1. ΤΟ ΣΩΜΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στο σώμα $\mathbb{R}$, η εξίσωση $\underline{x^2 = -1}$ <u>δεν</u> έχει λύση.

Θέλουμε να επεκτείνουμε το $\mathbb{R}$ σε ένα σώμα $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, μέσα στο οποίο η παραπάνω εξίσωση να έχει λύση.

Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Ορίζουμε

→ **Πρόσθεση:** $(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta)$.

→ **Πολλ/σμός:** $(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma)$.

Μονάδα (ουδέτερο στοιχείο του $(\cdot)$) είναι το $(1, 0) \equiv 1$

Πράγματι: $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha, \beta) \cdot (1, 0) = (\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 0,\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1)$$
$$= (\alpha, \beta).$$

Θέτουμε $i = (0, 1)$. Τότε,

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$
$$= (-1, 0) = -(1, 0)$$
$$= -1 \,!$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, δεχόμαστε την ταύτιση

$$(\alpha, 0) \equiv \alpha.$$

Τότε, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + \beta(0, 1) \equiv \alpha + \beta i$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \equiv \underbrace{\{\alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}}_{\mathbb{C}}$$

Το $\mathbb{C}$ λέγεται σύνολο **μιγαδικών αριθμών.**

→ $\underline{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$ διότι $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$a \equiv (a, 0) \equiv a + 0 \cdot i$$

→ $$\underline{a + \beta i = \gamma + \delta i \iff [a = \gamma, \ \beta = \delta]}.$$

Το $\mathbb{C} = \{ \alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$

είναι <u>σώμα</u> με τις πράξεις:

→ <u>Πρόσθεση</u>: $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) =$

$= (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i$

→ <u>πολλ/σμός</u>: $(\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) =$

$= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma) i$

→ Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης:

$0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

→ Ουδέτερο στοιχείο του πολλ/σμού:

$1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$

→ Αντίθετος μιγαδικού:

$-(\alpha + \beta i) = (-\alpha) + (-\beta)i \in \mathbb{C}$

Αντίστροφος μιγαδικού:

Έστω $\alpha+\beta i \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, δηλ. $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Τότε,

$$\frac{1}{\alpha+\beta i}=\frac{\alpha-\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}=\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2-(\beta i)^2}$$

$$=\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\left(-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)i\in\mathbb{C}.$$

Συμβολισμός: Ένας μιγαδικός αριθμός συμβολίζεται συνήθως με $z, w, a, \ldots$

Ορισμός 1.1. Έστω $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$.

→ α = πραγματικό μέρος του z $= Re(z)$.

→ β = φανταστικό " " " $= Im(z)$.

→ Ο z λέγεται <u>φανταστικός</u> αννν $Re(z)=0$,

δηλ. αν είναι της μορφής βi, $\beta \in \mathbb{R}$.

<u>Συμβολισμός: $I=\{\beta i \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.</u>

ΣΧΟΛΙΑ:

(i) Οι πράξεις (+), (·) στο $\mathbb{C}$ έχουν όλες τις ιδιότητες των αντίστοιχων πράξεων στο $\mathbb{R}$ (π.χ. ταυτότητες) εκτός από μία:

Εάν $z, w \in \mathbb{C}$ με $z^2 + w^2 = 0$, δεν έπεται ότι $z = w = 0$.

Π.χ. $i^2 + 1^2 = 0$, $i \neq 0$, $1 \neq 0$.

(ii) Στο $\mathbb{C}$ δεν μπορεί να ορισθεί διάταξη με τις ίδιες ιδιότητες της κλασικής διάταξης στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι· έστω ($<$) μια τέτοια διάταξη.

Επειδή $i \neq 0$, θα πρέπει $i > 0$ ή $i < 0$.

→ Εάν $i > 0$, τότε $i \cdot i > 0 \Rightarrow -1 > 0$ (*)

$\Rightarrow (-1)\cdot(-1) > 0 \Rightarrow 1 > 0$ (**)

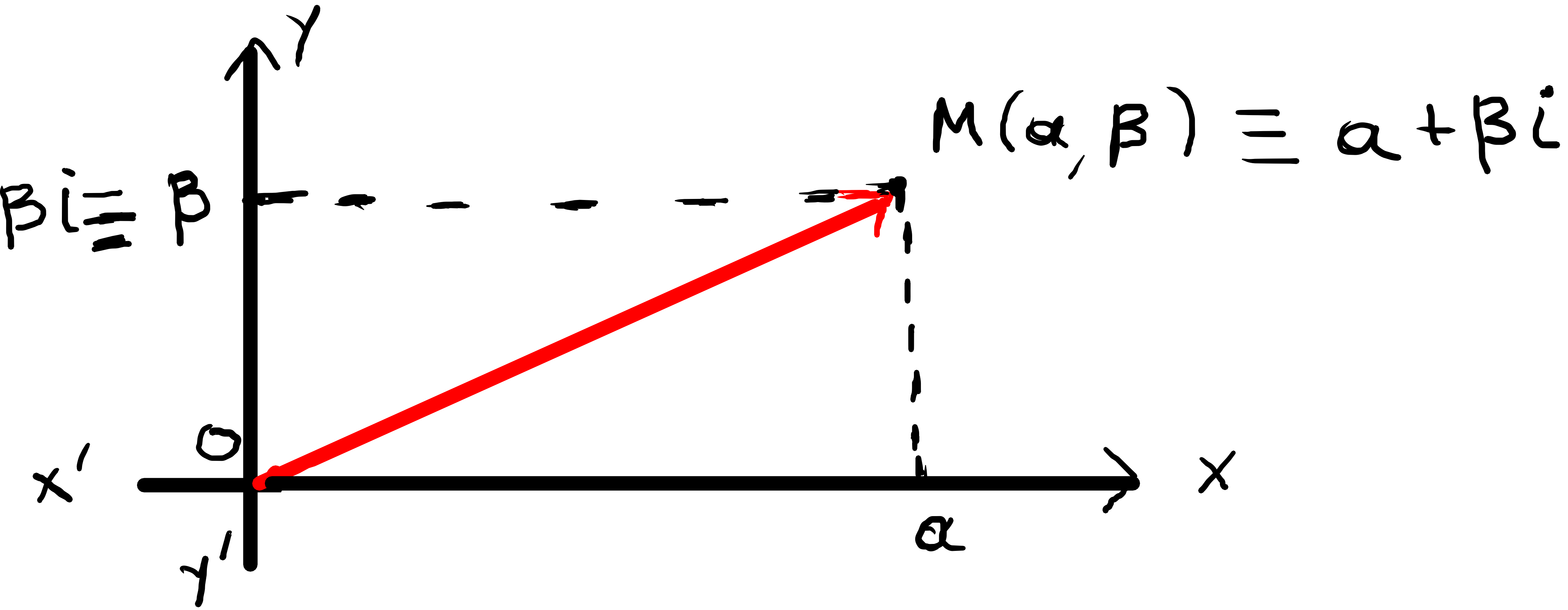
Με πρόσθεση των (*), (**) παίρνω $0 > 0$ (Άτοπο!)

$\rightarrow$ Εάν $i < 0$, τότε $i \cdot i > 0 \Rightarrow -1 > 0$

κ.λ.π. καταλήγω όπως πριν στο

$0 > 0$ (Άτοπο!)

Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικού



- $x'x$ → άξονας των πραγματικών
- $y'y$ → " " φανταστικών