Κεφάλαιο ΙΙΙ. Συνήθεις Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης τάξης

1. Εισαγωγή

Η θεωρητική δομή και οι μέθοδοι επίλυσης που αναπτύχθηκαν για τις ΔΕ 2ης τάξης επεκτείνονται απευθείας σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης. Θα εξετάσουμε επομένως, εν συντομία, την γενίκευση επικεντρώνοντας την προσοχή μας στις περιπτώσεις που εμφανίζονται καινούργια φαινόμενα.

Η γενική μορφή μίας γραμμικής ΔΕ n -οστής τάξης δίνεται ως εξής:

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + P_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_1(x)y' + P_o(x)y = G(x) \qquad (1.1)$$

με τις συναρτήσεις (τους συντελεστές) $P_i(x), i = 0,1,2,\dots,n$ και τη συνάρτηση $G(x)$ ορισμένες και συνεχείς σε κάποιο διάστημα $I = (a,b)$. Δεχόμαστε ότι $P_n(x) \neq 0, \forall x \in I$, οπότε διαιρώντας με $P_n(x)$ η (1.1) λαμβάνει τη μορφή (λυμένη-κανονική μορφή):

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_1(x)y' + p_o(x)y = g(x) \qquad (1.2)$$

με τις συναρτήσεις $p_i(x), i = 0,1,2,\dots,n-1$ και τη συνάρτηση $g(x)$ ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $I = (a,b)$. Ο γραμμικός διαφορικός τελεστής $L - n$ τάξης που ορίζεται μέσω της (1.2) είναι παρόμοιος με τον τελεστή που ορίσθηκε στις ΔΕ 2ης τάξης, δηλαδή

$$L = D^n + p_{n-1}(x)D^{n-1} + p_{n-2}(x)D^{n-2} + \cdots + p_1(x)D + p_o(x)D^o$$

όπου $D^k, k = 0,1,2\dots n-1$ είναι ο γραμμικός τελεστής παραγώγισης: $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$.

Αν $g(x) = 0, \forall x \in I$ τότε έχουμε την ειδική μορφή που καλείται ***ομογενής γραμμική ΔΕ n -οστής τάξης***:

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_1(x)y' + p_o(x)y = 0 \qquad (1.3)$$

Αν $g(x) \neq 0$, στο I η (1.2) είναι καλείται ***γραμμική μη ομογενής ΔΕ n -οστής τάξης***.

Για τη ΔΕ (1.2) ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας, διότι αν γράψουμε αυτήν στη μορφή:

$$y^{(n)} = -p_{n-1}(x)y^{(n-1)} - p_{n-2}(x)y^{(n-2)} - \cdots - p_1(x)y' - p_o(x)y + g(x) = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

τότε υπάρχουν οι παράγωγοι: $\frac{\partial F}{\partial y} = -p_o(x)$, $\frac{\partial F}{\partial y^{(j)}} = -p_j(x), j = 0,1,2,\dots,n-1$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I, επομένως στην περιοχή ενός τυχαίου σημείου $(x_o, y_o, y_1, \dots, y_{n-1})$ με $x_o \in I$, υπάρχει μοναδική λύση $y(x)$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_1,\ y''(x_o) = y_2, .., y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1} \qquad (1.4)$$

και της οποίας το πεδίο ορισμού εκτείνεται σε όλο το διάστημα I.

<u>Παρατήρηση 1.1</u>: Για την ομογενή ΔΕ (1.3) ισχύουν προφανώς οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας και επιπλέον για κάθε σημείο $(x_o, 0, 0, \dots, 0)$ με $x_o \in I$, υπάρχει η μόνη σταθερή λύση: $y(x) = 0, \forall x \in I$ με αρχικές τιμές:

$$y(x_o) = 0,\ y'(x_o) = 0,\ y''(x_o) = 0, .., y^{(n-1)}(x_o) = 0.$$

2. Θεωρία των ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων n-οστής τάξης

Όπως και στις ΔΕ 2ης τάξης θα μελετήσουμε αρχικά την ομογενή ΔΕ

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_1(x)y' + +p_o(x)y = 0 \quad (2.1)$$

Αρχή της υπέρθεσης: Αν $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι λύσεις της ΔΕ (2.1) τότε ο γραμμικός συνδυασμός: $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ με $c_1, c_2, \dots, c_n$ αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης λύση της ΔΕ (2.1).

$$L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)] = c_1L[y_1(x)] + c_2L[y_2(x)] + \cdots + c_nL[y_n(x)] = 0.$$

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν κάθε λύση της ΔΕ (2.1) εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Αυτό αληθεύει, εάν για κάθε επιλογή αρχικού σημείου x_o στο διάστημα I και για κάθε επιλογή $y_o, y_1, \dots, y_{n-1}$, μπορούμε να υπολογίσουμε κατάλληλα $c_1, c_2, \dots, c_n$ ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_o) + c_2 y_2(x_o) + \cdots + c_n y_n(x_o) &= y_o \\ c_1 y_1'(x_o) + c_2 y_2'(x_o) + \cdots + c_n y_n'(x_o) &= y_1 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_o) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_o) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_o) &= y_{n-1} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Το σύστημα (2.2) έχει μοναδική λύση ως προς τις σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ αν και μόνον εάν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μη μηδενική. Η συνθήκη αυτή εκφράζεται μέσα από την ορίζουσα

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (2.3)$$

υπολογισμένη στο x_o, να είναι διάφορη του μηδενός. Η (2.3) είναι η ***<u>ορίζουσα Wronski</u>*** των λύσεων $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Εάν λοιπόν οι συναρτήσεις $y_i(x), i = 1,2,\dots,n$ είναι λύσεις της ΔΕ (2.1) με $p_i(x), i = 1,2,\dots,n$ συνεχείς συναρτήσεις στο I και $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_o) \neq 0$ για τουλάχιστον ένα σημείο x_o του I τότε κάθε λύση της (2.1) εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Ακριβώς όπως και στις ΔΕ 2ης τάξης, αν $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι λύσεις της ΔΕ (2.1) μπορεί να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες,

(i) $\exists x_o \in I$, τέτοιο ώστε $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_o) \neq 0$ [Αν $\exists x_o \in I: W(x_o) \neq 0$, τότε $W(x) \neq 0\ \forall x \in I$]

(ii) Οι λύσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι ***<u>γραμμικώς ανεξάρτητες</u>*** στο I

(iii) Το σύνολο των λύσεων $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι ένα ***<u>θεμελιώδες σύνολο λύσεων</u>*** της ΔΕ.

(iv) Η ***<u>γενική λύση</u>*** της ΔΕ (2.1) είναι: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ με $c_1, c_2, \dots, c_n$ αυθαίρετες σταθερές

<u>Τύπος του Abel</u>: Αν $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι λύσεις της ΔΕ (2.1) τότε η ορίζουσα Wronski αυτών ικανοποιεί τη ΔΕ 1ης τάξης:

$$W'(x) + p_{n-1}(x) W(x) = 0 \qquad (2.4)$$

Από την επίλυση της (2.4) προκύπτει ότι

$$W(x) = c e^{-\int p_{n-1}(x) dx} \qquad (2.5)$$

Επομένως η $W(x)$ είτε είναι μηδενική είτε δεν μηδενίζεται πουθενά στο I.

Για την επίλυση της ΔΕ (2.1) το κύριο πρόβλημα είναι η εύρεση ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων. Αν οι συντελεστές είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το θεμελιώδες σύνολο λύσεων, όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα. Αν οι συντελεστές δεν είναι σταθεροί, απαιτείται συνήθως η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων ή των μεθόδων των δυναμοσειρών που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Τέτοιες μέθοδοι όμως γίνονται πιο δύσχρηστες όσο αυξάνεται η τάξη της ΔΕ.

Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης εφαρμόζεται και σε διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης. Αν $y_1(x)$ είναι μια λύση της (2.1) τότε ο μετασχηματισμός $y(x) = v(x) y_1(x)$ οδηγεί σε μία ΔΕ τάξης $n-1$ ως προς $v'(x)$. Έτσι για μία ΔΕ τάξης $n \geq 3$ προκύπτει μία ΔΕ τουλάχιστον 2ης τάξης. Επομένως, η μέθοδος υποβιβασμού τάξης σπάνια χρησιμεύει για ΔΕ τάξης ανώτερης του δύο.

<u>Παράδειγμα 2.1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $(2-x)y''' + (2x-3)y'' - xy' + y = 0$, (1) για $x < 2$ αν $y_1(x) = e^x$ είναι μία λύση της.
<u>Επίλυση</u>: Θεωρούμε ότι $y(x) = v(x)e^x$ και έχουμε τις σχέσεις
$y' = v'e^x + ve^x$, $y'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x$, $y''' = v'''e^x + 3v''e^x + 3v'e^x + ve^x$
Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (1) έχουμε

$$(2-x)v''' + (3-x)v'' = 0 \Rightarrow v''' + \frac{(3-x)}{(2-x)}v'' = 0$$

Ο συντελεστής της μεταβλητής v πάντα μηδενίζεται. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μηδενίζεται και ο συντελεστής της μεταβλητής v', οπότε η ΔΕ με τον μετασχηματισμό $v'' = u$ ανάγεται σε μία ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης,

$$u' + \frac{(3-x)}{(2-x)}u = 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι $u(x) = ce^{-x}(2-x)$. Άρα $v'' = ce^{-x}(2-x)$. Ολοκληρώνοντας δύο φορές έχουμε τη γενική λύση της (1)

$$y(x) = -cx + c_1xe^x + c_2e^x = c_1xe^x + c_2e^x + c_3x, x < 2.$$

<u>Άσκηση 2.1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ:
$x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(1+x)y' - 6y = 0$, (1) για $x > 0$ αν $y_1(x) = x^2$

3. Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις n-οστής τάξης

Για την μη ομογενή ΔΕ

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_1(x)y' + p_o(x)y = g(x) \qquad (3.1)$$

ισχύουν τα ανάλογα θεωρήματα που ισχύουν και για την μη ομογενή ΔΕ 2ης τάξης.

(i) Αν $Y_1(x)$ και $Y_2(x)$ είναι ειδικές λύσεις της ΔΕ (3.1) τότε η διαφορά τους είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς της ΔΕ (3.1).

(ii) Αν $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς της ΔΕ (3.1) και $Y_1(x)$ είναι μία ειδική λύση της (3.1) τότε η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ (3.1) είναι

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + Y_1(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + Y_1(x) \qquad (3.2)$$

με $c_1, c_2, \ldots, c_n$ αυθαίρετες σταθερές.

Για την εύρεση μίας ειδικής λύσης $Y_1(x)$ της (3.1) μπορούν να εφαρμοστούν οι μέθοδοι της μεταβολής των παραμέτρων και των προσδιοριστέων συντελεστών όπως θα μελετήσουμε σε επόμενη ενότητα.

4. Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

Η γραμμική ομογενής ΔΕ n-οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_oy = 0 \qquad (4.1)$$

όπου $a_i, i = 0,1,2,\ldots,n-1$ πραγματικές σταθερές.
Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ (4.1) παίρνουμε την Χαρακτηριστική Εξίσωση (ΧΕ): $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0$ (4.2)
Οι ρίζες $\lambda_i, i = 1,2,\ldots n$ της ΧΕ είναι οι ιδιοτιμές της ΔΕ (4.1).
Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

(i) Οι ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1,2,\ldots n$ είναι πραγματικές και άνισες. Τότε η γενική λύση της (4.1) είναι

$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_ne^{\lambda_n x}$$

(ii) Υπάρχει πραγματική ιδιοτιμή λ_o πολλαπλότητας s. Τότε οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_o είναι
$e^{\lambda_o x}, xe^{\lambda_o x}, x^2 e^{\lambda_o x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda_o x}$ $- s$ το πλήθος

(iii) Υπάρχει μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda_o = \kappa \pm i\mu$ πολλαπλότητας s. Τότε οι πραγματικές γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_o είναι

$$\left.\begin{array}{l} e^{\kappa x}cos\mu x,\ xe^{\kappa x}cos\mu x,\ x^2e^{\kappa x}cos\mu x, \dots,\ x^{s-1}e^{\kappa x}cos\mu x\ \ -s \text{ το πλήθος} \\ e^{\kappa x}sin\mu x,\ xe^{\kappa x}sin\mu x,\ x^2e^{\kappa x}sin\mu x, \dots,\ x^{s-1}e^{\kappa x}sin\mu x\ \ -s \text{ το πλήθος} \end{array}\right\} 2s \text{ το πλήθος.}$$

<u>**Παράδειγμα 4.1**</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = -1$ ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2, και $\lambda_{2,3} = \pm i$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3cosx + c_4sinx$$

<u>**Παράδειγμα 4.2**</u>: Να λυθεί η ΔΕ: $y''' + 8y = 0$ (1)

<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ:

$$\lambda^3 + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -8 = 2^3e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow \lambda = 2e^{i\frac{(\pi+2k\pi)}{3}} \Rightarrow$$

Για $k = 0$, $\lambda_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

Για $k = 1$, $\lambda_2 = 2e^{i\pi} = 2(cos\pi + isin\pi) = -2$

Για $k = 2$, $\lambda_1 = 2e^{\frac{i5\pi}{3}} = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

Επομένως η γενική λύση της (1) είναι:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{x}cos\sqrt{3}x + c_3e^{x}sin\sqrt{3}x$$

<u>**Παράδειγμα 4.3**</u>: Να λυθεί το ΠΑΤ: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$, (1)

$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3, y'''(0) = 4.$

<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ:

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$ είναι οι ιδιοτιμές κάθε μία με πολλαπλότητα 2. Επομένως οι πραγματικές λύσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι:

$$y_1(x) = cosx, y_2(x) = xcosx, y_3(x) = sinx, y_4(x) = xsinx$$

Και η γενική λύση δίνεται από την σχέση

$$y(x) = c_1cosx + c_2xcosx + c_3sinx + c_4xsinx \qquad (2)$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες, από την (2) και τις παραγώγους της, για $x = 0$, έχουμε

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y'(x) = -c_1sinx + c_2(cosx - xsinx) + c_3cosx + c_4(sinx + xcosx) \Rightarrow y'(0) = c_2 + c_3 = 0$$

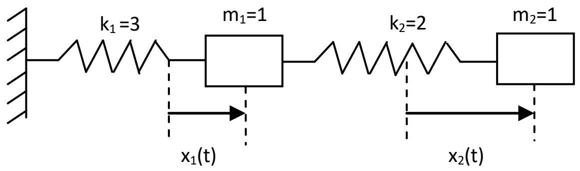
$$y''(x) = -c_1cosx + c_2(-2sinx - xcosx) - c_3sinx + c_4(2cosx - xsinx) \Rightarrow y''(0) = -c_1 + 2c_4 = 3$$

$$y'''(x) = c_1sinx + c_2(-3cosx + xsinx) - c_3cosx + c_4(-3sinx - xcosx) \Rightarrow y'''(0) = -3c_2 - c_3 = 4$$

Επιλύοντας το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα προσδιορίζονται οι σταθερές: $c_1 = 1$, $c_2 = 2, c_3 = -2$, $c_4 = 2$ και η ειδική λύση δίνεται από τη σχέση:

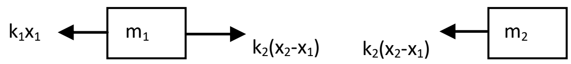
$$y(x) = (1 - 2x)cosx + 2(1 + x)sinx \qquad (3)$$

<u>Παράδειγμα 4.4</u>: Θεωρείστε το σύστημα ελατηρίου-μάζας που φαίνεται στο Σχ.1, αποτελούμενο από δύο μοναδιαίες μάζες συνδεδεμένες σε ελατήρια με σταθερές 3 και 2 αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν αποσβέσεις στο σύστημα.



α) Να βρεθούν οι εξισώσεις που ικανοποιούν οι μετατοπίσεις $x_1(t), x_2(t)$ των μαζών από τις αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας

Για $x_2 > x_1$, το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για κάθε μάζα είναι



Οι εξισώσεις κίνησης για τις μάζες m_1, m_2 είναι ένα γραμμικό σύστημα δύο ΔΕ 2ης τάξης:

$$x_1'' = -(k_1+k_2)x_1 + k_2x_2 = -5x_1 + 2x_2 \qquad (1)$$
$$x_2'' = -k_2x_2 + k_2x_1 = -2x_2 + 2x_1 \qquad (2)$$

β) Να αναχθεί το σύστημα (1) και (2) σε μία διαφορική εξίσωση 4ης τάξης και να βρεθεί η γενική λύση της.

Παραγωγίζοντας την (1) δύο φορές και απαλείφοντας τη μεταβλητή x_2 από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει

$$x_1^{(4)} = -5x_1'' + 2x_2'' = -5x_1'' + 2(-2x_2 + 2x_1) = -5x_1'' - 2(x_1'' + 5x_1) + 4x_1 \Rightarrow$$
$$x_1^{(4)} + 7x_1'' + 6x_1 = 0 \ (3)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ (3) είναι: $\lambda^4 + 7\lambda^2 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{-7\pm\sqrt{25}}{2} = \begin{cases}-1\\-6\end{cases} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ και $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{6}$ είναι οι ιδιοτιμές της. Επομένως η γενική λύση της ΔΕ (3) είναι:

$$x_1(t) = c_1cost + c_2sint + c_3cos\sqrt{6}t + c_4sin\sqrt{6}t \qquad (4)$$

γ) Να βρεθούν οι ειδικές λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες:

(i) $x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0, x_2(0) = 2, x_2'(0) = 0$

(ii) $x_1(0) = -2, x_1'(0) = 0, x_2(0) = 1, x_2'(0) = 0$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους μέχρι 3ης τάξης της (4) και υπολογίζουμε την (4) και τις παραγώγους της για $t = 0$, οπότε

$$x_1(0) = c_1 + c_3$$
$$x_1'(t) = -c_1sint + c_2cost - \sqrt{6}c_3sin\sqrt{6}t + \sqrt{6}c_4cos\sqrt{6}t \Rightarrow x_1'(0) = c_2 + \sqrt{6}c_4$$
$$x_1''(t) = -c_1cost - c_2sint - 6c_3cos\sqrt{6}t - 6c_4sin\sqrt{6}t \Rightarrow x_1''(0) = -c_1 - 6c_3$$
$$x_1'''(t) = c_1sint - c_2cost + 6\sqrt{6}c_3sin\sqrt{6}t - 6\sqrt{6}c_4cos\sqrt{6}t \Rightarrow x_1'''(0) = -c_2 - 6\sqrt{6}c_4$$

Επίσης, από την εξίσωση (1) του συστήματος έχουμε

$$2x_2(t) = x_1''(t) + 5x_1(t) \Rightarrow 2x_2(0) = x_1''(0) + 5x_1(0) = -c_1 - 6c_3 + 5(c_1 + c_3) = 4c_1 - c_3$$

Και

$$2x_2'(t) = x_1'''(t) + 5x_1'(t) \Rightarrow 2x_2'(0) = x_1'''(0) + 5x_1'(0) = -c_2 - \sqrt{6}c_4 + 5\left(c_2 + \sqrt{6}c_4\right)$$
$$= 4c_2 - 4\sqrt{6}c_4$$

Επομένως για τις αρχικές συνθήκες (i) $x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0, x_2(0) = 2, x_2'(0)$ έχουμε το σύστημα:

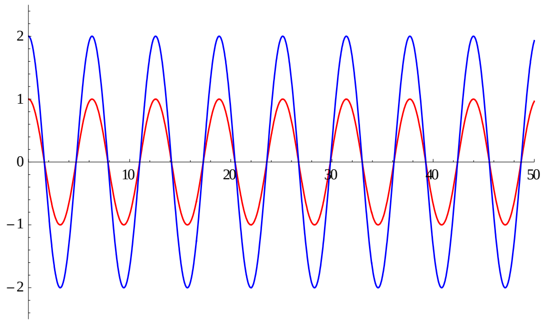
$$c_1 + c_3 = 1, \quad c_2 + \sqrt{6}c_4 = 0, \qquad 4c_1 - c_3 = 4, \qquad 4c_2 - 4\sqrt{6}c_4 = 0$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος προκύπτει ότι: $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = 0$, επομένως η ειδική λύση (η μετατόπιση του πρώτου σώματος) είναι: $x_1(t) = cost$. Από την εξίσωση (1) του συστήματος προσδιορίζουμε την μετατόπιση του δευτέρου σώματος: $x_2(t) = 2cost$.
Για τις αρχικές συνθήκες (ii) $x_1(0) = -2, x_1^{'}(0) = 0, x_2(0) = 1, x_2^{'}(0) = 0$ έχουμε το σύστημα:

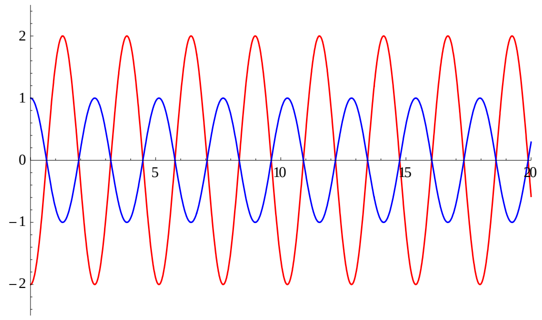
$$c_1 + c_3 = -2, \quad c_2 + \sqrt{6}c_4 = 0, \qquad 4c_1 - c_3 = 2, \qquad 4c_2 - 4\sqrt{6}c_4 = 0$$

Από το οποίο προκύπτει ότι: $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -2, c_4 = 0$. Επομένως , οι μετατοπίσεις των δύο μαζών είναι $x_1(t) = -2cos\sqrt{6}t,\ \ x_2(t) = cos\sqrt{6}t$.

Οι λύσεις που βρέθηκαν στα προβλήματα (i) και (ii) περιγράφουν δύο διαφορετικούς τρόπους ταλάντωσης. Στο πρώτο πρόβλημα η συχνότητα της κίνησης είναι 1 και οι δύο μάζες είναι σε φάση κινούμενες και οι δύο είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Η δεύτερη μάζα διαγράφει 2 φορές μεγαλύτερη απόσταση από την πρώτη μάζα [Σχ. (2)]. Στο δεύτερο πρόβλημα η ταλάντωση των μαζών έχει συχνότητα $\sqrt{6}$ και οι μάζες βρίσκονται εκτός φάσης, με τη μία να κινείται προς τα δεξιά όταν η άλλη κινείται προς τα αριστερά και αντίστροφα. Η δε πρώτη μάζα διαγράφει την διπλάσια απόσταση από ότι η δεύτερη [Σχ.(3)]



Σχ. (2)

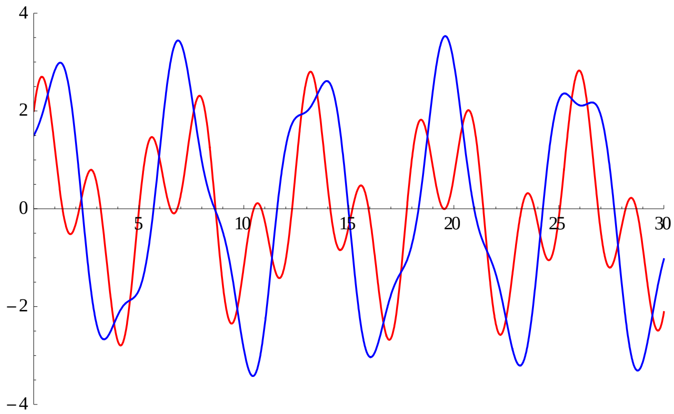


Σχ. (3)

Για οποιεσδήποτε άλλες αρχικές συνθήκες η κίνηση των μαζών είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο παραπάνω κινήσεων. Στο Σχ.(4) δίνεται η γραφική παράσταση για τις μετατοπίσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$, όταν $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$, οπότε

$$x_1(t) = cost + sint + cos\sqrt{6}t + sin\sqrt{6}t$$

$$x_2(t) = 2cost + 2sint - \frac{1}{2}cos\sqrt{6}t - \frac{1}{2}sin\sqrt{6}t$$



Σχ. (4)

5. Μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση-Προσδιορισμός ειδικής λύσης

Α. Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων (Lagrange)

Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ της αντίστοιχης ομογενούς της ΔΕ

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_1(x)y' + p_o(x)y = g(x) \qquad (5A.1)$$

και υποθέτουμε ότι η ειδική λύση της μη ομογενούς θα είναι της μορφής

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)\, y_n(x) \qquad (5A.2)$$

όπου $u_i(x), i = 1,2, \dots, n$ συναρτήσεις υπό προσδιορισμό. Παραγωγίζοντας τη (5Α.2) έχουμε

$$y'_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + \cdots + u_n(x)y_n'(x)$$

Για την απλοποίηση των υπολογισμών θεωρούμε ότι

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) = 0 \qquad (I)$$

Επομένως,

$$y'_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + \cdots + u_n(x)y_n'(x)$$

και υπολογίζουμε τη 2η παράγωγο της $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$

$$y''_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + \cdots + u_n'(x)y_n'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x) + \cdots + u_n(x)y_n''(x)$$

Θεωρούμε και πάλι ότι

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + \cdots + u_n'(x)y_n'(x) = 0 \qquad (II)$$

Άρα

$$y''_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x) + \cdots + u_n(x)y_n''(x)$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία υπολογίζομε τις παραγώγους της $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ μέχρι τάξης $n-1$ και εξισώνουμε με το μηδέν το άθροισμα των όρων που περιλαμβάνουν τις παραγώγους των $u_i(x)$. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε συνολικά, μαζί με τις εξισώσεις (I) και (II), $n-1$ εξισώσεις οι οποίες περιλαμβάνουν τις πρώτες παραγώγους των άγνωστων συναρτήσεων $u_i(x)$ ως ακολούθως

$$u_1'(x)y_1^{(m)}(x) + u_2'(x)y_2^{(m)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(m)}(x) = 0, \; m = 0,1,2, \dots n-2 \qquad (5A.3)$$

Με τις συνθήκες αυτές οι παράγωγοι της $y(x)$ ανάγονται στις

$$y^{(k)}_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1(x)y_1^{(k)}(x) + u_2(x)y_2^{(k)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(k)}(x), \; k = 1,2, \dots n-1 \qquad (5A.4)$$

Τέλος παραγωγίζουμε την $y^{(n-1)}_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ από την (5Α.4) και λαμβάνουμε την

$$y^{(n)}_{\varepsilon\iota\delta}(x) = u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + u_1(x)y_1^{(n)}(x) + u_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(n)}(x) \qquad (5A.5)$$

Προκειμένου να ικανοποιείται η ΔΕ (5Α.1) από την $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$ και τις παραγώγους της που δίνονται από τις σχέσεις (5Α.2), (5Α.4) και (5Α.5) αντίστοιχα, θα πρέπει να ισχύει

$$u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x) \qquad (5A.6)$$

Οι εξισώσεις (5Α.3) και (5Α.6) συνιστούν ένα αλγεβρικό σύστημα n εξισώσεων ως προς u_1', $u_2', \dots, u_n'$

$$\begin{array}{c}
u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) = 0 \\
u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + \cdots + u_n'(x)y_n'(x) = 0 \\
\vdots \\
u_1'(x)(x)y_1^{(n-2)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\
u_1'(x)(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x)
\end{array} \qquad (5A.7)$$

Το σύστημα (5Α.7) έχει μη μηδενική λύση ως προς $u_1', u_2', \dots, u_n'$ εφόσον η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η ορίζουσα Wronski $W(x)$ του θεμελιώδους συνόλου λύσεων $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ της αντίστοιχης ομογενούς

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \dots & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Gramer η λύση του συστήματος γράφεται στη μορφή

$$u_m^{'}=\frac{W_m(x)g(x)}{W(x)}, m=1,2,\dots n \qquad (5A.8)$$

όπου $W_m(x)$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την $W(x)$ αν αντικατασταθεί η m στήλη με τη στήλη $(0,0,\dots 0,1)$.

$$\begin{array}{c} \\ W_m(x)= \end{array}\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad m \text{ στήλη} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow \\ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \dots & 0 & \dots & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & 1 & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\end{array}$$

Ολοκληρώνοντας τις (5Α.8), έχουμε τη μερική λύση της (5Α.1)

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x)=\sum_{m=1}^{n} y_m(x)\int\frac{W_m(x)g(x)}{W(x)}dx,$$

ή

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x)=\sum_{m=1}^{n} y_m(x)\int_{x_o}^{x}\frac{W_m(s)g(s)}{W(s)}ds$$

με x_o ένα τυχαίο σημείο του I.

<u>Παράδειγμα 5Α.1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y^{'''}-y^{''}-y^{'}+y=g(x)$ (1)
<u>Επίλυση</u>: Η αντίστοιχη ομογενής είναι: $y^{'''}-y^{''}-y^{'}+y=0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ:

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow \begin{array}{c}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=\lambda_3=1\end{array}$$

Επομένως η γενική λύση της (1) είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x)=y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x)+y_{\varepsilon\iota\delta}(x)=c_1e^{-x}+c_2e^x+c_3xe^x+y_{\varepsilon\iota\delta}(x)$$

Η ορίζουσα Wronski του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ομογενούς είναι

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^x & xe^x \\ -e^{-x} & e^x & (x+1)e^x \\ e^{-x} & e^x & (x+2)e^x \end{vmatrix}=e^{2x}e^{-x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & (x+1) \\ 1 & 1 & (x+2)\end{vmatrix}=4e^x$$

Για την ειδική λύση της ΔΕ (1) θεωρούμε ότι $y_{\varepsilon\iota\delta}(x)=u_1(x)e^{-x}+u_2(x)e^x+u_3(x)xe^x$ όπου

$$u_1{}'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & (x+1)e^x \\ 1 & e^x & (x+2)e^x\end{vmatrix}g(x)}{4e^x}=\frac{e^{2x}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & (x+1) \\ 1 & 1 & (x+2)\end{vmatrix}g(x)}{4e^x}=\frac{e^{2x}g(x)}{4e^x}=\frac{e^xg(x)}{4}$$

$$u_2{}'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 0 & (x+1) \\ 1 & 1 & (x+2)\end{vmatrix}g(x)}{4e^x}=\frac{(-2x-1)g(x)}{4e^x} \qquad u_3{}'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}g(x)}{4e^x}=\frac{2g(x)}{4e^x}=\frac{g(x)}{2e^x}$$

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x)=\sum_{m=1}^{3}y_m(x)\int_{x_o}^{x}\frac{W_m(s)g(s)}{W(s)}ds=e^{-x}\int_{x_o}^{x}\frac{e^sg(s)}{4}d+e^x\int_{x_o}^{x}\frac{(-2s-1)g(s)}{4e^s}ds+xe^x\int_{x_o}^{x}\frac{g(s)}{2e^s}ds$$

Ο αναλυτικός προσδιορισμός των ολοκληρωμάτων εξαρτάται από την συνάρτηση $g(x)$.

Β. <u>Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών</u>
Μία ειδική λύση της γραμμικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης n-τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_o y = g(x) \qquad (5B.1)$$

μπορεί να βρεθεί με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών εφόσον ο μη ομογενής όρος έχει την ειδική μορφή

$$g(x) = e^{\rho x}\{P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x\} \qquad (5B.2)$$

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών για διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης της μορφής (5Β.1) εφαρμόζεται με τον τρόπο που μελετήσαμε στις ΔΕ 2^{ης} τάξης. Υποθέτουμε ότι η μορφή της ειδικής λύσης είναι

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = x^s e^{\rho x}\{A_N(x)cos\beta x + B_N(x)sin\beta x\} \qquad (5B.3)$$

όπου τα πολυώνυμα $A_N(x)$ και $B_N(x)$ με $N = max\{n, m\}$ δίνονται από τις εκφράσεις

$$A_N(x) = A_N x^N + A_{N-1}x^{N-1} + \cdots + A_1 x + A_o$$

$$B_N(x) = B_N x^N + B_{N-1}x^{N-1} + \cdots + B_1 x + B_o$$

και όλοι οι συντελεστές τους είναι πλέον άγνωστες ποσότητες προς προσδιορισμό, έτσι ώστε η αναπαράσταση (5Β.3) να είναι όντως ειδική λύση της (5Β.1). Στην έκφραση (5Β.3) υπάρχει και ο παράγοντας x^s όπου η παράμετρος s είναι η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται, ως ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς, η παράμετρος $\rho + i\beta$. Όταν η παράμετρος $\rho + i\beta$ δεν είναι ρίζα της ΧΕ λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι μηδενική-και συνεπώς δεν υπάρχει ο όρος x^s-ενώ αν $\rho + i\beta$ είναι ρίζα πολλαπλότητας s τότε υπάρχει ο όρος x^s . Η κύρια διαφορά, η οποία ανακύπτει κατά την εφαρμογή της μεθόδου σε εξισώσεις ανώτερης τάξης, οφείλεται στο γεγονός ότι οι ιδιοτιμές της ΔΕ ενδέχεται να έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 2.

Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζεται στα επόμενα παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 5Β.1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y^{(4)} + 8y'' + 16y = cos2x$ (1)
<u>Επίλυση</u>: Η αντίστοιχη ομογενής είναι: $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ:
$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i$, πολλαπλότητας 2 και $\lambda_2 = -2i$, πολλαπλότητας 2.
Επομένως η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) = c_1 cos2x + c_2 xcos2x + c_3 sin2x + c_4 xsin2x$$

Η γενική λύση της μη ομογενούς θα δίνεται από τη σχέση:

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = y_{\gamma\varepsilon\nu}^{o\mu}(x) + y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = c_1 cos2x + c_2 xcos2x + c_3 sin2x + c_4 xsin2x + y_{\varepsilon\iota\delta}(x).$$

Για την εύρεση μίας ειδικής λύσης της (1), παρατηρούμε ότι ο μη ομογενής όρος που δίνεται είναι της μορφής (5Β.2) με $\rho = 0$, $\beta = 2$ και $P_n(x) = 1$ και $Q_m(x) = 0$. Η παράμετρος $\rho + i\beta$ είναι ίση με $2i$ και <u>είναι</u> ρίζα της ΧΕ της αντίστοιχης ομογενούς <u>πολλαπλότητας 2</u>. Επομένως, η υποψήφια ειδική λύση θα είναι της μορφής:

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = x^2(Acos2x + Bsin2x) \qquad (2)$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους της (2) και αντικαθιστώντας στη ΔΕ (1) έχουμε

$$y'_{\varepsilon\iota\delta}(x) = (2Ax + 2Bx^2)cos2x + (2Bx - 2Ax^2)sin2x$$

$$y''_{\varepsilon\iota\delta}(x) = (2A + 8Bx - 4Ax^2)cos2x + (2B - 8Ax - 4Bx^2)sin2x$$

$$y'''_{\varepsilon\iota\delta}(x) = (12B - 24Ax - 8Bx^2)cos2x + (-12A - 24Bx + 8Ax^2)sin2x$$

$$y^{(4)}{}_{\varepsilon\iota\delta}(x) = (-48A - 64Bx + 16Ax^2)cos2x + (-48B + 64Ax + 16Bx^2)sin2x$$

$$y^{(4)}+8y''+16y=cos2x \Rightarrow -32Acos2x-32Bsin2x=cos2x \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{32} \\ B=0 \end{cases}$$

Άρα η γενική λύση της (1) είναι

$$y_{γεν}^{μη\ ομ}(x)=c_1cos2x+c_2xcos2x+c_3sin2x+c_4xsin2x-\frac{1}{32}x^2cos2x.$$

Παράδειγμα 5Β.2: Για τις παρακάτω ΔΕ να δοθεί η κατάλληλη μορφή για την ειδική λύση, ώστε να εφαρμόζεται η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.

α) $y'''-6y'+9y=4e^x-16e^{-3x}+e^{\frac{3x}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

β) $y^{(4)}+2y''+y=e^x+sinx$

γ) $y'''-4y'=x+3cosx+x^2e^{-2x}$

Επίλυση: α) Η αντίστοιχη ομογενής είναι: $y'''-6y'+9y=0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ:

$\lambda^3-6\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda^2-3\lambda+3)=0 \Rightarrow \lambda_1=-3$, και $\lambda_{2,3}=\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_{γεν}^{ομ}(x)=c_1e^{-3x}+e^{\frac{3x}{2}}\left(c_2cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Για την εύρεση της μορφής της ειδικής λύσης της (1), παρατηρούμε ότι ο μη ομογενής όρος είναι το άθροισμα των επιμέρους μη ομογενών όρων:

$g_1(x)=4e^x,\ g_2(x)=-16e^{-3x},\ g_3(x)=e^{\frac{3x}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Η μορφή των ειδικών λύσεων που αντιστοιχούν στις παραπάνω συναρτήσεις είναι:

$y_{ειδ\,1}(x)=Ae^x, y_{ειδ\,2}(x)=xBe^{-3x},\ y_{ειδ3}(x)=xe^{\frac{3x}{2}}\left[Γcos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+Δsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right].$

Επομένως η κατάλληλη μορφή είναι:

$$y_{ειδ}(x)=Ae^x+xBe^{-3x}+xe^{\frac{3x}{2}}\left[Γcos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+Δsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

β) Η αντίστοιχη ομογενής είναι: $y^{(4)}+2y''+y=0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ:

$\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=i$, πολλαπλότητας 2 και $\lambda_2=-i$, πολλαπλότητας 2.

Για την εύρεση της μορφής της ειδικής λύσης της, παρατηρούμε ότι ο μη ομογενής όρος είναι το άθροισμα των επιμέρους μη ομογενών όρων:

$g_1(x)=e^x,\ g_2(x)=sinx$

Η μορφή των ειδικών λύσεων που αντιστοιχούν στις παραπάνω συναρτήσεις είναι:

$y_{ειδ\,1}(x)=Ae^x, y_{ειδ\,2}(x)=x^2(Bcosx+Γsinx).$

Επομένως η κατάλληλη μορφή είναι: $y_{ειδ}(x)=Ae^x+x^2(Bcosx+Γsinx).$

γ) Η αντίστοιχη ομογενής είναι: $y'''-4y'=0$. Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}$ προσδιορίζουμε τη ΧΕ: $\lambda^3-4\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-4)=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=2$ και $\lambda_3=-2$

Για την εύρεση της μορφής της ειδικής λύσης της, παρατηρούμε ότι ο μη ομογενής όρος είναι το άθροισμα των επιμέρους μη ομογενών όρων:

$g_1(x)=x,\ g_2(x)=3cosx,\ g_3(x)=x^2e^{-2x}$

Η μορφή των ειδικών λύσεων που αντιστοιχούν στις παραπάνω συναρτήσεις είναι:

$y_{ειδ\,1}(x)=x(Ax+B),\ y_{ειδ\,2}(x)=(Γcosx+Δsinx),\ \ y_{ειδ\,3}(x)=xe^{-2x}(E_2x^2+E_1x+E_o)$.

Επομένως η κατάλληλη μορφή είναι:

$y_{ειδ}(x)=(Ax^2+Bx)+(Γcosx+Δsinx)+e^{-2x}(E_2x^3+E_1x^2+E_ox).$