ΘΕΩΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Υπενθύμιση:

ΘΕΩΡΗΜΑ LAURENT

Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο" ανοικτό δίσκο

$$D(z_0, R) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < R\},$$

όπου $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$.

Τότε, $\exists!\ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R.} \quad (1)$$

Επιπλέον, $\forall \gamma \in \mathcal{C}_+$ με

$$z_0 \in \operatorname{int} \gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R),$$

ισχύει

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k \in \mathbb{Z}.} \quad (2)$$

Συμβολ.:

$\mathcal{C}_+ = \{$όλες οι κλειστές, θετικά προσανατολ., απλές, τμ. λείες καμπύλες$\}$.

<u>Σχόλιο 1:</u> Οι συντελεστές a_k, $k \in \mathbb{Z}$

στην (2), <u>δεν</u> εξαρτώνται

— από την επιλογή της καμπύλης γ με

$$z_0 \in \operatorname{int}\gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R).$$

— από την ακτίνα $R \in (0, \infty]$ ώστε

f ολόμορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Τα παραπάνω προκύπτουν από την Αρχή Παραμόρφωσης.

<u>Σχόλιο 2:</u> Το Θ. Laurent επεκτείνεται σε ανοικτούς δακτυλίους:

$$\Delta(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$0 \le r_1 < r_2 \le \infty$$

- Για $r_1 = 0$, $r_2 < \infty$, έχουμε

$$\Delta(z_0, r_1, r_2) = D(z_0, r_2) \setminus \{z_0\}$$

- Για $0 < r_1 < r_2 = \infty$,

ο $\Delta(z_0, r_1, r_2)$ είναι το <u>εξωτερικό</u> του ανοικτού δίσκου $D(z_0, r_1)$

Παραδείγματα:

(i) Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

στον τρυπημένο δίσκο

$$0 < |z-1| < 1,$$

γύρω από το σημείο $z_0 = 1$.

Λύση: $$f(z) = \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Θέτουμε $w = z-1$, οπότε για

$0 < |z-1| < 1$ έχουμε

$$0 < |w| < 1$$

και

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{w+1-2} = -\frac{1}{1-w}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k,$$

$$a_k = \begin{cases} -1, & k \geq 0 \\ 1, & k = -1 \\ 0, & k \leq -2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Να βρείτε τα αναπτύγματα Laurent της $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$, στους «δακτυλίους», $0<|z-1|<1$, $|z-1|>1$, γύρω από το $z_0=1$.

Λύση: • Για $0<|z-1|<1$, θέτουμε $w=z-1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow f(z)=\frac{1}{(w+1)^2 w}=-\frac{1}{w}\cdot\left(\frac{1}{1+w}\right)'=$$

$$\underset{[0<|w|<1]}{=}-\frac{1}{w}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-w)^n\right]'$$

$$=-\frac{1}{w}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,w^{n-1}$$

$$=-\frac{1}{w}\left(-1+2w-3w^2+4w^3-\dots\right)$$

$$=\frac{1}{w}-2+3w-4w^2+5w^3-\dots$$

$$=\frac{1}{w}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+2)w^k$$

$$=\frac{1}{z-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+2)(z-1)^k \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k, \qquad \text{όπου}$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+1}(k+2), & k \geq 0 \\ 1, & k = -1, \ k \in \mathbb{Z}. \\ 0, & k \leq -2 \end{cases}$$

• Για $|z-1| > 1$, θέτουμε

$$w = \frac{1}{z-1} \Rightarrow z = 1 + \frac{1}{w} = \frac{1+w}{w}$$

$$\Rightarrow f(z) = \left(\frac{w}{1+w}\right)^2 \cdot w = w^3 \cdot \frac{1}{(1+w)^2}$$

$$= -w^3 \cdot \left(\frac{1}{1+w}\right)' \qquad [|w|<1]$$

$$= -w^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n w^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

$$\overset{k=-(n+2)}{=} -\sum_{k=-\infty}^{-3} (-k-2)(-1)^{-k-2}(z-1)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-3} (k+2)(-1)^k (z-1)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k,$$

$$a_k = \begin{cases} (k+2)\cdot(-1)^k, & k \leq -3 \\ 0, & k \geq -2. \end{cases}$$

<u>(iii)</u> Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent γύρω από το $z_0 = 0$ της

$$f(z) = z^3 e^{1/z}$$

στον "δακτύλιο" $|z| > 0$ (δηλ. στο "τρυπημένο" μιγαδ. επίπεδο).

<u>Λύση</u>: $\forall\ z \neq 0$,

$$z^3 e^{1/z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-3}}$$

$$\overset{k=-n+3}{=} \sum_{k=-\infty}^{3} \frac{1}{(3-k)!} z^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \text{όπου}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{(3-k)!}, & k \leq 3 \\ 0, & k \geq 4. \end{cases}$$

Πιο αναλυτικά, για $z \neq 0$,

$$f(z) = z^3 + \frac{1}{1!} z^2 + \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} +$$

$$+ \frac{1}{4!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^2} + \cdots$$

<u>Ορισμός 1</u>: Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο" ανοικτό δίσκο $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$) με ανάπτυγμα Laurent

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R} \tag{3}$$

Ο συντελεστής a_{-1} του $\frac{1}{z-z_0}$ ονομάζεται <u>ολοκληρωτικό υπόλοιπο</u> <u>της f</u> <u>στο z_0</u>.

<u>Συμβολ</u>: $a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0)$.

<u>Σχόλιο 1:</u> Το ολοκλ. υπόλοιπο στο z_0 ορίζεται καλώς, διότι το ανάπτυγμα Laurent (3) <u>δεν</u> εξαρτάται από την ακτίνα $0 < R \leq \infty$, ώστε f ολόμορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

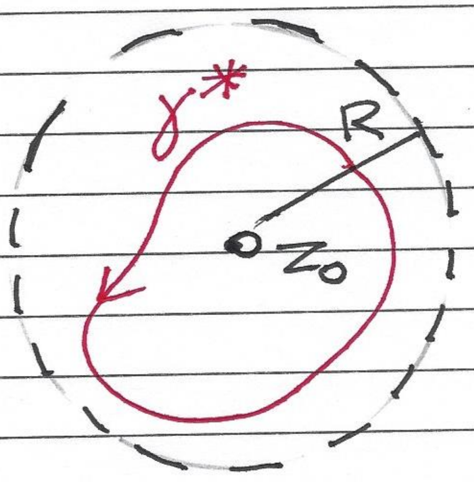
<u>Σχόλιο 2:</u> Από το Θ. Laurent γνωρίζουμε ότι οι συντελεστές a_k, $k \in \mathbb{Z}$ στο ανάπτυγμα (3) δίνονται από τις σχέσεις

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} \, dw, \quad k \in \mathbb{Z},$$

όπου $\gamma \in \mathcal{C}_+$ <u>τυχαία</u> με

$$z_0 \in \operatorname{int} \gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R).$$

Για $k = -1$, παίρνουμε



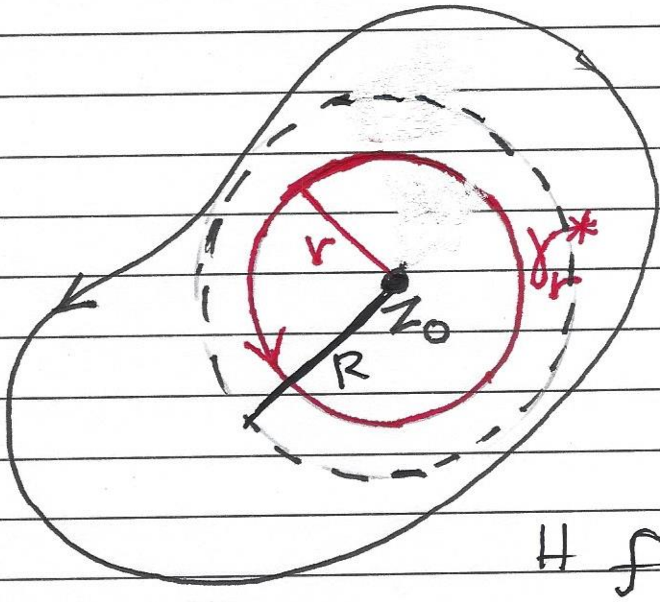
$$\int_\gamma f(w)\,dw = 2\pi i \, a_{-1}$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Γενικότερα, έχουμε την παρακάτω:

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$ με απλώς συνεκτικό εσωτερικό $U = \operatorname{int}\gamma^*$, $z_0 \in U$ και f ολόμορφη στο $U \setminus \{z_0\}$, ώστε f συνεχής στο γ^*. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $R > 0 \mid D(z_0, R) \subset U$.



Επιλέγουμε $r \in (0, R)$ και θέτουμε

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Η f είναι ολόμορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\} \xRightarrow{[\text{Θ. Laurent}]}$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

και

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\,dw,$$

$k \in \mathbb{Z}$.

Ειδικότερα,

$$\int_{\gamma_r} f(w)dw = 2\pi i\, a_{-1} =$$
$$= 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_0).$$

Επειδή f ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, γ_r^*, από την Αρχή Παραμόρφωσης παίρνουμε

$$\int_\gamma f(w)dw = \int_{\gamma_r} f(w)dw = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_0).$$

$\boxtimes$

Παραδείγματα:

(i) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^5}.$$

Λύση: f ολόμορφη στο $\mathrm{int}\,\gamma^* \setminus \{0\}$ και συνεχής στο γ^* $\xrightarrow{[\text{Πρότ. } 2]}$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, 0).$$

Αλλά, $\forall z \neq 0$,

$$\frac{1}{z^5} e^{z^2} = \frac{1}{z^5}\left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{1!}\frac{1}{z^3} + \boxed{\frac{1}{2!}\frac{1}{z}} + \frac{1}{3!}z + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_\gamma f = \pi i.$$

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$

<u>(ii)</u> $\int_\gamma f(z)\,dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = z^4 \sin(1/z).$$

<u>Λύση:</u> $\forall z \neq 0$,

$$f(z) = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \cdots\right)$$

$$= z^3 - \frac{1}{3!}z + \boxed{\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z}} - \cdots$$

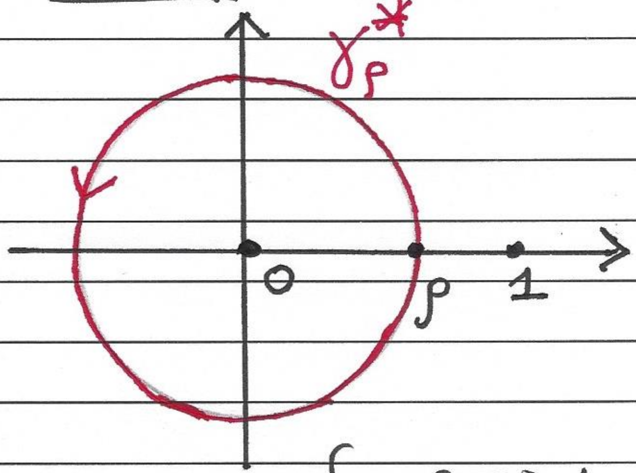
$$\Longrightarrow \mathrm{Res}(f,0) = 1/5!$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i/5! = \pi i/60.$$

<u>(iii)</u> $\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = ?$, όπου

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}, \quad \gamma_\rho(t) = \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad 0 < \rho < 1.$$

<u>Λύση:</u>



f ολόμορφη στο $\operatorname{int}\gamma_\rho^* \setminus \{0\}$ και συνεχής στο γ_ρ^* $\xrightarrow{\text{Πρότ. 2}}$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Για $0 < |z| < \rho$ (< 1),

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \cdots$$

Ο συντελεστής του $1/z$ στο γινόμενο των παραπάνω δυναμοσειρών είναι

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e - 1$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = e - 1 \Rightarrow \int_{\gamma_\rho} f = 2\pi i(e-1).$$

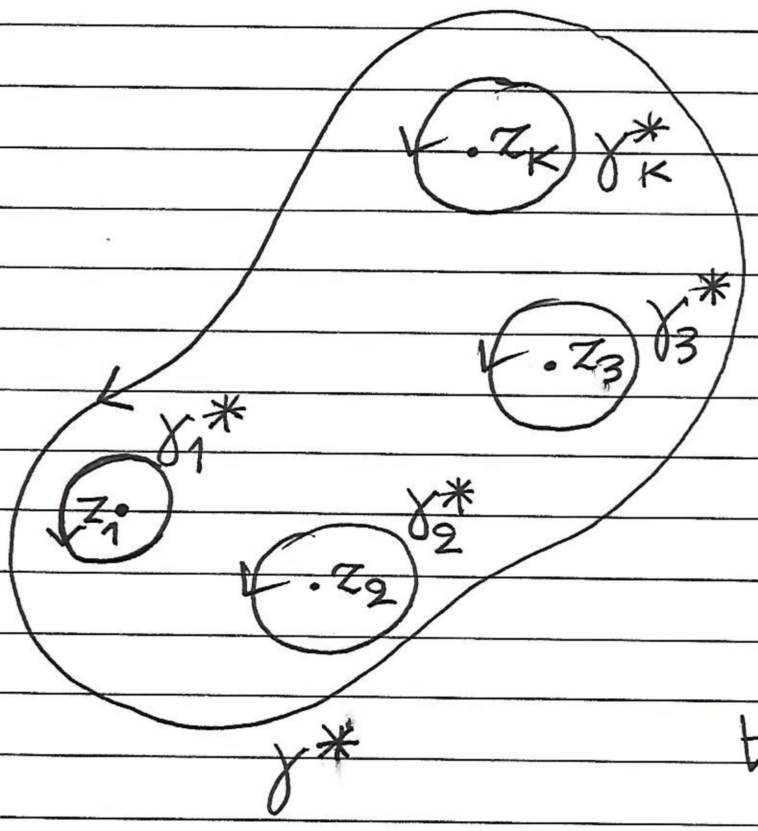
Γενίκευση της Πρότασης 2 είναι το παρακάτω

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων).

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$, $z_1, z_2, \ldots, z_k \in U = \operatorname{int}\gamma^*$ και f ολόμορφη στο $U \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ και συνεχής στο γ^*. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Απόδειξη: Επιλέγουμε $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathcal{C}_+$ ώστε



- $z_j \in \operatorname{int}\gamma_j^*$, $1 \le j \le k$
- $\gamma_j^* \subset U$, $1 \le j \le k$
- $\operatorname{int}\gamma_\lambda^* \cap \operatorname{int}\gamma_j^* = \emptyset$, $\forall\ \lambda \neq j$.

Γενικ. Αρχή Παραμ. $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \quad \underline{(\text{Πρότ. } 2)}$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j). \quad \boxtimes$$

Ταξινόμηση μεμονωμένων ανώμαλων σημείων

Ορισμός 4: Ένα $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται <u>μεμονωμένο ανώμαλο σημείο</u> μιας συνάρτησης f ανν $\exists\, R > 0$ ώστε f ολόμορφη στον

$$D(z_0, R) \setminus \{z_0\},$$

δηλ. ανν $\exists$ ανοικτός δίσκος κέντρου z_0 που <u>δεν</u> περιέχει άλλα ανώμαλα σημεία της f εκτός του z_0.

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(α)</u> $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Τα ανώμαλα σημεία της f είναι $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, τα οποία είναι όλα μεμονωμένα. Πράγματι· έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $R = \pi/2$. Εάν $\lambda \in \mathbb{Z}$ με

$\lambda\pi \in D(k\pi, R)$, τότε $|\lambda\pi - k\pi| < \pi/2$

$$\Longrightarrow |\lambda - k| < 1/2 \Longrightarrow \lambda = k.$$

(β) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$.

Το 0 είναι μη μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f. Πράγματι·

$\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$, το $z_n = 1/n\pi$ είναι ανώμαλο σημείο της f, επί

$$z_n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Άρα, $\forall R > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$,

$$z_n \in D(0, R) \setminus \{0\}.$$

Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f. Τότε, $\exists R > 0 \mid$

f ολόμορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$

[Θ. Laurent] $\Longrightarrow$ $\exists !\, (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R.} \tag{4}$$

Ορισμός 5: Το z_0 λέγεται αιρόμενο αν

$$a_k = 0, \quad \forall k < 0.$$

Σχόλιο!! Εάν z_0 αιρόμενο, τότε

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0.$$

Έστω z_0 αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f. Τότε, για $\underline{0 < |z - z_0| < R}$,

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα <u>προσομοιάζει</u> με ανάπτυγμα Taylor αλλά <u>δεν αποτελεί</u> ανάπτυγμα Taylor γιατί

f <u>όχι</u> διαφορίσιμη στο z_0.

Παρ' όλ' αυτά, επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση $\tilde{f} : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$. Πράγματι θέτουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\} \\ a_0, & z = z_0. \end{cases}$$

Τότε, $\forall z \in D(z_0, R)$,

$$\tilde{f}(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$\Longrightarrow$ $\tilde{f}$ ολόμορφη στον $D(z_0, R)$

Με βάση τα παραπάνω αποδεικνύεται εύκολα η παρακάτω

<u>Πρόταση 5</u>: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

<u>(α)</u> z_0 αιρόμενο ανώμαλο σημείο

<u>(β)</u> Στο ανάπτυγμα Laurent (4), ισχύει $a_k = 0, \ \forall \ k < 0$.

<u>(γ)</u> $\exists \ \tilde{f}$ ολόμορφη στο $D(z_0, R)$ |

$$\tilde{f}(z) = f(z), \ \forall z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$$

<u>(δ)</u> $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(α)</u> $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$. Προφανώς 0 ανώμαλο σημείο της f.

Είναι $\lim_{z \to 0} f(z) = (e^z)'\big|_{z=0} = 1 \in \mathbb{C}$

[Προτ. 5] $\Longrightarrow$ 0 αιρόμενο. Παρατηρούμε ότι $\forall z \neq 0$, το ανάπτυγμα Laurent της f στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots, \ \forall z \neq 0$$

δηλ. δεν εμφανίζονται δυνάμεις z^k με $k < 0$.

(β) $f(z) = \dfrac{\sin z - z}{z(1-\cos z)}$. Προφανώς, 0 ανώμαλο σημείο της f.

• Το 0 είναι μεμονωμένο. Πράγματι· τα ανώμαλα σημεία της f είναι

$$2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

και $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$2k\pi \notin D(0,\pi)$$

δηλ. ο $D(0,\pi)$ περιέχει μόνο το 0 σαν ανώμαλο σημείο.

• Το 0 είναι αιρόμενο. Πράγματι·

$\forall z \in D(0,\pi) \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{-z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots}{z\left(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \cdots\right)}$$

$$= \frac{z^3\left(-1/3! + z^2/5! - z^4/7! + \cdots\right)}{z^3\left(1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \cdots\right)}$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{3!} + \dfrac{z^2}{5!} - \dfrac{z^4}{7!} + \cdots}{\dfrac{1}{2!} - \dfrac{z^2}{4!} + \dfrac{z^4}{6!} - \cdots}$$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{C}.$$

Πόλοι

Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f και

$$\boxed{f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0<|z-z_0|<R} \quad (4)$$

το ανάπτυγμα Laurent της f στον "τρυπημένο" ανοικτό δίσκο

$$D(z_0,R)\setminus\{z_0\}, \quad R>0.$$

<u>Ορισμός 6:</u> Το z_0 λέγεται <u>πόλος</u> αν το σύνολο

$$S=\{k\in\mathbb{Z}: \ a_k\neq 0, \ k<0\}$$

είναι <u>πεπερασμένο</u>, <u>μη κενό</u>.

<u>Π.χ.</u> $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$. Τότε, $\forall z\neq 0$,

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(z+z^2/2!+z^3/3!+z^4/4!+\cdots\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}}_{\text{πεπερ. πλήθους}}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\cdots$$

$\Longrightarrow$ <u>$0=$ πόλος.</u>

Έστω z_0 πόλος της f. Θέτουμε

$$m=\max\{|k|: \ k\in S\}.$$

Προφανώς,

$$\underline{a_{-m}\neq 0}, \qquad \underline{m\geq 1}$$

Ορισμός 7: Το m ονομάζεται τάξη του πόλου z_0.

Π.χ. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$. 0 = πόλος τάξης 2.

Πρόταση 8: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) z_0 πόλος τάξης m

(β) $\exists\ \tilde{\varphi}$ ολόμορφη σε περιοχή U του z_0 με

$$\tilde{\varphi}(z_0) \neq 0, \quad f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-z_0)^m}, \ \forall z \in U \setminus \{z_0\}$$

(γ) $\lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^m f(z)] \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β)

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent (4) της f.
Επειδή

$$m = \max\{|k| : k \in \mathbb{Z},\ k < 0,\ a_k \neq 0\}$$

έχουμε

$$a_{-m} \neq 0$$

και

$\forall\ k < -m$, είναι $|k| = -k > m \Rightarrow a_k = 0$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{a_{-m+2}}{(z-z_0)^{m-2}} + $$

$$+ \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

$$0 < |z-z_0| < R$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z), \quad 0<|z-z_0|<R,$$

όπου

$$\varphi(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \cdots,$$

για $0<|z-z_0|<R$.

Θέτουμε

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi(z), & 0<|z-z_0|<R \\ a_{-m}, & z=z_0. \end{cases}$$

Τότε,

$$\tilde{\varphi}(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \cdots$$

$\forall z \in D(z_0, R)$

$\Longrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ ολόμορφη στο $D(z_0, R)$.

Επιπλέον,

$$\tilde{\varphi}(z_0) = a_{-m} \neq 0$$

και

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-z_0)^m}, \quad 0<|z-z_0|<R$$

Θέτουμε $U = D(z_0, R)$.

(β) $\Longrightarrow$ (γ) Άμεσο.

(γ) ⇒ (α) Έστω το ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0<|z-z_0|<R.$$

Τότε,

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{m+k} \underset{=}{[\lambda = m+k]}$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda-m} (z-z_0)^{\lambda}, \text{ για } 0<|z-z_0|<R$$

Το παραπάνω είναι το ανάπτυγμα Laurent της $(z-z_0)^m f(z)$ στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Όμως, $\lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^m f(z)] \in \mathbb{C} \xRightarrow{[\text{Πρότ. } 5]}$

$\Rightarrow$ z_0 αιρόμενο ανώμαλο σημείο της $(z-z_0)^m f(z)$ $\Rightarrow a_{\lambda-m} = 0, \ \forall \lambda < 0$

$\Rightarrow$ $a_k = 0, \ \forall k < -m$

$\Rightarrow$ z_0 πόλος της f.

Επιπλέον, για $0<|z-z_0|<R$,

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots$$

$$\Longrightarrow (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}\cdot(z-z_0) + \cdots$$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = a_{-m}$$

[υπόθεση] $\Longrightarrow$ $a_{-m}\neq 0 \Rightarrow z_0$ πόλος τάξης m. $\boxtimes$

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(α)</u> $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$. Έχουμε

$$\lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z-\sin 0}{z-0} =$$

$$=(\sin z)'\big|_{z=0} = \cos 0 = 1 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ 0 πόλος τάξης 2.

<u>(β)</u> $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$. Έχουμε

$$\lim_{z\to 0}\left[z f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1^2 = 1 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ 0 πόλος τάξης 1.

(γ) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(1-\cos z)^2}$. Έχουμε

$\forall z \in D(0,\pi) \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots}{\left(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \cdots\right)^2}$$

$$= \frac{z\left(1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \cdots\right)}{z^4\left(1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \cdots\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0}\left[z^3 f(z)\right] = \frac{1}{(1/2!)^2} = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ 0 πόλος τάξης 3.

<u>Ουσιώδη ανώμαλα σημεία</u>

<u>Ορισμός 8:</u> Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f και

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

το ανάπτυγμα Laurent της f στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Το z_0 λέγεται <u>ουσιώδες</u> αν το

$$S = \{k \in \mathbb{Z} : k < 0,\ a_k \neq 0\}$$

είναι <u>άπειρο</u>.

<u>Παράδειγμα:</u> $f(z) = z^4 \cos(1/z)$.

Για $z \neq 0$,

$$f(z) = z^4\left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \dots\right)$$

$$= z^4 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{8!}\frac{1}{z^4} - \dots$$

$\Rightarrow$ εμφανίζονται άπειρες δυνάμεις του $1/z$

$\Rightarrow$ 0 ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

<u>Συνοψίζοντας</u>, ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο είναι

— είτε <u>αιρόμενο</u>

— " <u>πόλος</u>

— " <u>ουσιώδες</u>

Υπολογισμός Ολοκλ. Υπολοίπων σε πόλους.

Πρόταση 9: Έστω z_0 πόλος τάξης $m \geq 1$ της συνάρτησης f.

Τότε,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right].$$

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

Πρόταση 10: Έστω φ, ψ ολόμορφες σε περιοχή του z_0 με

$$\varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0.$$

Τότε, $\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi}{\psi}, z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$

Απόδειξη: Έστω $r > 0$ ώστε φ, ψ ολόμορφες στο $D(z_0, r)$.

Είναι

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \psi'(z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta \in (0, r) \mid \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} \neq 0, \ \forall z \in D(z_0, \delta)$$

με $z \neq z_0$

Για $z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$,

$$(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} \xrightarrow{(z \to z_0)} \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \neq 0$$

Από την Πρότ. 8, έπεται ότι z_0 πόλος τάξης 1 της φ/ψ $\xRightarrow{[\text{Πρότ. } 9]}$

$$Res(\varphi/\psi, z_0) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right]$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad \boxtimes$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ με $z_0^6 = -1$.

Τότε, $Res\left(\frac{e^z}{z^6+1}, z_0\right) \overset{[\text{Πρότ. } 10]}{=}$

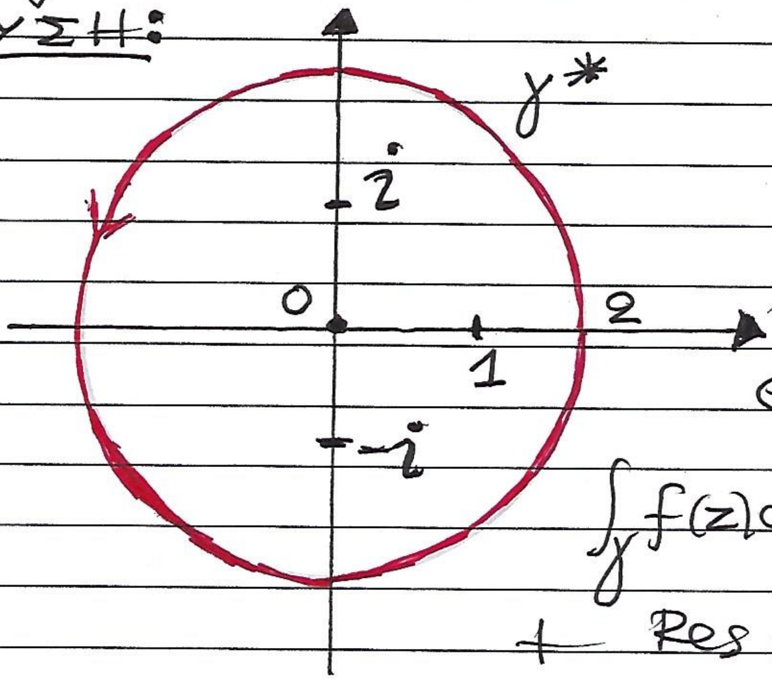
$$= \frac{e^{z_0}}{6z_0^5} = \frac{z_0 e^{z_0}}{6z_0^6} = -\frac{z_0 e^{z_0}}{6}.$$

Εφαρμογές σε υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων

1 $\int_\gamma f(z)\,dz = ?$, $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^2}$,

$\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:



Ανώμαλα σημεία της f:

$\pm i,\ 1 \in \operatorname{int}\gamma^*$.

Θ. ολοκ. Υπολ. $\Rightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i) + \operatorname{Res}(f,1)\right].$$

• $\operatorname{Res}(f,1)$

$$\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = e/2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$\Longrightarrow$ 1 = πόλος τάξης $m=2$ $\xrightarrow{[\text{Πρότ.-9}]}$

$$\Longrightarrow \operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2 f(z)\right]'$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{z^2+1}\right)' =$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{e^z(z^2+1) - 2ze^z}{(z^2+1)^2}$$

$$= \left.\frac{(z-1)^2 e^z}{(z^2+1)^2}\right|_{z=1} = 0.$$

• Res$(f, \pm i)$. $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}, \quad \psi(z) = z^2+1.$$

$\varphi(\pm i) \neq 0$, $\psi(\pm i) = 0$, $\psi'(\pm i) \neq 0$

[Πρότ. 10]

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, \pm i) = \frac{\varphi(\pm i)}{\psi'(\pm i)}$$

οπότε

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{e^i}{2i(i-1)^2} = e^i/4,$$

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \frac{e^{-i}}{-2i(-i-1)^2} = \cancel{e^{i}/4} \; e^{-i}/4$$

Άρα,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(0 + \frac{e^i + e^{-i}}{4}\right) = \pi i \, \frac{e^i + e^{-i}}{2}$$

$$= \underline{\underline{\pi i \cos(1)}}.$$

(2) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4+1}.$$

ΛΥΣΗ: Τα ανώμαλα σημεία της f είναι οι 4ης τάξης ρίζες του -1.

Επειδή $\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = e^{i\pi} = -1$,

ο $a = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ είναι μια τέτοια ρίζα.

Όμως, το πολυώνυμο z^4+1 έχει πραγματικούς συντελεστές και είναι άρτια συνάρτηση, οπότε οι ρίζες του είναι

$$\pm a, \quad \pm \bar{a}.$$

$\forall z_0 \in \{\pm a, \pm \bar{a}\}$, έχουμε $|z_0| = 1 < 2$

απλ. $z_0 \in \text{int}\,\gamma^*$ και

$$\text{Res}(f, z_0) \overset{[\text{Πρότ-1ο}]}{=} \frac{e^{z_0}}{4z_0^3} = \frac{z_0 e^{z_0}}{4z_0^4}$$

$$= -\frac{z_0 e^{z_0}}{4}.$$

~~Θ.~~ Ολοκλ. Υπολ. $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \Big[\text{Res}(f, a) + \text{Res}(f, -a) +$$

$$+ \text{Res}(f, \bar{a}) + \text{Res}(f, -\bar{a})\Big] =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right)\left(a e^{a} - a e^{-a} + \bar{a} e^{\bar{a}} - \bar{a} e^{-\bar{a}}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{2}\left[\left(ae^{a} + \overline{ae^{a}}\right) - \left(ae^{-a} + \overline{ae^{-a}}\right)\right]$$

$$= -\pi i\left[\mathrm{Re}\left(ae^{a}\right) - \mathrm{Re}\left(ae^{-a}\right)\right],$$

όπου $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(3) $\int_\gamma f(z)\,dz = ?$, $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$,
$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:

Ανώμαλα σημεία: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Μόνο το $0 \in \operatorname{int}\gamma^*$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, 0).$$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z^2 \sin z = z^3 \psi(z)$, όπου

$$\psi(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots,$$

$\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$, $\frac{\psi''(0)}{2!} = -\frac{1}{3!}$

$$\Longrightarrow \psi''(0) = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3}$$

Επειδή $\psi(0) \neq 0$ και ψ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$,

$\exists$ περιοχή U του 0 ώστε
η $\varphi = \frac{1}{\psi}$ ολόμορφη στο U.

Επιπλέον,
$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^3}, \ z \in U \setminus \{0\}, \ \varphi(0) \neq 0.$$

[Πρόταση 8] $\Longrightarrow$ 0 πόλος τάξης $m=3$

[Πρότ. 9]
$$\Longrightarrow \ Res(f,0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to 0} \left[z^3 f(z) \right]''$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \varphi''(z) = \frac{\varphi''(0)}{2}.$$

Αλλά $\varphi' = -\frac{\psi'}{\psi^2}$, $\varphi'' = -\frac{\psi''\psi^2 - \psi' 2\psi\psi'}{\psi^4}$

$$= \frac{2(\psi')^2 - \psi''\psi}{\psi^3}$$

$$\Longrightarrow \varphi''(0) \overset{[\psi'(0)=0]}{=} -\frac{\psi''(0)}{\psi(0)^2} = \frac{1/3}{1^2}$$

=1/3

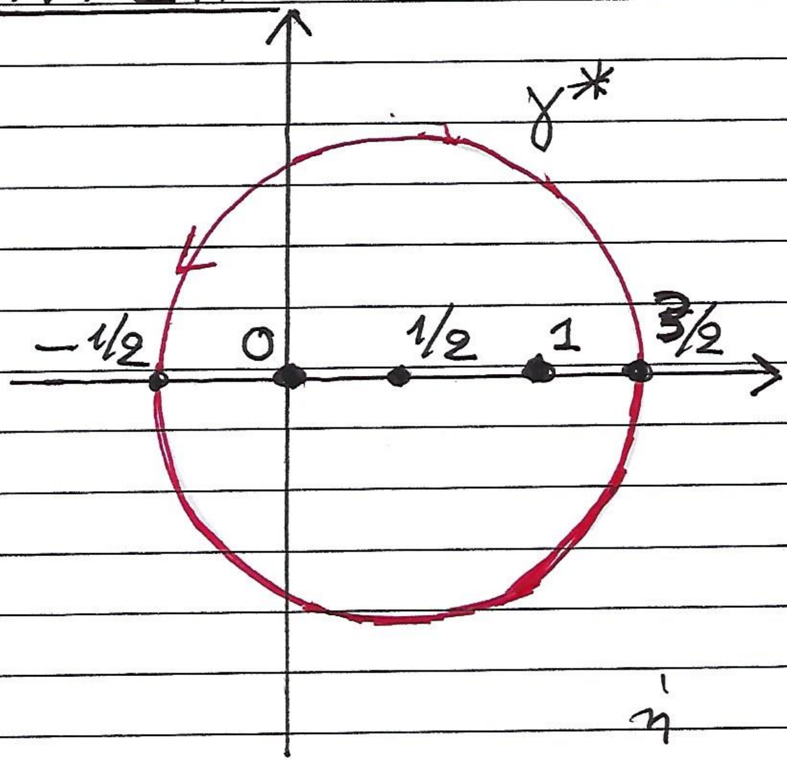
$$\Longrightarrow Res(f,0) = \frac{1}{6}$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i/6 = \underline{\underline{\pi i/3}}.$$

(4) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $f(z) = \dfrac{z-1}{\sin(\pi z)}$,

$\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:



Ανώμαλα σημεία: $\lambda \in \mathbb{Z}$

$\gamma: |z - \frac{1}{2}| = 1$

Εάν $\lambda \in \mathbb{Z}$ με $|\lambda - \frac{1}{2}| < 1$, έχουμε

$-1/2 < \lambda < 3/2$

ή $\lambda = 0$ ή 1.

Επομένως, μόνο τα $0, 1 \in \operatorname{int}\gamma^* \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)]$.

- $\operatorname{Res}(f, 0) = \dfrac{z-1}{[\sin(\pi z)]'}\Big|_{z=0} =$

$$= \frac{z-1}{\pi \cos(\pi z)}\Big|_{z=0} = -1/\pi$$

- $\underline{Res(f,1) = ?}$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{\sin(\pi z) - \sin(\pi \cdot 1)} =$$

$$= \frac{1}{[\sin(\pi z)]'\big|_{z=1}} = \frac{1}{\pi \cos \pi}$$

$$= \frac{-1}{\pi} \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow$ $\underline{1 = \text{αιρόμενο}}$ $\Longrightarrow$ $Res(f,1) = 0.$

Άρα, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(-1/\pi + 0\right) = \underline{\underline{-2i.}}$

(5) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = ?$, $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(1-\cos z)}$,
$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ: Ανώμαλα σημεία: $2\lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{Z}$,
δηλ. $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

Μόνο $0 \in \operatorname{int}\gamma^* \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \; Res(f,0).$$

$$\forall z \in D(0,\pi)\setminus\{0\},$$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(1-\cos z)} = \frac{z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots}{z\left(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \cdots\right)}$$

$$= \frac{z A(z)}{z^3 B(z)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{A(z)}{B(z)},$$

όπου

$$A(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots,$$

$$B(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots,$$

$$A(0) = 1, \quad A'(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad B(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2},$$

$$B'(0) = 0.$$

Επειδή $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ και $B(0) \neq 0$, η $\varphi = A/B$ είναι ολόμορφη σε περιοχή U του 0.

Επιπλέον,

$$\varphi(0) \neq 0, \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad \forall z \in U\setminus\{0\}$$

[Πρότ. 8] $\Longrightarrow$ $0 =$ διπλός πόλος της f

[Πρότ. 9] $\Longrightarrow$ $Res(f,0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right]' =$

$$= \lim_{z\to 0} \varphi'(z) = \varphi'(0) = \frac{A'(0)B(0) - A(0)B'(0)}{[B(0)]^2}$$

$$\underset{[B'(0)=0]}{=} \frac{A'(0)}{B(0)} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

Επομένως,

$$\mathrm{Res}(f,0) = 1 \Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i.$$

(6) $\int_\gamma f(z)\,dz = ?$, $f(z) = \dfrac{z e^{z^2}}{z^6} + z^7\cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$,

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:

$\forall z \in \gamma^*$,

$$\frac{z e^{z^2}}{z^6} = \frac{1}{z^7}\left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2!z^3} + \boxed{\frac{1}{3!}\,\frac{1}{z}} + \dots}_{f_1(z)}$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{z e^{z^2}}{z^6}\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f_1, 0)$$

$$= 2\pi i/3! = \pi i/3.$$

Επιπλέον, $\forall z \neq 0$,

$$z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^7\left(1 - \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{z^8} - \frac{1}{6!}\,\frac{1}{z^{12}} + \dots\right.$$

$$= z^7 - \frac{z^3}{2!} + \boxed{\frac{1}{4!}\frac{1}{z}} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^5} + \dots$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right), 0\right)$$

$$= 2\pi i/4! = \pi i/12.$$

Άρα, $\int_\gamma f(z)dz = \pi i/3 + \pi i/12 = \frac{5\pi i}{12}.$

---

(7) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

ΛΥΣΗ: Είναι $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, 0)$

$\forall\, z \neq 0$, $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{1/z}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,z^n}$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{z}\right)^{m-n}.$$

Ο συντελεστής του $1/z$ στο παραπάνω ανάπτυγμα προκύπτει για $m-n=1$ $\Leftrightarrow m = n+1$

Άρα,

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{(n+1)!}.$$