ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τι είναι διαφορική εξίσωση (ΔΕ); Είναι μία μαθηματική έννοια. Μία μαθηματική εξίσωση που περιγράφει τη σχέση που έχει μία άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) μίας ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών με τις διαφόρων τάξεων παραγώγους της.

Πως προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις;
Οι διαφορικές εξισώσεις προέκυψαν ως επί το πλείστον μέσα από τις προσπάθειες των επιστημόνων να περιγράψουν και να διατυπώσουν μαθηματικούς νόμους για φυσικά φαινόμενα και διεργασίες.
Συνέστησαν από νωρίς μία επιστημονική περιοχή που διατηρεί μεν την εσωτερική μαθηματική της συνοχή αλλά εκ των πραγμάτων χαρακτηρίζεται από μία ανατροφοδοτική και συνεκτική σχέση με τις φυσικές επιστήμες. Μάλιστα είναι ενδιαφέρον ότι ιστορικά, τα μεγάλα άλματα στην κατανόηση και στα επιτεύγματα στη μαθηματική θεμελίωση των ΔΕ συντελέστηκαν μέσα από αντίστοιχα βήματα στην κατανόηση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των συναφών εφαρμογών και αντίστροφα.
Οι ΔΕ βρίσκουν εφαρμογές σε όλες τις επιστήμες, μηχανική, φυσική, χημεία, τεχνολογικές επιστήμες, οικονομικές επιστήμες, βιολογία, ιατρική, αστρονομία, κοινωνιολογία ακόμα και στα μαθηματικά αυτά καθ' αυτά κυρίως στην γεωμετρία.
Είναι εύκολο να καταλάβει κανείς το ευρύ πεδίο εφαρμογών διότι οι περισσότεροι νόμοι των φυσικών επιστημών και διαδικασιών εμπεριέχουν ντετερμινιστικές σχέσεις (γνωρίζοντας τις αρχικές συνθήκες μπορούμε να προσδιορίσουμε την μελλοντική κατάστασή του) μεταξύ συνεχώς μεταβαλλόμενων ποσοτήτων (που μοντελοποιούνται με συναρτήσεις) και των ρυθμών μεταβολών τους με το χρόνο ή την θέση (παραγώγους). Όταν μία τέτοια σχέση εκφρασθεί μαθηματικά το αποτέλεσμα είναι μία διαφορική εξίσωση, η οποία ονομάζεται μαθηματικό ***πρότυπο ή μοντέλο*** της διαδικασίας.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

1) ***Η ελεύθερη πτώση σώματος***

Μελετώντας την ελεύθερη πτώση ενός σώματος μάζας m εντός της ατμόσφαιρας κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας και διατυπώνοντας τον 2^o νόμο του Νεύτωνα, που διέπει το φαινόμενο αυτό, καταλήγουμε στην εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος:

$$F = ma, \qquad (1)$$

όπου το F παριστάνει την συνολική δύναμη που εξασκείται στο σώμα και το a την προκαλούμενη επιτάχυνση, η οποία συναρτήσει της ταχύτητας $v(t)$ δίνεται από τον τύπο $a = dv/dt$. Επομένως η σχέση (1) γράφεται:

$$m\frac{dv}{dt} = F \qquad (2).$$

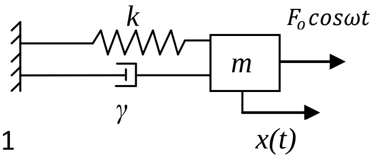
Οι δυνάμεις που εξασκούνται στο σώμα είναι α) το βάρος του σώματος mg ($g = 9.8m/sec^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας) και β) η αντίσταση του αέρα η οποία συχνά θεωρείται ότι είναι ανάλογη της ταχύτητας, γv, όπου γ είναι ο συντελεστής αντίστασης που εξαρτάται από το σώμα. Επομένως καταλήγουμε στη ΔΕ:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v \qquad (3)$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση είναι η ταχύτητα του σώματος, $v(t)$. Η μάζα m και το γ ονομάζονται παράμετροι του συστήματος διότι εξαρτώνται από το σώμα που πέφτει. Το g είναι μία φυσική σταθερά –η ίδια για όλα τα σώματα.

2) *Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα*

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα προτύπου είναι το σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχ.1

Θέλουμε να καταστρώσουμε μία διαφορική εξίσωση που να περιγράφει την κίνηση του σώματος μάζας m. Συμβολίζουμε με $x(t)$ την απομάκρυνση της μάζας από την θέση ισορροπίας κατά την χρονική στιγμή t. Ο φυσικός νόμος που διέπει την κίνηση του σώματος είναι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα. Σύμφωνα με τον νόμο αυτό, το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την επιτάχυνσή του ισούται με τη συνολική δύναμη που εξασκείται στο σώμα. Οι δυνάμεις αυτές είναι:

α) η δύναμη του ελατηρίου που από τον νόμο του Hooke είναι ίση $-kx(t)$,

β) η δύναμη του αποσβεστήρα που δρα πάντοτε σε αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη που κινείται η μάζα. Η δύναμη αυτή μπορεί να οφείλεται σε ποικίλα αίτια: στην αντίσταση του αέρα, ή οποιουδήποτε άλλου μέσου εντός του οποίου κινείται η μάζα, στη τριβή μεταξύ μάζας και οδηγού που περιορίζει την κίνηση της μάζας σε μία διάσταση. Σε κάθε περίπτωση υποθέτουμε ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη του μέτρου της ταχύτητας $x'(t)$, με συντελεστή αναλογίας (απόσβεσης) $\gamma > 0$, άρα $-\gamma x'(t)$.

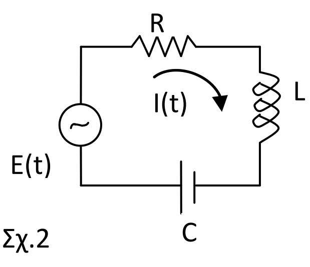
γ) Η εξωτερική δύναμη (διέγερση του συστήματος) $F(t) = F_o cos\omega t$. Συχνά η δύναμη αυτή είναι περιοδική της μορφής $F(t) = F_o cos\omega t$. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι: της μορφής

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = F_o cos\omega t \qquad (4)$$

Η πλήρης διατύπωση του προβλήματος κίνησης του σώματος επιβάλλει τον καθορισμό δύο αρχικών συνθηκών συγκεκριμένα, την αρχική θέση $x(0) = x_o$ και την αρχική ταχύτητα $x'(0) = x_1$. Η διαφορική εξίσωση μαζί με τις αρχικές συνθήκες ορίζουν ένα μαθηματικό πρόβλημα (ΠΑΤ) που όπως θα μάθουμε έχει μοναδική λύση. Δηλαδή η θέση της μάζας με δοθείσα αρχική μετατόπιση και ταχύτητα είναι καθορισμένη για κάθε μελλοντική χρονική στιγμή και δίνεται από την λύση που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες.

3) *Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC*

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το ηλεκτρικό κύκλωμα με συγκεντρωμένα στοιχεία μία ωμική αντίσταση μέτρου R, έναν πυκνωτή χωρητικότητας C και ένα πηνίο αυτεπαγωγής L, όπως φαίνεται στο Σχ.2. Στα άκρα του κυκλώματος επιβάλλεται αρμονική χρονικά ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής $E(t) = V_o cos\omega t$. Ο πρώτος νόμος του Kirchoff εφαρμοζόμενος στο κύκλωμα μας δίνει το ακόλουθο ισοζύγιο τάσεων:



$$E(t) = RI(t) + LI'(t) + \frac{1}{C}Q(t) \qquad (5)$$

Σχ.2

όπου $I(t)$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος και $\frac{1}{C}Q(t)$ είναι η τάση του πυκνωτή. Αν το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t είναι η συνάρτηση $Q(t)$ τότε η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι αναγκαία ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου ($I(t) = Q'(t)$). Ο νόμος του Kirchoff (5) γίνεται

$$LQ''(t) + RQ'(t) + 1/C\, Q(t) = E(t). \qquad (6)$$

Η διαφορική εξίσωση (6) περιγράφει την μεταβολή του φορτίου $Q(t)$ του πυκνωτή με τον χρόνο.

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΔΕ

Ο κύριος σκοπός του μαθήματος είναι να μελετήσουμε μεθόδους επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων και να εξετάσουμε ορισμένες ιδιότητες των λύσεων τους.
Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε πιο εύκολα τις ΔΕ τις ταξινομούμε σε διάφορες κατηγορίες με κάποια κριτήρια.

Α. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ)

Ένα πρώτο και πολύ βασικό κριτήριο διαχωρισμού βασίζεται στο κατά πόσο η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές.
Στην περίπτωση που η άγνωστη συνάρτηση είναι μίας μεταβλητής η ΔΕ περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους και ονομάζεται Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ). Επομένως η ΣΔΕ είναι της ***γενικής ή πεπλεγμένης*** μορφής:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, x \in I \subseteq \mathbb{R} \qquad (\text{A1})$$

Όπου F είναι μία συνάρτηση $n + 2$ μεταβλητών και $y: I \longrightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη (προσδιοριστέα) συνάρτηση. Αν ισχύουν οι αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για την επίλυση της (Α1) ως προς την παράγωγο ανώτερης τάξης $y^{(n)}(x)$ τότε προκύπτει η ***κανονική ή λυμένη*** μορφή των ΣΔΕ

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \;\; x \in I \subseteq \mathbb{R} \qquad (\text{A2})$$

Όλα τα προηγούμενα παραδείγματα που αναφέραμε είναι ΣΔΕ.

<u>Τάξη ΣΔΕ</u> ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στην εξίσωση.

<u>Παραδείγματα</u>:

(i) Η ΔΕ: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v$ είναι 1ης τάξης
(ii) $mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = F_o cos\omega t$ είναι 2ης τάξης
(iii) $y^{(4)}(x) + 3(y''')^2 + 4y^3 = 0$ είναι 4ης τάξης
(iv) οι ΔΕ (1) και (2) είναι n-τάξης

<u>Γραμμικές – Μη γραμμικές ΣΔΕ</u>

Γραμμική ονομάζεται η ΣΔΕ (Α1) όταν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Η πιο γενική μορφή μίας γραμμικής ΣΔΕ είναι:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = g(x) \quad (\text{A3})$$

Η συνάρτηση $g(x)$ ονομάζεται ***μη ομογενής*** όρος της ΔΕ (***διέγερση, εξαναγκασμός***). Αν $g(x) \equiv 0$ τότε η ΔΕ (Α3) ονομάζεται ***ομογενής***, διαφορετικά ονομάζεται ***μη ομογενής***.
Οι συναρτήσεις $a_i(x), i = 1,2, \ldots, n$ ονομάζονται ***συντελεστές*** της ΔΕ (***παράμετροι του συστήματος***).

<u>Παραδείγματα γραμμικών ομογενών-μη ομογενών ΣΔΕ</u>

(i) $mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = F_o cos\omega t$ Γραμμική μη ομογενής ΣΔΕ
(ii) $y''(t) + e^{-\varepsilon t} y(t) = 0$ Γραμμική ομογενής ΣΔΕ (Ταλάντωση ενός χρονομεταβλητού ελατηρίου χωρίς απόσβεση)
(iii) $y'(x) + sinx\, y(x) = lnx$ Γραμμική μη ομογενής
(iv) $y''(x) + tanx\, y'(x) + x^2 y(x) = 0$ Γραμμική ομογενής
(v) $x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$ Γραμμική ομογενής (Εξίσωση Euler)

(vi) $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \alpha(\alpha-1)y(x) = 0, |x| < 1$ Γραμμική ομογενής (Εξίσωση Legendre)

(vii) $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-p^2)y(x) = 0, x > 0$ Γραμμική ομογενής (Εξίσωση Bessel)

Οι τρείς τελευταίες εξισώσεις έχουν εφαρμογές σε προβλήματα της μαθηματικής φυσικής.

Για τις μη γραμμικές ΣΔΕ έχουμε την ακόλουθη ταξινόμηση:

Σχεδόν γραμμική ονομάζεται η ΣΔΕ η οποία είναι μη γραμμική μόνο ως προς την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και γραμμική ως προς τις παραγώγους της.

<u>**Παραδείγματα**</u>:

(i) $y''(x) + 2y(x) = 2y^2(x)$

(ii) $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)y^a(x), a \in \mathbb{R}, a \neq 0{,}1$ Εξίσωση Bernoulli

(iii) $y'(x) = f_2(x)y^2(x) + f_1(x)y(x) + f_o(x)$, Εξίσωση Riccati

Ημιγραμμική ονομάζεται η ΣΔΕ η οποία είναι μη γραμμική ως προς την $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ και γραμμική ως προς την παράγωγο ανώτερης τάξης.

<u>**Παραδείγματα**</u>:

(i) $y''(x) + \left(y'(x)\right)^2 = 2y(x)$

(ii) $y'''(x) + y'(x)y(x) = 2y^2(x)$

Πλήρως μη γραμμική ονομάζεται η ΣΔΕ που είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς την παράγωγο ανώτερης τάξης $y^{(n)}(x)$. Π.χ. $\sqrt{y'''(x)} = 3y'(x) - 2y''(x)$.

Μία κατηγορία μη γραμμικών ΣΔΕ είναι οι είναι ***πολυωνυμικές*** ΣΔΕ στις οποίες η συνάρτηση F είναι πολυώνυμο των $y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$. ***Βαθμός της πολυωνυμικής ΣΔΕ*** είναι η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η παράγωγος ανώτερης τάξης.

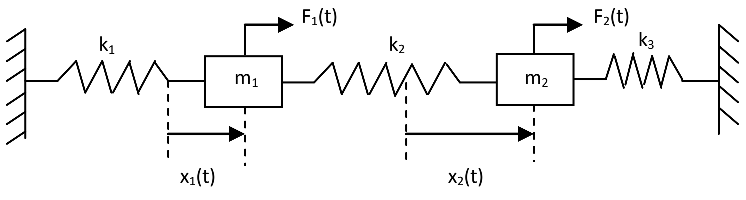
Π.χ. $x(y')^4 - 2y(y')^3 + 12x^3 = 0$, 4ου βαθμού, $3(y'')^3 - 4(y')^4 + y^3 = 0$, 3ου βαθμού.

Β. Συστήματα ΣΔΕ

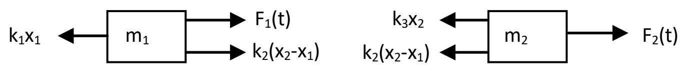
Σε πολλά προβλήματα εμφανίζονται ΔΕ με περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο αριθμός των διαφορικών εξισώσεων συμπίπτει συνήθως με τον αριθμό των άγνωστων συναρτήσεων. Μία τέτοια συλλογή ΔΕ συνιστά ένα σύστημα (συνήθων) ΔΕ.

<u>**Παραδείγματα**</u>:

(i) Σύστημα ελατηρίου-μάζας του Σχ. (2). Οι δύο μάζες κινούνται πάνω σε λεία επιφάνεια υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων $F_1(t)$ και $F_2(t)$ και είναι περιορισμένες από τρία ελατήρια των οποίων οι σταθερές είναι k_1, k_2 και k_3 αντίστοιχα.



Για $x_2 > x_1$, το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για κάθε μάζα είναι



Οι εξισώσεις κίνησης για τις μάζες m_1, m_2 είναι ένα γραμμικό σύστημα δύο ΔΕ 2ης τάξης: (α), (β)

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1(t) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t) \quad (\alpha)$$

$$m_2x_2'' = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t) \quad (\beta)$$

(ii) (Βιολογία - Μαθηματική Οικολογία). Έστω ότι $u(t)$ και $v(t)$ είναι οι πληθυσμοί στο χρόνο t δύο ειδών τα οποία αλληλεπιδρούν. Οι στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής των πληθυσμών $u(t)$ και $v(t)$ εξαρτώνται από τις τρέχουσες τιμές και των δύο πληθυσμών $u(t)$ και $v(t)$. Συνήθως ο ένας από τους δύο πληθυσμούς (έστω ο $u(t)$) αναφέρεται ως κυνηγός και ο άλλος (έστω ο $v(t)$) ως θήραμα. Για παράδειγμα, ο κυνηγός $u(t)$ μπορεί να είναι ο αριθμός των αλεπούδων και το θήραμα $v(t)$ ο αριθμός των λαγών σε ένα δάσος ή εναλλακτικά $u(t)$ μπορεί να είναι ο πληθυσμός ενός μεγάλου ψαριού και $v(t)$ ενός μικρού ψαριού σε μία λίμνη (υπό την παραδοχή ότι το μεγάλο ψάρι κυνηγάει το μικρό). Όταν μειώνονται τα θηράματα τότε αναμένεται να μειωθεί και ο αριθμός των κυνηγών, ενώ όταν μειώνεται ο αριθμός των κυνηγών τότε ο πληθυσμός των θηραμάτων αναμένεται να αυξηθεί. Η μοντελοποίηση ενός τέτοιου τύπου αλληλεπίδρασης δύο πληθυσμών οδηγεί με φυσικό τρόπο σε ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων. Ένα κλασικό τέτοιο μοντέλο είναι το Lotka-Volterra:

$$v^{'}(t) = av(t) - bv(t)u(t)$$
$$u^{'}(t) = -cu(t) + dv(t)u(t)$$

που είναι ένα μη γραμμικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Οι σταθερές a, b, c, d είναι όλες θετικές, a είναι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των θηραμάτων $v(t)$ και c είναι ο ρυθμός αφανισμού του πληθυσμού των κυνηγών $u(t)$. Οι όροι $v(t)u(t)$ μοντελοποιούν τις αλληλεπιδράσεις των δύο πληθυσμών, όπου θεωρείται ότι ο ρυθμός μεταβολής τους είναι ανάλογος του γινομένου των πληθυσμών. Επειδή κάθε τέτοια αλληλεπίδραση δρα ευεργετικά για τους κυνηγούς και δυσμενώς για τα θηράματα, εμφανίζεται θετικό πρόσημο στη δεύτερη και αρνητικό στην πρώτη εξίσωση με αντίστοιχους συντελεστές αλληλεπίδρασης d και b. Επιλύοντας το σύστημα και λαμβάνοντας το ασυμπτωτικό όριο των λύσεων αυτού, μπορεί να διερευνηθούν συνθήκες ύπαρξης οικολογικής ισορροπίας ως προς τα δύο είδη των πληθυσμών.

Γ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ)

Σε πολλά σημαντικά φυσικά προβλήματα, υπάρχουν δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και έτσι τα αντίστοιχα μαθηματικά πρότυπα περιέχουν μερικές και όχι συνήθεις παραγώγους. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ). Έστω ότι $u = u(x, y, z, t)$ μία συνάρτηση του χρόνου t και των τριών ορθογωνίων συντεταγμένων (x, y, z) ενός σημείου στο χώρο, τότε οι παρακάτω τρείς διαφορικές εξισώσεις αποτελούν τις πιο γνωστές ΜΔΕ, θεμελιώδους σημασίας σε πολλούς κλάδους της μαθηματικής φυσικής αλλά και από μαθηματικής άποψης διότι η μελέτη τους συνετέλεσε στην ανάπτυξη πολλών μαθηματικών εννοιών και θεωριών.

Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = k^{-2}u_t$
Η εξίσωση διάδοσης κυμάτων (κυματική): $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = c^{-2}u_{tt}$
Η εξίσωση δυναμικού (Laplace) : $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, όπου $u = u(x, y, z)$

Αυτές οι ΜΔΕ συνδέονται με τρία διαφορετικά είδη φυσικών φαινομένων: την διάχυση, τις ταλαντώσεις και τα χρονοανεξάρτητα ή στάσιμα φαινόμενα (Π.χ. το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός κυλινδρικού πυκνωτή, όπου $u(x, y, z)$ είναι η συνάρτηση δυναμικού, επίσης $u(x, y, z)$ μπορεί να είναι η συνάρτηση δυναμικού ενός σωματιδίου στο οποίο επιδρούν μόνο βαρυτικές δυνάμεις ή οι μετατοπίσεις των σωματιδίων μίας ελαστικής ράβδου η οποία παραμορφώνεται και δεν υπάρχει εξάρτηση από τον χρόνο).
Η μελέτη των ΜΔΕ διαφέρει από αυτή των ΣΔΕ. Εν γένει είναι πιο πολύπλοκη, ακόμα και στην περίπτωση απλών γραμμικών προβλημάτων. Όμως θα πρέπει να σημειώσουμε ότι σχεδόν όλες οι βασικές ιδέες και μέθοδοι της θεωρίας των ΣΔΕ έχουν συμβάλει στην ανάπτυξη της θεωρίας των ΜΔΕ. Οι έννοιες της τάξης, γραμμικότητας, βαθμού, και άλλα που ορίστηκαν στις ΣΔΕ δίνονται ανάλογα και για τις ΜΔΕ. Επίσης, με παρόμοιο τρόπο ορίζονται τα συστήματα των ΜΔΕ.

ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ορισμός 1 (*Κλασική λύση*) Μία συνάρτηση $y: I \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου I διάστημα το $\mathbb{R}$ ονομάζεται λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$F\left(x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, x \in I \subseteq \mathbb{R} \qquad (1)$$

αν η $y \in C^n(I)$ και επαληθεύει την εξίσωση για κάθε σημείο $x \in I$.

Μία n-παραμετρική συνάρτηση $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots n$ ονομάζεται ***γενική λύση*** της ΣΔΕ (1) αν την επαληθεύει για κάθε σημείο $x \in I$ και για κάθε $c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots n$.

Κάθε λύση της (1) που προκύπτει από τη γενική λύση για συγκεκριμένες τιμές των c_i , $i = 1,2, \ldots n$ ονομάζεται ***ειδική λύση*** αυτής

Παραδείγματα:

(i) Η συνάρτηση $y(x) = cosx$, $x \in \mathbb{R}$ είναι *ειδική λύση* της διαφορική εξίσωσης: $y^{''} + y = 0$. Αν αντικαταστήσουμε την στη $y(x)$ και $y''(x)$ στο αριστερό μέλος της ΔΕ θα πάρουμε 0.
Με το ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $y(x) = sinx$, $x \in \mathbb{R}$ είναι *ειδική λύση* της ΔΕ.
Επίσης, η συνάρτηση $y(x) = c_1 cosx + c_2 sinx$, $x \in \mathbb{R}$, $c_{1,} c_2 \in \mathbb{R}$ αποτελεί τη *γενική λύση* της ΔΕ διότι ικανοποιεί τη ΔΕ εξίσωση για τυχαία επιλογή των σταθερών $c_{1,} c_2$.

(ii) Η $y(x) = x^{-1}$, $x > 0$ είναι *ειδική λύση* της διαφορική εξίσωσης: $x^2 y^{''} + 4xy^{'} + 2y = 0$, $x > 0$.
Πράγματι $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ και αν αντικαταστήσουμε, θα έχουμε:
$x^2(2x^{-3}) + 4x(-x^{-2}) + 2x^{-1} = 0$.
Με το ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $y(x) = x^{-2}$, $x > 0$ είναι *ειδική λύση* της ΔΕ.
Η συνάρτηση $y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$, $x > 0$, $c_{1,}$ $c_2 \in \mathbb{R}$ αποτελεί τη *γενική λύση* της ΔΕ.

Ορισμός 2 (*Γενικό και Ειδικό Ολοκλήρωμα*). Σε πολλές περιπτώσεις η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή:

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,\ x \in I, \qquad c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots n$$

Τότε η λύση λέγεται ***γενική πεπλεγμένη λύση ή γενικό ολοκλήρωμα***. Κάθε λύση της ΔΕ που προκύπτει από το γενικό ολοκλήρωμα για συγκεκριμένες τιμές των σταθερών λέγεται ***ειδικό ολοκλήρωμα*** της ΔΕ.

Παραδείγματα:

(i) Η συνάρτηση $G(t, y) = y + e^y - sint = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι *ειδικό ολοκλήρωμα* της ΔΕ:

$$(1 + e^y)y^{'} = cost$$

Πράγματι παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $G(t, y)$ ως προς t, προκύπτει $y' + y'e^y - cost = 0$ που είναι η παραπάνω ΔΕ. Επίσης, η εξίσωση $y + e^y - sint = 0$ δεν μπορεί να λυθεί ως προς $y(t)$.
Το *γενικό ολοκλήρωμα* της ΔΕ είναι: $y + e^y - sint = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Η συνάρτηση $G(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι *ειδικό ολοκλήρωμα* της ΔΕ:

$$(y^2 - x)y^{'} = y - x^2$$

Πράγματι παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $G(x, y)$ ως προς x, προκύπτει

$$3x^2 + 3y^2 y^{'} - 3y - 3xy^{'} = 0 \Longrightarrow (y^2 - x)y^{'} = y - x^2$$

Το *γενικό ολοκλήρωμα* της ΔΕ είναι: $x^3 + y^3 - 3xy = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

Όταν μία ΔΕ δεν μπορεί να γραφεί σε λυμένη μορφή, τότε ως απόρροια της μη εφαρμογής του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων σε κάποια σημεία του πεδίου ορισμού της εξίσωσης, μπορεί να υπάρχουν λύσεις οι οποίες δεν προκύπτουν από την γενική λύση.

Ορισμός 3 (*Ιδιάζουσα λύση*) Μία λύση της ΔΕ η οποία δεν προκύπτει από τη γενική λύση για κάποια επιλογή των σταθερών ονομάζεται ιδιάζουσα λύση ή ιδιάζον ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $y(x) = cx + c^2, c \in \mathbb{R}$ αποτελεί τη γενική λύση της ΔΕ (Clairaut): $y = xy' + (y')^2$. Επίσης η συνάρτηση $y(x) = -\frac{x^2}{4}$ αποτελεί ιδιάζουσα λύση της ΔΕ αφού την επαληθεύει και δεν προκύπτει από τη γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς c.

Ορισμός 4 (Πλήρης λύση). Ονομάζουμε πλήρη λύση ή πλήρες ολοκλήρωμα της ΔΕ το σύνολο όλων των δυνατών λύσεων αυτής.

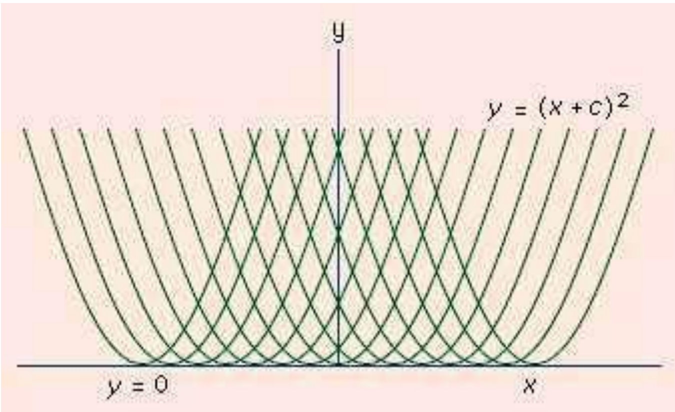
Παραδείγματα:

(i) Στο προηγούμενο παράδειγμα η πλήρης λύση της ΔΕ Clairaut είναι η γενική λύση: $y(x) = cx + c^2, c \in \mathbb{R}$ και η ιδιάζουσα λύση: $y(x) = -\frac{x^2}{4}$.

(ii) Η γενική λύση της ΔΕ $y'' - y = 0$ είναι $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, x \in \mathbb{R}$, η οποία ταυτίζεται με την πλήρη λύση της ΔΕ.

Ορισμός 5 (Ολοκληρωτική καμπύλη – Χώρος λύσεων). Η γραφική παράσταση μίας λύσης της ΔΕ (1) ονομάζεται ***ολοκληρωτική καμπύλη ή διαδρομή***. Το σύνολο των ολοκληρωτικών καμπυλών διαμορφώνει το ***χώρο των λύσεων***.

Παράδειγμα: Ο χώρος των λύσεων της ΔΕ: $(y')^2 = 4y$



ΑΡΧΙΚΕΣ - ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Τα προβλήματα διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από μαθηματική προτυποποίηση φυσικών ή άλλων φαινομένων συνοδεύονται από βοηθητικές ή περιοριστικές συνθήκες οι οποίες χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες.

Ορισμός 1 (Αρχικές Συνθήκες). Η ΔΕ

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, x \in I \subseteq \mathbb{R} \qquad (1)$$

θεωρούμε ότι ικανοποιεί μία αρχική συνθήκη στο σημείο $x_o \in I$, αν έχουν δοθεί αριθμοί $y_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, n$, τέτοιοι ώστε

$$y(x_o) = y_1, y'(x_o) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_o) = y_n, \qquad (2)$$

Η εξίσωση (1) μαζί με τις αρχικές συνθήκες (2) αποτελούν ένα ***πρόβλημα αρχικών συνθηκών ή τιμών (ΠΑΤ)***.

Παραδείγματα:

(i) Έστω το ΠΑΤ: $y' = x - y,\ x \in \mathbb{R},\ y(0) = -1$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = x - 1 + ce^{-x}, x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

Για να βρούμε την ειδική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη, θέτουμε στη γενική λύση όπου $x = 0, y = -1$ και προσδιορίζουμε την σταθερά c. Έτσι προκύπτει ότι $c = 0$ και η ειδική λύση που ικανοποιεί το ΠΑΤ είναι η ευθεία: $y(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

(ii) Έστω το ΠΑΤ: $y'' + 2y' + y = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y(0) = 1, y'(0) = 1$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
Για να εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες παραγωγίσουμε την γενική λύση:
$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}(1 - x)$. Οπότε

$$\left.\begin{array}{r} y(0) = c_1 = 1 \\ y'(0) = -c_1 + c_2 = 1 \end{array}\right\} => \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{array}$$

Επομένως η λύση στο ΠΑΤ είναι: $y(x) = e^{-x} + 2xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

<u>Ορισμός 2</u> (Συνοριακές Συνθήκες). Όταν οι τιμές της συνάρτησης $y(x)$ και των παραγώγων της καθορίζονται στα άκρα του πεδίου ορισμού I ή γενικότερα σε δύο ή περισσότερα σημεία του I, τότε αναφερόμαστε σε συνοριακές συνθήκες ή τιμές, που θα πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις της (1). ΔΕ συνοδευόμενες από συνθήκες της μορφής αυτής συνιστούν ένα ***πρόβλημα συνοριακών συνθηκών ή τιμών***.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y'' + y = 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \qquad y(0) = 2,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 cosx + c_2 sinx + 1,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει

$y(0) = c_1 + 1 = 2 => c_1 = 1$ και $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 + 1 = 3 => c_2 = 2$.

Άρα η ειδική λύση, που ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι η συνάρτηση

$$y(x) = cosx + 2sinx + 1, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

<u>Παρατήρηση</u>: Εν γένει οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες για μία ΔΕ n-τάξης αφορούν τη λύση και τις παραγώγους αυτής μέχρι τάξης $(n-1)$-τάξης. Ο καθορισμός των παραγώγων n-τάξης και πάνω δεσμεύεται από την ίδια την εξίσωση.
Π.χ. στο πρόβλημα αρχικών τιμών: $y'' + 2y' + y = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y(0) = 1, y'(0) = 1$
$y''(0) = -2y'(0) - y(0) = -2 - 1 = -3,\ y'''(0) = -2y''(0) - y'(0) = 6 - 1 = 5, \ldots$ κ.λ.π.

<u>Ορισμός 3</u> Ένα πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών συνθηκών ονομάζεται ***καλά τοποθετημένο πρόβλημα*** όταν **<u>έχει</u>** μοναδική λύση η οποία εξαρτάται συνεχώς από τις συνθήκες.
Τα παρακάτω θέματα:
α) προϋποθέσεις ύπαρξης λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης
β) προϋποθέσεις μοναδικότητας λύσης ενός προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών
γ) η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης και συνεχής εξάρτηση αυτής από τις αρχικές ή συνοριακές συνθήκες (θεωρία ευστάθειας)
αποτελούν τα τρία βασικά ερωτήματα της ***Ποιοτικής Θεωρίας των Διαφορικών εξισώσεων*** που μελετά τις Διαφορικές Εξισώσεις χωρία απαραίτητα τη χρήση των λύσεων αυτών.
Η έννοια της καλής τοποθέτησης δεν είναι καθαρά μαθηματικού ενδιαφέροντος, είναι καθοριστικής σημασίας και στο χώρο των εφαρμογών για δύο τουλάχιστον λόγους. Αν το πρόβλημα δεν έχει λύση, θα προτιμούσαμε να το γνωρίζουμε προτού επενδύσουμε χρόνο και κόπο σε μία μάταιη επίλυσή του. Επιπλέον, εάν ένα φυσικό πρόβλημα προτυποποιείται μαθηματικά ως διαφορική εξίσωση, τότε η εξίσωση πρέπει να έχει λύση. Αν δεν έχει, τότε ενδεχομένως υπάρχει λάθος στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Μα αυτή την έννοια, ο μηχανικός ή επιστήμονας ελέγχει την εγκυρότητα του μαθηματικού προβλήματος.