητα λύσαμε τη γραμμική, ομογενή ΔΕ 1ης τάξης: $y'(x) + p(x)y(x) = 0$ ως εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και είδαμε ότι η γενική λύση της είναι η $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να λύσουμε μία μεγαλύτερη κατηγορία μη γραμμικών ΔΕ 1ης τάξης για τις οποίες η παράγωγος μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων, η μία εκ των οποίων εξαρτάται μόνο από την ανεξάρτητη μεταβλητή και η άλλη μόνο από την εξαρτημένη. Έχουμε επομένως τον γενικό τύπο

$$y'(x) = f(x)g(y), \; x \in I \qquad (3.1)$$

[Άλλες μορφές είναι $y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$ ή $\quad -f(x) + g(y)y'(x) = 0$]

Η ονομασία της διαφορικής εξίσωσης παραπέμπει στη δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε την ΔΕ χωρίζοντας τις μεταβλητές ως ακολούθως:

Για $g(y) \neq 0$ από την (3.1) έχουμε

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy(x)}{dx} = f(x) \qquad (3.2)$$

Εάν $G(y)$ είναι μία παράγουσα της $\frac{1}{g(y)}$, δηλαδή $G(y) = \int \frac{1}{g(y)}dy$ (3.3),

τότε

$$\frac{dG(y(x))}{dx} = \frac{dG(y)}{dy}\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{g(y)}\frac{dy(x)}{dx}$$

οπότε η (3.1) γράφεται

$$\frac{dG(y(x))}{dx} = f(x) \qquad (3.4)$$

Ολοκληρώνοντας την (3.3) ως προς x προκύπτει

$$G(y(x)) = \int f(x)dx + c, \; c \in \mathbb{R} \qquad (3.5)$$

Η (3.5) είναι μία αλγεβρική εξίσωση για τη λύση $y(x)$ της ΔΕ (3.1) και αποτελεί το γενικό ολοκλήρωμα (γενική λύση) της ΔΕ. Οποιαδήποτε συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί την (3.5) είναι λύση της (3.1).

Η επίλυση της ΔΕ ανάγεται στο να βρούμε μία παράγουσα της $\frac{1}{g(y)}$ και μία παράγουσα της $f(x)$.

Έτσι η σχέση (3.5) προκύπτει ισοδύναμα από την (3.2) χωρίζοντας τις μεταβλητές: $\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$ και ολοκληρώνοντας αριστερά ως προς y και δεξιά ως προς x, ως ακολούθως

$$\int^{y} \frac{1}{g(y)}dy = \int^{x} f(x)dx + c \qquad (3.6)$$

Εάν έχουμε ένα ΠΑΤ με αρχική συνθήκη $y(x_o) = y_o$ τότε από την εξίσωση (3.5), αντικαθιστώντας $x = x_o$ και $y = y_o$ προσδιορίζουμε την τιμή της σταθεράς c, έστω $c = c_o$. Οπότε το ειδικό ολοκλήρωμα (ειδική λύση) είναι

$$G(y(x)) = \int f(x)dx + c_o \qquad (3.7)$$

Διαφορετικά μπορούμε να προσδιορίσουμε την λύση στο ΠΑΤ ολοκληρώνοντας την σχέση (3.3) με κάτω όριο ολοκλήρωσης το αρχικό σημείο x_o, οπότε

$$G(y(x)) - G(y(x_o)) = \int_{x_o}^{x} f(s)ds \qquad (3.8)$$

Ή ισοδύναμα

$$\int_{y_o}^{y} \frac{1}{g(y)}dy = \int_{x_o}^{x} f(x)dx \qquad (3.9)$$

Παρατήρηση 3.1: Κατά την επίλυση της ΔΕ (3.1) υποθέσαμε ότι $g(y) \neq 0$. Αν όμως η εξίσωση $g(y) = 0$ έχει ρίζες ρ_i τότε οι σταθερές συναρτήσεις $y(x) = \rho_i$ είναι λύσεις της ΔΕ διότι μηδενίζεται η παράγωγος και το δεξί μέλος της ΔΕ. Επομένως, η πλήρης λύση της ΔΕ είναι η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα και οι σταθερές λύσεις $y(x) = \rho_i$.

Παράδειγμα 3.1: Να βρεθεί το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ: $y' = \frac{x^2}{1-y^2}$ (1). Να βρεθεί ο ειδικό ολοκλήρωμα που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$ και να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού της λύσης του ΠΑΤ.

Επίλυση: Η ΔΕ γράφεται: $(1 - y^2)dy = x^2 dx$. Ολοκληρώνοντας αριστερά ως προς y και δεξιά ως προς x, ως ακολούθως

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx + c_1 \Rightarrow y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c_1 \Rightarrow$$
$$3y - y^3 - x^3 = c \qquad (2)$$

Η σχέση (2) είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΔΕ.

Η λύση στο ΠΑΤ προκύπτει από το γενικό ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη. Για $x = 0$ και $y = 2$ από την εξίσωση (2) έχουμε

$$6 - 8 = -2 = c$$

Άρα το ειδικό ολοκλήρωμα είναι

$$3y - y^3 - x^3 = -2 \text{ ή } y^3 - 3y = 2 - x^3 \qquad (3)$$

Παρατήρηση 3.1: Η σχέση (3) ορίζει τη λύση του ΠΑΤ έμμεσα, δηλαδή για κάθε x θα πρέπει να λύσουμε την (3) για να βρούμε το y. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να λύσουμε ως προς y και να έχουμε μία ρητά εκπεφρασμένη σχέση για την συνάρτηση $y(x)$. Όμως στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτό δεν είναι εφικτό, οπότε καταλήγουμε σε αριθμητικούς υπολογισμούς (προσεγγιστικά) για τον προσδιορισμό του y για αρκετές τιμές το x. Έτσι παίρνουμε αρκετά ζεύγη (x, y)και μπορούμε να σχεδιάσουμε την ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Πεδίο ορισμού του ειδικού ολοκληρώματος: Η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{x^2}{1-y^2}$ της ΔΕ (1) δεν ορίζεται στα σημεία $y = \pm 1$. Στα σημεία αυτά η y' απειρίζεται και επομένως οι λύσεις της ΔΕ έχουν εφαπτόμενη κατακόρυφη. Τα διαστήματα που ορίζεται η y' είναι: $(-\infty, -1), (-1,1), (1, \infty)$.
Εφόσον το $y_o = 2$, ανήκει στο διάστημα $(1, \infty)$, για την ειδική λύση έχουμε ότι $1 < y < \infty$.
Για τη συνάρτηση $h(y) = y^3 - 3y$ όταν $1 < y < \infty$ έχουμε

$$-2 < y^3 - 3y < \infty$$

Από την (3) έπεται ότι:

$$-2 < 2 - x^3 < \infty \Rightarrow -\infty < x^3 - 2 < 2 \Rightarrow -\infty < x^3 < 4 \Rightarrow -\infty < x < \sqrt[3]{4}.$$

Επομένως το ειδικό ολοκλήρωμα είναι

$$y^3 - 3y = 2 - x^3, \text{ για } -\infty < x < \sqrt[3]{4}.$$

Παράδειγμα 3.2: Να λυθεί το ΠΑΤ: $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$ (1).

Επίλυση: Η ΔΕ γράφεται: $2(y - 1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$. Ολοκληρώνοντας αριστερά ως προς y και δεξιά ως προς x, προκύπτει το γενικό ολοκλήρωμα

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c \qquad (2)$$

Για $x = 0$ και $y = -1$ το $c = 3$. Επομένως η λύση του ΠΑΤ δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \qquad (3)$$

Διαφορετικά:

$$\int_{-1}^{y} 2(t - 1)dt = \int_0^x (3s^2 + 4s + 2)ds \Rightarrow (t^2 - 2t)|_{-1}^{y} = (s^3 + 2s^2 + 2s)|_0^x \Rightarrow$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3) είναι μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς y, η οποία μπορεί να λυθεί και να πάρουμε τη λύση σε ρητά εκπεφρασμένη μορφή

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \qquad (4)$$

Η εξίσωση (4) δίνει δύο λύσεις της ΔΕ, ωστόσο μόνο η μία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Για $x = 0$ προκύπτει ότι η λύση στο ΠΑΤ (1) είναι αυτή που αντιστοιχεί στο αρνητικό πρόσημο στην εξίσωση (4) και έτσι έχουμε

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \qquad (5)$$

Η λύση που αντιστοιχεί στο θετικό πρόσημα ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 3$.
Για τον προσδιορισμό του πεδίου ορισμού της λύσης (5) θα πρέπει να βρούμε το διάστημα για το οποίο η υπόρριζη ποσότητα είναι θετική. Η μόνη πραγματική τιμή για την οποία αυτή η ποσότητα μηδενίζεται είναι η $x = -2$ και έτσι προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το διάστημα $x > -2$. Το σημείο $x = -2$, δεν συμπεριλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού της λύσης διότι στο σημείο αυτό η παράγωγος απειρίζεται. [Στο σημείο $(-2,1)$ η εφαπτόμενη στην ολοκληρωτική καμπύλη είναι κατακόρυφη].

<u>Παράδειγμα 3.3</u>: Να βρεθεί η πλήρης λύση της ΔΕ: $y' = 2xy^2$ (1) και να λυθούν τα ΠΑΤ: $y(0) = 1 \quad (1\alpha)$, $y(0) = -1 \quad (1\beta)$.
<u>Επίλυση</u>: Για $y(x) \neq 0$,

$$\frac{1}{y^2}dy = 2xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + c \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x^2+c}, c \in \mathbb{R} \ (2)$$

Η εξίσωση (2) και η $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ αποτελούν την πλήρη λύση της ΔΕ.
Το ΠΑΤ (1α) έχει ειδική λύση την $y(x) = -\frac{1}{x^2-1}, x \in (-1,1)$
Το ΠΑΤ (2β) έχει ειδική λύση την $y(x) = -\frac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$
Παρατήρηση 3.2: (i) Δεν υπάρχει κάποια ένδειξη από την $f(x,y) = 2xy^2$, ότι η λύση δεν θα ορίζεται σε κάποιο σημείο. (ii) Το πεδίο ορισμού της ειδικής λύσης του ΠΑΤ: $y(x_o) = y_o$ εξαρτάται από την αρχική τιμή y_o. Η ειδική λύση είναι: $y(x) = -\frac{1}{x^2 - \frac{1}{y_o}}$
Αν $y_o \leq 0$, το πεδίο ορισμού είναι $-\infty < x < \infty$, ενώ αν $y_o > 0$, το πεδίο ορισμού είναι $-\frac{1}{\sqrt{y_o}} < x < \frac{1}{\sqrt{y_o}}$.

<u>Παράδειγμα 3.4</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: : $y' = (y-1)(y-2)$, $y(0) = 0$ (1)
Για $y \neq 1$ και $y \neq 2$

$$\frac{1}{(y-1)(y-2)}dy = dx \Rightarrow \frac{dy}{y-2} - \frac{dy}{y-1} = dx \Rightarrow ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = x + c \Rightarrow$$

$\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = e^c e^x \Rightarrow \frac{y-2}{y-1} = ce^x, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ή $y(x) = \frac{2-ce^x}{1-ce^x}, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (2)
Οι σταθερές συναρτήσεις $y(x) = 1$ και $y(x) = 2$ αποτελούν λύσεις της ΔΕ. Συγκεκριμένα η $y(x) = 2$ μπορεί να προκύψει από την γενική λύση για $c = 0$. Άρα η πλήρης λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = \frac{2-ce^x}{1-ce^x}, c \in \mathbb{R} \text{ και } y(x) = 1 \qquad (3)$$

Η ειδική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$ δίνεται από την εξίσωση

$$y(x) = \frac{2(1-e^x)}{1-2e^x} \qquad (4)$$

για $1 - 2e^x \neq 0 \Rightarrow x \neq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x \neq -ln2$. Άρα το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το διάστημα $(-ln2, +\infty)$.

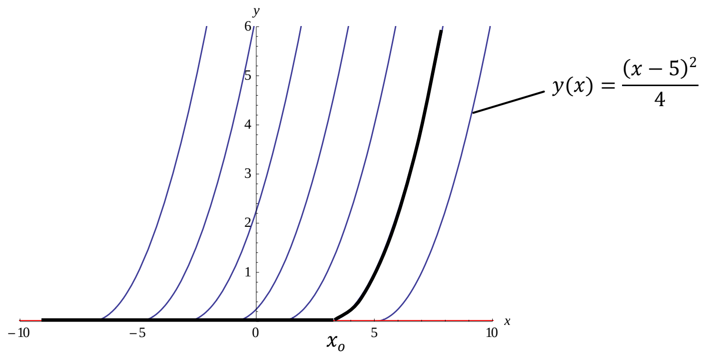
<u>Παράδειγμα 3.5</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y' = \sqrt{y},\ y \geq 0$ (1) και να λυθεί το ΠΑΤ: $y(x_o) = 0$.

<u>Επίλυση</u>: Για $y(x) \neq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{y}}dy = dx \Rightarrow 2y^{1/2} = x + c \Rightarrow y(x) = \frac{(x+c)^2}{4}, c \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Η πλήρης λύση είναι η (2) και η $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Η μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (2) είναι μία οικογένεια παραβολών με κέντρο το $x_o = -c$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Όμως από κάθε τέτοια παραβολή θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο το δεξιό κλάδο που έχει θετική κλίση και βρίσκεται έτσι σε συμφωνία με τη ΔΕ. [Ο αριστερός κλάδος των παραβολών είναι λύσεις της εξίσωσης $y' = -\sqrt{y}$, ενώ η πλήρης παραβολή λύνει την εξίσωση $(y')^2 = y$]. Η λύση $y(x) = 0$ είναι περιβάλλουσα των παραβολών (2) και αποτελεί ιδιάζουσα λύση της ΔΕ.



Όσον αφορά το πρόβλημα αρχικών τιμών και τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{y}$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίου ορισμού της $-\infty < x < \infty, y \geq 0$. Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης. Όμως η πρόσθετη συνθήκη, $\frac{\partial f}{\partial y}$ συνεχής, που διασφαλίζει την μοναδικότητα, δεν πληρούται σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού, αφού $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0} = \infty$.

Υπάρχει επομένως το ενδεχόμενο πάνω στην ευθεία $y = 0$ να συναντώνται περισσότερες από μία λύσεις. Πράγματι, αν x_o ένα οποιοδήποτε σημείο του άξονα x, τότε η συνάρτηση

$$y(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq x_o \\ \dfrac{(x-x_o)^2}{4}, & x > x_o \end{cases}$$

Αποτελεί λύση της ΔΕ, συνεχή και παραγωγίσιμη στο x_o, η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_o) = 0$. Όμως και η λύση $y(x) = 0$ ικανοποιεί την ίδια αρχική συνθήκη. Άρα το ΠΑΤ δεν έχει μοναδική λύση.

Τίποτα ανάλογο δεν συμβαίνει για αρχικές συνθήκες της μορφής: $y(x_o) = y_o > 0$ όπου η μοναδικότητα είναι εξασφαλισμένη.

4. Ομογενείς και Σχεδόν Ομογενείς (Μη γραμμικές) Διαφορικές Εξισώσεις

Α. Μη γραμμικές Ομογενείς ΔΕ

Ορισμός 4.1: Μία συνάρτηση $f(x,y)$ που ορίζεται στο κατάλληλο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ [$\forall(x,y) \in D$ και $\forall\lambda > 0$, $(\lambda x, \lambda y) \in D$] λέγεται ομογενής βαθμού α αν $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$.

Παραδείγματα:

(i) Η συνάρτηση $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$, είναι ομογενής 4ου βαθμού διότι $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^4 f(x,y)$.

(ii) Η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{x^2+5xy}{2x-y}$ είναι ομογενής 1ου βαθμού διότι $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2x^2+5\lambda^2xy}{\lambda(2x-y)} = \lambda f(x,y)$

(iii) Η συνάρτηση $f(x,y) = sin\left(\frac{x+2y}{2x-3y}\right)$, είναι ομογενής μηδενικού βαθμού διότι $f(\lambda x, \lambda y) = sin\left(\frac{\lambda x+2\lambda y}{2\lambda x-3\lambda y}\right) = sin\left(\frac{x+2y}{2x-3y}\right)$

Όταν η $f(x,y)$είναι ομογενής μηδενικού βαθμού δεν εξαρτάται από τα x, y χωριστά, αλλά από το λόγο y/x.

Ορισμός 4.2: Η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

$$y'(x) = f(x,y), \quad (x,y) \in D \qquad \text{(Α 4.1)}$$

ονομάζεται ***(μη γραμμική) ομογενής ΔΕ*** αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

Ανάλογα ορίζεται και η μη γραμμική ομογενής ΔΕ όταν είναι της μορφής

$$M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0 \text{ ή } M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \text{(Α 4.2)}$$

όπου τώρα οι συντελεστές $M(x,y)$, $N(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ιδίου βαθμού α.

__**Επίλυση της μη γραμμικής ομογενούς ΔΕ**__: Για την επίλυση μίας μη γραμμικής ομογενούς ΔΕ (Α 4.1) κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$y(x) = x\,u(x) \qquad \text{(Α 4.3)}$$

και η ΔΕ μετατρέπεται σε μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ως προς $u(x)$, οπότε επιλύεται σύμφωνα με τη διαδικασία της Ενότητας ΙΙ.3. Πράγματι, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό (Α 4.3) η ΔΕ (Α 4.1) γράφεται

$$u'x + u = F(u) \Rightarrow u'x = F(u) - u$$

όπου $u = \frac{y}{x}$. Υποθέτοντας ότι $F(u) - u \neq 0$, και $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{1}{[F(u)-u]}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{[F(u)-u]} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{[F(u)-u]} = ln|x| + c \qquad \text{(Α 4.4)}$$

Επιλύουμε την (Α 4.4) ως προς $u(x)$ και αντικαθιστούμε το $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ για να προσδιορίσουμε την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$.

__**Παράδειγμα Α 4.1**__: Να λυθεί η ΔΕ: $y' = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ (1)

__Επίλυση__: Η $f(x,y) = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ είναι ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού ως προς x, y, θέτοντας στην (1), $y = xu(x)$, έχουμε

$$u'x + u = u^2 + 2u \Rightarrow u'x = u^2 + u \Rightarrow \frac{du}{u(u+1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{(u+1-u)du}{u(u+1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} - \frac{du}{(u+1)} = \frac{dx}{x}$$

όπου θεωρήσαμε ότι $u \neq 0$, $u+1 \neq 0$ και $x \neq 0$. Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$ln|u| - ln|u+1| = ln|x| + c \Rightarrow ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = ln|x| + c \Rightarrow \left|\frac{u}{u+1}\right| = e^c|x| \Rightarrow$$

$$\frac{u}{u+1} = cx, \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Για $u=\frac{y}{x}$ έχουμε

$$\frac{y}{y+x}=cx \Rightarrow y(x)=\frac{cx^2}{1-cx}, \qquad c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Από τους περιορισμούς $u\neq 0$, και $u+1\neq 0$ προκύπτουν οι λύσεις $y(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ και $y(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $y(x)=0$ προκύπτει από την γενική λύση, για $c=0$, ενώ η $y(x)=-x$ είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ.

Επομένως, η πλήρης λύση της ΔΕ (1) είναι:

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{cx^2}{1-cx}, c\in\mathbb{R} \ -\text{γενική λύση} \\ y(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}-\text{ιδιάζουσα λύση}\end{cases}$$

<u>Παράδειγμα Α 4.2</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $xy'=y(lny-lnx+1), x>0, y>0$ (1), $y(1)=2$

<u>Επίλυση</u>: Η $f(x,y)=\frac{y(lny-lnx+1)}{x}=\frac{y}{x}\left(ln\frac{y}{x}+1\right)$ είναι ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού ως προς x,y, θέτοντας στην (1), $y=xu(x)$, έχουμε

$$u'x+u=u(lnu+1)\Rightarrow u'x=ulnu\Rightarrow (\text{για } lnu\neq 0)$$

$$\frac{du}{ulnu}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{dlnu}{lnu}=\frac{dx}{x}\Rightarrow ln|lnu|=ln|x|+c\Rightarrow|lnu|=e^c|x|\Rightarrow lnu=cx\Rightarrow$$
$$u=e^{cx}\Rightarrow y(x)=xe^{cx}, c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Από τον περιορισμό $lnu\neq 0$, έχουμε τη λύση $y(x)=x, x>0$, η οποία προκύπτει από τη γενική λύση για $c=0$. Άρα η πλήρης λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x)=xe^{cx}, c\in\mathbb{R}$$

<u>Ειδική λύση</u>: Από τη γενική λύση για $x=1$ και $y=2$, έπεται ότι $2=e^c\Rightarrow c=ln2$, οπότε η λύση στο ΠΑΤ είναι

$$y(x)=xe^{xln2}\Rightarrow y(x)=x(2^x), \qquad x>0$$

<u>Παράδειγμα Α 4.3</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Η ΔΕ (1) δίνεται στη διαφορική μορφή: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, όπου οι συναρτήσεις $M(x,y)=x^2-xy+y^2$ και $N(x,y)=-xy$ είναι ομογενείς του ιδίου βαθμού (2ου βαθμού). Επομένως, η ΔΕ (1) είναι μη γραμμική ομογενής. Θέτοντας $y=xu(x)$, έχουμε $dy=xdu+udx$ και με αντικατάσταση στη ΔΕ (1) προκύπτει

$$(x^2-x^2u+x^2u^2)dx-x^2u(xdu+udx)=0\Rightarrow x^2(1-u)dx-x^3udu=0\Rightarrow$$

$$(1-u)dx=xudu$$

Για $u\neq 1, x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{udu}{u-1}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{(u-1+1)du}{u-1}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow du+\frac{du}{u-1}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow u+ln|u-1|=-ln|x|+c\Rightarrow$$
$$ln|u-1|+ln|x|=c-u\Rightarrow ln|x(u-1)|=c-u\Rightarrow|x(u-1)|=e^ce^{-u}\Rightarrow x(u-1)=ce^{-u}\Rightarrow$$
$$e^{-\frac{y}{x}}(y-x)=c, c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, x\neq 0, y\neq x$$

Από τον περιορισμό $u\neq 1$, έχουμε τη λύση $y(x)=x$, η οποία προκύπτει από τη γενική λύση για $c=0$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$e^{-\frac{y}{x}}(y-x)=c, \quad c\in\mathbb{R}, x\neq 0$$

<u>Παρατήρηση Α 4.1</u>: Αν στη ΔΕ (1) θεωρήσουμε ότι η $x(y)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής y, τότε $x(y)=0, \forall y\in\mathbb{R}$ είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ (1) διότι την ικανοποιεί και δεν προκύπτει από τη γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς c.