Κεφάλαιο Ι. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ης} ΤΑΞΗΣ

Θέτοντας σαν πρώτο κριτήριο διαχωρισμού την τάξη θα μελετήσουμε τις ΣΔΕ 1^{ης} τάξης.
Η γενική μορφή των πλήρως μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης είναι:

$$F(x,y,y')=0,\ \ x\in I\subseteq\mathbb{R} \qquad (1)$$

Επιλύοντας την (1) ως y', εφόσον είναι δυνατόν, προκύπτει ο γενικός τύπος των σχεδόν γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης (κανονική ή λυμένη μορφή)

$$y^{'}(x)=f(x,y),\ \ x\in I\subseteq\mathbb{R} \qquad (2)$$

Αν επιπλέον γνωρίζουμε την τιμή της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$ στη θέση x_o τότε διαμορφώνεται το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y^{'}(x)&=f(x,y)\\ y(x_o)&=y_o \end{aligned} \qquad (3)$$

Για το ΠΑΤ (3), όπου $f(x,y)$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο (ανοικτό) ορθογώνιο $D\subseteq\mathbb{R}^2$ και (x_o,y_o) τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του D, το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1 (Ύπαρξης και μοναδικότητας). Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x,y)$ και $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό ορθογώνιο $\overline{D}\subseteq\mathbb{R}^2$. Τότε το ΠΑΤ (3) έχει μοναδική λύση.

Δεν υπάρχει κάποια μεθοδολογία επίλυσης της ΔΕ (2), οπότε θα χρειαστεί να θεωρήσουμε υποκατηγορίες υποθέτοντας κάποια μορφή για τη συνάρτηση $f(x,y)$. Πριν προχωρήσουμε στην παράθεση αυτών των τεχνικών επίλυσης ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης $f(x,y)$, είναι ενδιαφέρον να δούμε μία γραφική μέθοδο η οποία αποτελεί συχνά ένα χρήσιμο βήμα στη μελέτη της ΔΕ ιδιαίτερα όταν η εύρεση αναλυτικής λύσης είναι πολύπλοκη έως αδύνατη.

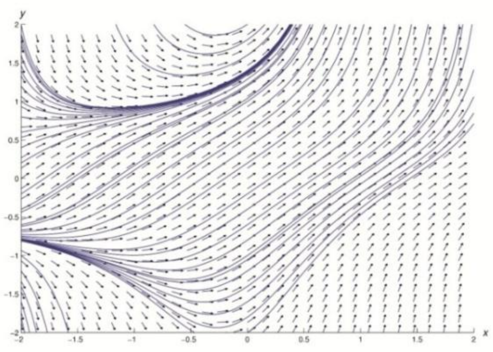
1. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των λύσεων

α) <u>Πεδίο Διευθύνσεων-Ολοκληρωτικές καμπύλες</u>

Η εξίσωση $y^{'}(x)=f(x,y)$ λέει ότι αν $y(x)$ είναι μία λύση της που διέρχεται από το σημείο (x_o,y_o) του επιπέδου xy, τότε στο σημείο αυτό η τιμή της συνάρτησης $f(x_o,y_o)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης στην ολοκληρωτική καμπύλη. Έχοντας την πληροφορία αυτή μπορούμε να την παραστήσουμε γραφικά στο επίπεδο xy σχεδιάζοντας (με τη χρήση του υπολογιστή) μικρά ευθύγραμμα τμήματα (***γραμμικά στοιχεία***) με την συγκεκριμένη κλίση σε πολλά σημεία του χωρίου $D\subset\mathbb{R}^2$ που ορίζεται η $f(x,y)$. Το διάγραμμα που παίρνουμε ορίζει το ***πεδίο διευθύνσεων ή κλίσεων*** στο χωρίο D.

Μία καμπύλη η οποία εφάπτεται σε κάθε σημείο της σε ένα γραμμικό στοιχείο αποτελεί ολοκληρωτική καμπύλη (δηλαδή λύση) της ΔΕ. Σχεδιάζοντας τις ολοκληρωτικές καμπύλες που ακολουθούν τα γραμμικά στοιχεία μπορούμε να αποκτήσουμε κάποια αντίληψη σχετικά με την συμπεριφορά των λύσεων της ΔΕ ή να πάρουμε μία εκτίμηση ή γραφική προσέγγιση για τη μορφή τους από τη γνώση του πεδίου κλίσεων. Όσα περισσότερα είναι τα γραμμικά στοιχεία τόσο περισσότερο μπορεί να υπάρχει η δυνατότητα (δεν είναι πάντα εφικτό) να έχουμε μία σαφή εικόνα.
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το πεδίο κλίσεων με κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ:

$$y^{'}(x)=1+xy^2(x)$$



Χωρίς τη χρήση του υπολογιστή μπορούμε να σχεδιάσουμε το πεδίο διευθύνσεων σχεδιάζοντας πρώτα μερικές καμπύλες κατά μήκος των οποίων η $f(x,y) = c$, για διάφορες τιμές της σταθεράς c. Αυτές οι καμπύλες ονομάζονται ισοκλινείς της ΔΕ. Κατά μήκος κάθε ισοκλινούς σχεδιάζουμε έναν αριθμό παράλληλων γραμμικών στοιχείων με κλίση c, που είναι η κλίση των ολοκληρωτικών καμπυλών της ΔΕ σε κάθε σημείο της ισοκλινούς.

Παράδειγμα: Η ΔΕ: $y' = x - y, f(x,y) = x - y = c \Rightarrow y = x - c$

Οι ισοκλινείς είναι ευθείες παράλληλες με κλίση 1.

Για $c = 0$, η ισοκλινής είναι η ευθεία $y = x$ και τα γραμμικά στοιχεία σε κάθε σημείο της ισοκλινούς έχουν κλίση 0.

Για $c = 1$, η ισοκλινής είναι η ευθεία $y = x - 1$ και τα γραμμικά στοιχεία σε κάθε σημείο της ισοκλινούς έχουν κλίση 1.

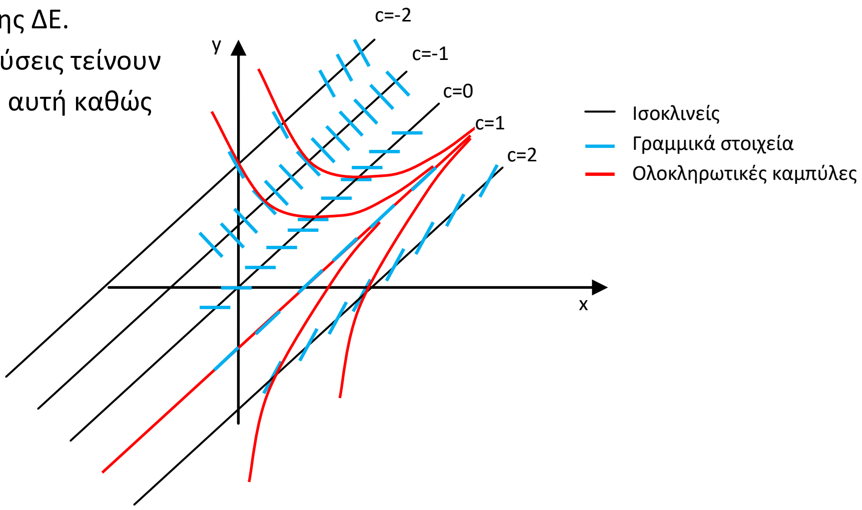
Για $c = 2$, η ισοκλινής είναι η ευθεία $y = x - 2$ και τα γραμμικά στοιχεία σε κάθε σημείο της ισοκλινούς έχουν κλίση 2.

Για $c = -1$, η ισοκλινής είναι η ευθεία $y = x + 1$ και τα γραμμικά στοιχεία σε κάθε σημείο της ισοκλινούς έχουν κλίση -1.

Για $c = -2$, η ισοκλινής είναι η ευθεία $y = x + 2$ και τα γραμμικά στοιχεία σε κάθε σημείο της ισοκλινούς έχουν κλίση -2.

Το πεδίο διευθύνσεων δίνεται στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι λύση της ΔΕ.

Επίσης, όλες οι άλλες λύσεις τείνουν ασυμπτωτικά στη λύση αυτή καθώς το $x \to \infty$.



Οι ολοκληρωτικές καμπύλες δεν τέμνονται. Αυτό εξασφαλίζεται από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας. Αν υποθέσουμε ότι δύο λύσεις $y_1(x), y_2(x)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο (x_o, y_o) τότε αυτές οι δύο λύσεις ικανοποιούν το ίδιο ΠΑΤ, με αρχική συνθήκη $y(x_o) = y_o$, γεγονός που παραβιάζει το θεώρημα.

β) *Ορθογώνιες τροχιές*

Είδαμε ότι η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα μίας ΔΕ 1ης τάξης περιέχει μία αυθαίρετη σταθερά. Για διαφορετικές τιμές της σταθεράς έχουμε και μία διαφορετική καμπύλη-ειδική λύση της ΔΕ. Η οικογένεια των λύσεων της ΔΕ αποτελεί μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών

$$G(x,y,c) = 0 \qquad (\beta.1)$$

Αντίστροφα, αν δοθεί μία μονοπαραμετρική οικογένεια είναι δυνατόν απαλείφοντας την σταθερά c να οδηγηθούμε στη ΔΕ.

Παραδείγματα:

(i) Έστω η οικογένεια καμπυλών $x^2 + y^2 = c$ (1). Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x έχουμε $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ (2).

(ii) Έστω η οικογένεια καμπυλών $x^2 + y^2 = 2xc$ (1). Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x έχουμε $2x + 2yy' = 2c$ (2). Με απαλοιφή της σταθεράς c από τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε

$$x^2 + y^2 = 2x(x + yy') = 2x^2 + 2xyy' \Rightarrow y' = -\frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή αυτής της διαδικασίας είναι το πρόβλημα εύρεσης των ορθογωνίων τροχιών μίας οικογένειας καμπυλών.

Ορισμός β1. (*Ορθογώνιες τροχιές*). ***Ορθογώνιες τροχιές*** μίας μονοπαραμετρικής οικογένειας καμπυλών $G(x, y, c) = 0$ (β.1), η οποία ικανοποιεί τη ΔΕ 1ης τάξης $F(x, y, y') = 0$, είναι μία οικογένεια καμπυλών $g(x, y, c) = 0$ (β.2) της οποίας κάθε καμπύλη είναι ορθογώνια σε κάθε καμπύλη της οικογένειας (β.1).
Άρα σε κάθε σημείο (x, y) μιας καμπύλης της (β.1) η εφαπτομένη σχηματίζει ορθή γωνία με την εφαπτομένη της καμπύλης της (β.2) και αντίστροφα.

Οι ορθογώνιες τροχιές εμφανίζονται σε διάφορες εφαρμογές. Π.χ. στην Υδροδυναμική οι γραμμές ροής (η γραμμή στην οποία εφάπτεται το διάνυσμα της ταχύτητας ενός σωματιδίου του ρευστού σε κάθε χρονική στιγμή) είναι ορθογώνιες τροχιές των ισοδυναμικών γραμμών, ενώ στη θερμότητα οι γραμμές ροής της θερμότητας είναι ορθογώνιες τροχιές των ισόθερμων γραμμών.

Έστω ότι δίνεται η οικογένεια καμπυλών (β.1) και έστω ότι $y' = f(x, y)$ είναι η ΔΕ της οικογένειας. Τότε η κλίση μίας καμπύλης της (β.1) που διέρχεται από το σημείο (x, y) είναι $k_1 = f(x, y)$. Άρα η κλίση k_2 της καμπύλης της οικογένειας (β.2) που διέρχεται από αυτό το σημείο είναι

$$k_2 = -\frac{1}{f(x,y)}, \qquad (\beta.3)$$

επομένως η ΔΕ της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών θα είναι

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)} \qquad (\beta.4)$$

Επιλύοντας τη ΔΕ (β.4) προσδιορίζουμε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας καμπυλών (β.1).

<u>**Παράδειγμα β1**</u>: Να βρεθεί η οικογένεια των ορθογωνίων τροχιών της οικογένειας καμπυλών:

$$y = cx^2$$

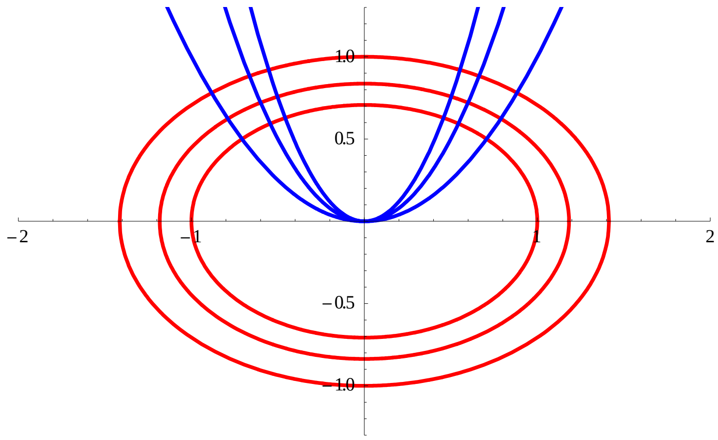
Η ΔΕ της οικογένειας αυτής είναι:

$$y' = 2xc = 2x\frac{y}{x^2} = \frac{2y}{x}$$

Επομένως $f(x, y) = \frac{2y}{x}$. Άρα η ΔΕ της οικογένειας ορθογωνίων τροχιών είναι

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

Η επίλυση της οποίας δίνει $y^2 + \frac{x^2}{2} = c, c > 0$, που είναι μία οικογένεια ελλείψεων.



<u>Παράδειγμα β2</u>: Να βρεθεί η οικογένεια των ορθογωνίων τροχιών της οικογένειας καμπυλών:

$$x^2 + (y-c)^2 = c^2, c \neq 0$$

που είναι μία οικογένεια κύκλων με κέντρα στον άξονα y που εφάπτονται στον άξονα x.

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται: $x^2 + y^2 - 2yc = 0 \Rightarrow c = \frac{x^2+y^2}{2y}$.

Η ΔΕ της οικογένειας αυτής είναι: $2x + 2(y-c)y' = 0 \Rightarrow x + \left(y - \frac{x^2+y^2}{2y}\right)y' = 0 \Rightarrow$

$$x + \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Άρα η ΔΕ της οικογένειας ορθογωνίων τροχιών είναι

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Η ΔΕ αυτή είναι μη γραμμική ***ομογενής***, η οποία ανάγεται σε μία ΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών αν θέσουμε $y = ux \Rightarrow y' = xu' + u$. Έτσι προκύπτει η ΔΕ

$$\frac{2udu}{u^2+1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow u^2 + 1 = \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Για $u = \frac{y}{x}$ έχουμε $y^2 + x^2 = cx = 2kx$, $(c = 2k)$ και προσθέτοντας και στα δύο μέλη το k^2 προκύπτει

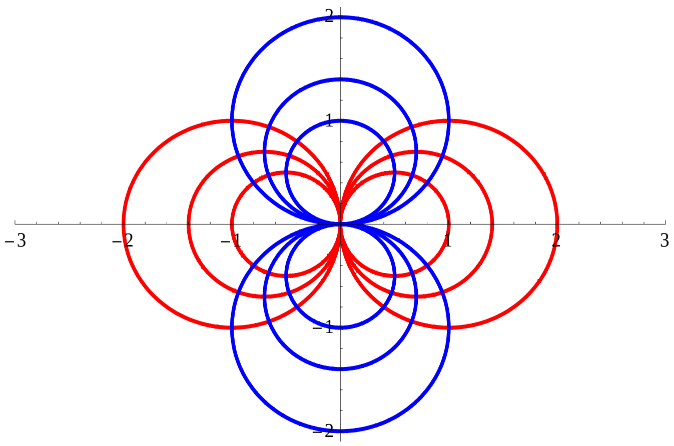
$$(x-k)^2 + y^2 = k^2$$

Που είναι μία οικογένεια κύκλων με κέντρα στο άξονα x που εφάπτονται στον άξονα y.

Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάζονται κάποιες οι ολοκληρωτικές καμπύλες (με μπλε χρώμα) της οικογένειας

$$x^2 + (y-c)^2 = c^2, c \neq 0$$

και κάποιες ορθογώνιες τροχιές αυτών (με κόκκινο χρώμα).



2. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} τάξης

Η πιο γενική μορφή μίας γραμμικής ΔΕ 1^{ης} τάξης είναι:

$$P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = G(x) \qquad (2.1)$$

Όπου $P(x), Q(x)$ και $G(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I.
Αν $P(x) \neq 0, \forall x \in I$ τότε διαιρώντας με το $P(x)$ έχουμε την κανονική ή λυμένη μορφή:

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \qquad (2.2)$$

όπου $p(x)$ είναι ο συντελεστής και $g(x)$ ο μη ομογενής όρος της (2.2). Αν επιπλέον, ορίζεται η αρχική συνθήκη $y(x_o) = y_o$ (2.3) , τότε έχουμε ένα ΠΑΤ.

Θεώρημα (2.1) (*Ύπαρξης και μοναδικότητας*). Αν $p(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I και $x_o \in I$ τότε το ΠΑΤ (2.2) και (2.3) έχει μοναδική λύση που ορίζεται για κάθε $x \in I$.

***Ερώτημα**:* Ποια είναι η μοναδική λύση στο παρακάτω ΠΑΤ;

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0, \qquad y(0) = 0,$$

όπου $p(x)$ συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα I και $x_o = 0 \in I$.

Επίλυση της ΔΕ: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$ (2.2)
Για την εύρεση της γενικής λύσης ή της ειδικής λύσης της ΔΕ (2.2) ας ξεκινήσουμε από απλές σκέψεις. Θα μπορούσαμε να προβούμε σε μία άμεση ολοκλήρωση που θα αναιρούσε την παράγωγο, όμως ο όρος $p(x)y(x)$ μας χαλάει τη σκέψη διότι μας οδηγεί σε μία ολοκληρωτική εξίσωση $y(x) + \int p(x)y(x)dx = \int g(x)\,dx + c$, όπου η άγνωστη συνάρτηση συνυπάρχει με το ολοκλήρωμά της.
Για να οδηγηθούμε πιο εύκολα στη μεθοδολογία επίλυσης της (2.2), ας θεωρήσουμε τη ΠΑΤ:

$$(4 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = 4x, \qquad y(0) = 1$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της ΔΕ είναι

$$(4 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = [(4 + x^2)y(x)]'$$

Επομένως, η ΔΕ γράφεται

$$[(4 + x^2)y(x)]' = 4x \Rightarrow (4 + x^2)y(x) = \int 4xdx + c = 2x^2 + c \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{2x^2 + c}{4 + x^2}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

που είναι η γενική λύση της ΔΕ. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη στη γενική λύση έχουμε $y(0) = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4.$

Άρα η ειδική λύση είναι: $y(x) = \frac{2x^2+4}{4+x^2}, x \in \mathbb{R}.$
Γεννάται λοιπόν το εξής ερώτημα, μήπως μπορούμε να μετασχηματίσουμε κατάλληλα το αριστερό μέλος της ΔΕ (2.2) έτσι ώστε να το μετατρέψουμε σε μία τέλεια παράγωγο και κατόπιν να ολοκληρώσουμε αναδεικνύοντας έτσι μία αλγεβρική σχέση για την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$.
Στην κατεύθυνση αυτή μία σκέψη είναι να πολλαπλασιάσουμε τη εξίσωση με μία μη μηδενική συνάρτηση $\mu(x)$ έτσι ώστε να απαιτήσουμε

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x) = [\mu(x)y(x)]' = \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x) \qquad (2.4)$$

Τότε η ΔΕ: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$ γράφεται

$$[\mu(x)y(x)]' = \mu(x)g(x) \qquad (2.5)$$

η οποία είναι άμεσα ολοκληρώσιμη.
Ποία είναι όμως η συνάρτηση $\mu(x)$;
Η απαίτηση (2.4) μας οδηγεί στη σχέση
$\mu'(x)y(x) = \mu(x)p(x)y(x) \Rightarrow \mu'(x) = \mu(x)p(x)$ και εφόσον $\mu(x) \neq 0$

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x) \Rightarrow ln|\mu(x)| = \int p(x)dx + c \Rightarrow |\mu(x)| = e^c e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \mu(x) = \pm e^c e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\mu(x) = ce^{\int p(x)dx}, c \neq 0$$

Μία τέτοια συνάρτηση επομένως είναι η

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το $c = 1$)

Αντικαθιστώντας στην (2.5) έχουμε

$$[\mu(x)y(x)]' = \mu(x)g(x) \Rightarrow \mu(x)y(x) = \int \mu(x)g(x)dx + c \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)g(x)dx + \frac{c}{\mu(x)},\ c \in \mathbb{R},\ \text{με } \mu(x) = e^{\int p(x)dx} \qquad (2.6)}$$

Η (2.6) είναι η γενική λύση της ΔΕ (2.2). Η συνάρτηση $\mu(x)$ ονομάζεται ***ολοκληρώνων παράγοντας*** της ΔΕ (2.2).

Αν έχουμε ένα ΠΑΤ με αρχική συνθήκη $y(x_o) = y_o$, τότε:

α) τρόπος: Όπως και στο παραπάνω παράδειγμα, από τη γενική λύση για $x = x_o$ και $y = y_o$ προσδιορίζουμε τη σταθερά c και έτσι έχουμε την ειδική λύση, δηλαδή την ολοκληρωτική καμπύλη η οποία διέρχεται από το σημείο (x_o, y_o).

β) τρόπος: Διαφορετικά μπορούμε να πάρουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της εξίσωσης $[\mu(x)y(x)]' = \mu(x)p(x)$ μεταξύ x_o και x

$$\mu(x)y(x) - \mu(x_o)y(x_o) = \int_{x_o}^{x} \mu(s)g(s)ds \Rightarrow y(x) = \frac{\mu(x_o)y_o}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)}\int_{x_o}^{x} \mu(s)g(s)ds$$

Παρατήρηση: Με τον (β) τρόπο οδηγούμαστε απευθείας στη ειδική λύση. Επίσης, όταν το ολοκλήρωμα $\int \mu(x)g(x)dx$ δεν υπολογίζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις τότε ο (β) τρόπος μας δίνει τη δυνατότητα η λύση του ΠΑΤ να προσεγγισθεί αριθμητικά.

<u>Παράδειγμα 2.1</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $y'(x) + 2xy(x) = 2x,\ y(0) = 2$.

Υπολογίζουμε τον ολοκληρώνοντα παράγοντα από την σχέση $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

$$\mu(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τη ΔΕ με τον ολοκληρώνοντα παράγοντα έχουμε

$$e^{x^2}y'(x) + 2xe^{x^2}y(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow \left(e^{x^2}y(x)\right)' = 2xe^{x^2} \Rightarrow e^{x^2}y(x) = \int 2xe^{x^2}dx + c = e^{x^2} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 + ce^{-x^2}, c \in \mathbb{R},$$

που είναι η γενική λύση της ΔΕ.

(α) Για $x = 0$ και $y = 2$ προκύπτει ότι $c = 1$. Άρα η ειδική λύση είναι

$$y(x) = 1 + e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Οι συναρτήσεις $p(x) = 2x$, και $g(x) = 2x$ είναι συνεχείς $\forall x \in \mathbb{R}$, επομένως από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας η λύση ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β) $\left(e^{x^2}y(x)\right)' = 2xe^{x^2} \Rightarrow e^{x^2}y(x) - y(0) = \int_0^x 2se^{s^2}ds = e^{s^2}\Big|_0^x = e^{x^2} - 1 \Rightarrow$

$$e^{x^2}y(x) = 2 + e^{x^2} - 1 \Rightarrow$$

$$y(x) = 1 + e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

<u>Παράδειγμα 2.2</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $y(2) = 3$.
Υπολογίζουμε τον ολοκληρώνοντα παράγοντα: $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$.
Πολλαπλασιάζοντας τη ΔΕ με τον ολοκληρώνοντα παράγοντα έχουμε

$$e^x y'(x) + e^x y(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \Rightarrow \left(e^x y(x)\right)' = \frac{e^x}{1+x^2} \Rightarrow e^x y(x) = \int \frac{e^x}{1+x^2} dx + c \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{-x} \int \frac{e^x}{1+x^2} dx + ce^{-x}, c \in \mathbb{R} \quad \text{που είναι η γενική λύση της ΔΕ.}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{1+x^2} dx$ δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε το (β) τρόπο:

$$\left(e^x y(x)\right)' = \frac{e^x}{1+x^2} \Rightarrow e^x y(x) - e^2 y(2) = \int_2^x \frac{e^s}{1+s^2} ds \Rightarrow e^x y(x) = 3e^2 + \int_2^x \frac{e^s}{1+s^2} ds \Rightarrow$$

$$y(x) = 3e^{2-x} + e^{-x} \int_2^x \frac{e^s}{1+s^2} ds$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί αριθμητικά για διάφορες τιμές του x, οπότε μπορούμε να έχουμε μία γραφική παράσταση της λύσης.

<u>Παράδειγμα 2.3</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $xy'(x) + 2y(x) = 4x^2$, $y(1) = 2$.
Προσοχή! Για να υπολογίσουμε τον ολοκληρώνοντα παράγοντα θα πρέπει να γράψουμε τη ΔΕ στη κανονική της μορφή:

$$y'(x) + \frac{2}{x} y(x) = 4x$$

Επομένως $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2ln|x|} = x^2$. Πολλαπλασιάζοντας τη ΔΕ με τον ολοκληρώνοντα παράγοντα έχουμε

$$x^2 y'(x) + 2xy(x) = 4x^3 \Rightarrow \left(x^2 y(x)\right)' = 4x^3 \Rightarrow x^2 y(x) = \int 4x^3 dx + c = x^4 + c \Rightarrow$$

$$y(x) = x^2 + \frac{c}{x^2}, c \in \mathbb{R} \quad \text{που είναι η γενική λύση της ΔΕ.}$$

Για $x = 1$ και $y = 2$ προκύπτει ότι $c = 1$. Άρα η ειδική λύση είναι

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \in (0, \infty).$$

Η συνάρτηση $y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ορίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$, όμως το $x_o = 1 \in (0, \infty)$.

Παρατηρήσεις:

(i) Η συνάρτηση $y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \in (-\infty, 0)$ είναι επίσης λύση της ΔΕ, όμως δεν είναι λύση το δοθέντος ΠΑΤ, αποτελεί λύση του ΠΑΤ με αρχική συνθήκη: $y(-1) = 2$.

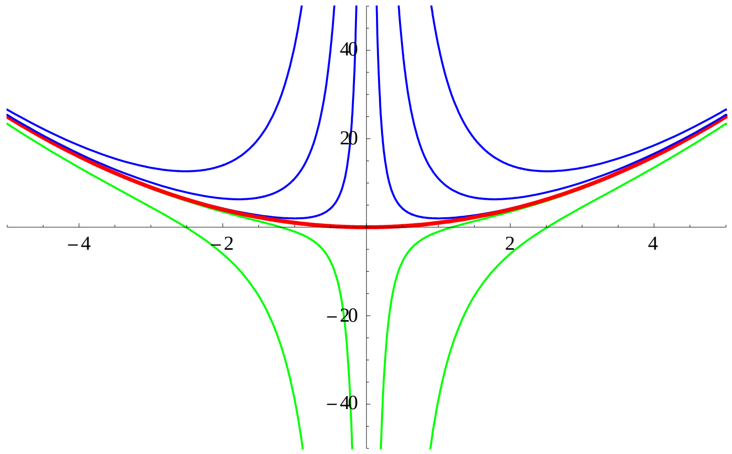
(ii) Η λύση στο ΠΑΤ τείνει ασυμπτωτικά στο θετικό άξονα y όταν $x \to 0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο συντελεστής $p(x)$ της ΔΕ απειρίζεται για $x = 0$.

(iii) Αν είχαμε το ΠΑΤ με αρχική συνθήκη $y(1) = 1$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι σταθερά $c = 0$ και επομένως η ειδική λύση είναι η συνάρτηση $y(x) = x^2$, η οποία είναι φραγμένη και παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Από τις παρατηρήσεις (ii) και (iii) αντιλαμβανόμαστε ότι το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας δεν λέει ότι μία λύση της ΔΕ θα είναι ασυνεχής εκεί όπου οι συναρτήσεις $p(x)$ και $g(x)$ είναι ασυνεχείς. Αντίθετα μας λέει ότι μία λύση δεν μπορεί να γίνει ασυνεχής σε οποιοδήποτε σημείο όπου $p(x)$ και $g(x)$ είναι δεν είναι ασυνεχείς.

Ο χώρος των λύσεων της ΔΕ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για διάφορες τιμές της αυθαίρετης σταθεράς, ($c = 0, c > 0$ $και$ $c < 0$).

.



Ένας διαφορετικός τρόπος επίλυσης της μη ομογενούς, γραμμικής ΔΕ (2.2) βασίζεται στην εύρεση της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μίας ειδικής λύσης της μη ομογενούς.
Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ είναι

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{2.7}$$

η οποία είναι μία εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία επίλυσης έχουμε για $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + c \Rightarrow ln|y| = -\int p(x)dx + c \Rightarrow |y| = e^c e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$y(x) = \pm e^c e^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int p(x)dx}, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Όμως η μηδενική συνάρτηση $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύση της (2.7), η οποία μπορεί να συμπεριληφθεί στη γενική λύση της αν αφήσουμε το c να πάρει την μηδενική τιμή.
Επομένως η γενική λύση της (2.7) είναι

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = ce^{-\int p(x)dx}, c \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

Η γενική λύση (2.8) μπορεί να υπολογισθεί άμεσα και με την μέθοδο του ολοκληρώνοντα παράγοντα. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$,

$$e^{\int p(x)dx}y' + p(x)e^{\int p(x)dx}y = 0 \Rightarrow \left(e^{\int p(x)dx}y\right)' = 0 \Rightarrow e^{\int p(x)dx}y = c \Rightarrow y(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

Στηριζόμενοι στη γενική λύση της ομογενούς υποθέτουμε ότι η λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής

$$y^{\mu\eta\ o\mu}(x) = u(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.9}$$

όπου η σταθερά c στη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς αντικαταστάθηκε από μία μεταβλητή συνάρτηση $u(x)$. Η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ προσδιορίζεται μέσα από την απαίτηση η μορφή (2.9) να ικανοποιεί την μη ομογενή ΔΕ. Πράγματι, παραγωγίζοντας την (2.9) και αντικαθιστώντας στην ΔΕ (2.2) έχουμε

$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} - \cancel{p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx}} + \cancel{p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx}} = g(x) \Rightarrow$$

$$u'(x) = e^{\int p(x)dx}g(x) \Rightarrow\ u(x) = \int e^{\int p(x)dx}g(x)dx + c$$

Επομένως η (2.9) γράφεται

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = \left(e^{-\int p(x)dx}\right)\int \left(e^{\int p(x)dx}\right)g(x)dx + c\left(e^{-\int p(x)dx}\right)$$

ή

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = \underbrace{\frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)g(x)dx}_{\text{Ειδική λύση μη ομογενούς}} + \underbrace{\frac{c}{\mu(x)}}_{\text{Γενική λύση ομογενούς}},\ c \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

Παράδειγμα 2.4: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y' + \frac{1}{x}y = 3cos2x,\ x > 0.$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι : $y' + \frac{1}{x}y = 0$ και η γενική της λύση είναι $y_{γεν}^{ομ}(x) = cx^{-1}$.

Υποθέτοντας ότι $y_{γεν}^{μη\ ομ}(x) = u(x)x^{-1}$ και αντικαθιστώντας στη δοθείσα ΔΕ έχουμε

$$u'(x)x^{-1} - u(x)x^{-2} + u(x)x^{-2} = 3cos2x \Rightarrow u'(x) = 3xcos(2x) \Rightarrow u(x) = 3\int xcos(2x)dx + c$$

$$= \frac{3}{2}\int x\big(sin(2x)\big)'dx + c = \frac{3}{2}xsin(2x) - \frac{3}{2}\int (x)'sin(2x)dx + c = \frac{3}{2}xsin(2x) + \frac{3}{4}cos(2x) + c$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x) = u(x)x^{-1} = \frac{3}{2}sin(2x) + \frac{3}{4x}cos(2x) + \frac{c}{x},\ \ x > 0.$$