ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης:

   (i) $\displaystyle\int_\gamma (3z^2 - 2z)dz, \quad \gamma(t) = t + it^2, \;\; t \in [0,1].$

   (ii) $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Im}(z - i)dz, \quad \Gamma = \gamma + [i, -1], \;\; \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, \pi/2].$

   (iii) $\displaystyle\int_\gamma \cos z dz, \quad \gamma = \left[-\frac{\pi}{2} + i, \; \pi + i\right].$

   (iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{Log} z}{z} dz, \quad \gamma = [1, \; i].$

   (vi) $\displaystyle\int_\gamma |z+1|^2 dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, 2\pi].$

   (vii) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z^2 e^z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, \pi].$

2. Να δείξετε ότι:

   (i) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz\right| \;\leq\; \pi, \quad$ όπου $\gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, \pi].$

   (iii) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^2 + \overline{z} + 1}\right| \;\leq\; \frac{3\pi}{10}, \quad$ όπου $\gamma(t) = 3e^{it}, \;\; t \in [0, \; \pi/2].$

3. Να δείξετε ότι:

   (i) $|\sin(z^2)| \;\leq\; e, \quad$ για $\;|z| = 1.$

   (ii) $\displaystyle\left|\int_\gamma e^{2\overline{z}} \sin(z^2)\, dz\right| \;\leq\; 2\pi e^3, \;$ όπου $\gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, \; 2\pi].$

4. Να δείξετε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz^2}}{1+z^2}dz=0,$$
όπου $\gamma_R(t)=Re^{it},\ t\in[0,\pi/2],\ \ R>0.$

5. Εάν $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Real}(z_1)\leq 0,\ \mathrm{Real}(z_2)\leq 0,$ να δείξετε ότι
$$|e^{z_1}\ -\ e^{z_2}|\ \leq\ |z_1\ -z_2|.$$

6. Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $f,g:U\to\mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους και $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ απλή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^*\subset U$. Εάν $z_0=\gamma(a),\ z_1=\gamma(b),$ να δείξετε ότι
$$\int_\gamma f'(z)g(z)dz=f(z_1)g(z_1)-f(z_0)g(z_0)\ -\ \int_\gamma f(z)g'(z)dz.$$

7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\gamma_r}\mathrm{Re}z dz,$ όπου $\gamma_r(t)=re^{it},\ t\in[0,\ 2\pi]\ (r>0)$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{Re}z$ δεν έχει παράγουσα σε κανένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0.

8. (i) Εάν $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ διαφορίσιμη $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b),$ να δείξετε ότι
$$\frac{d}{dt}\left[\ |\varphi(t)|^2\ \right]=2\mathrm{Re}\left[\ \varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\ \right],\quad \forall\, t\in[a,b].$$

(ii) Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $f:U\to\mathbb{C}$ ολόμορφη με συνεχή παράγωγο και γ απλή,
κλειστή, λεία καμπύλη με $\gamma^*\subset U$. Να δείξετε ότι το μιγαδικό ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma f'(z)\overline{f(z)}dz$$
είναι φανταστικός αριθμός.