ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με
$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\overline{z}^{\,3}}{|z|^2}, & z\neq 0\\[2ex] 0, & z=0.\end{cases}$$
Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0=0$ αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.

2. Να βρείτε το ευρύτερο πεδίο του $\mathbb{C}$ πάνω στο οποίο η συνάρτηση $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ είναι ολόμορφη.

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z)=e^y\cos x+ie^y\sin x$ δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο $z\in\mathbb{C}$.

4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z)=\overline{z}e^{-|z|^2}$ είναι διαφορίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγο στα σημεία αυτά.

5. Αν η $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, δείξτε ότι και η $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη.

6. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f=u+iv:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ τέτοια ώστε:
(i) $u(x,y)=-e^{-x}\sin y\ +\ \dfrac{y^2-x^2}{2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(0)=0$.
(ii) $u(x,y)=3x^2y-y^3+e^{2y}\cos(2x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(0)=1$.

7. Έστω $A\subseteq\mathbb{C}$ πεδίο και $f=u+iv\in\mathcal{H}(A)$ με $u_x+v_y=0$ στο A. Να δείξετε ότι υπάρχουν $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{C}$ τέτοια ώστε
$$f(z)=icz+d,\quad z\in A.$$

8. Έστω $f(z)=z^3$, $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει z_0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_1,\ z_2]$ τέτοιο ώστε
$$f(z_2)-f(z_1)=f'(z_0)(z_2-z_1).$$
Αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα της μέσης τιμής δεν ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις.

9. Έστω $A\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0=x_0+iy_0\in A$ και $f=u+iv:A\to\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι οι u,v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποια περιοχή του (x_0,y_0) και ότι το όριο
$$\lim_{z\to z_0}\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)$$
υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο z_0.

10. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο. Να δείξετε ότι:

(i) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ με $\overline{f} \in \mathcal{H}(A)$, τότε f σταθερή.

(ii) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και $|f|$ σταθερή, τότε f σταθερή.

(iii) Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ με f^5, $\overline{f}^2 \in \mathcal{H}(A)$, τότε f σταθερή.

11. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f \in \mathcal{H}(A)$. Να δείξετε ότι:

(i) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο μιας ευθείας του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

(ii) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο ενός κύκλου του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

12. (i) Εάν x_0 αρνητικός πραγματικός αριθμός, να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{w \to x_0} \mathrm{Log} w$.

(*Υπόδειξη*: Να θεωρήσετε τις ακολουθίες $|x_0|e^{i(\pi - 1/n)}$, $|x_0|e^{i(-\pi + 1/n)}$, $n \geq 1$.)

(ii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$