Λυμένες ασκήσεις Μιγαδικής Ανάλυσης Ι

1. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^{\,3}}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$ αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.

Λύση: Είναι $f = u + iv$ όπου

$$u(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}, \quad \text{για } (x,y) \neq (0,0)$$

και $u(0,0) = v(0,0) = 0$.

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0, \quad \lim_{y\to 0} \frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1$$

οπότε $u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1$, $u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0$ και άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}. \tag{1}$$

–Κατά μήκος της ευθείας $y = 0$, το όριο (2) γράφεται

$$\lim_{x\to 0,\, x\in\mathbb{R}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$$

–Κατά μήκος της ευθείας $y = x$, το όριο (2) γράφεται

$$\lim_{x\to 0,\, x\in\mathbb{R}} \frac{f(x+ix)-f(0)}{x+ix-0} = \lim_{x\to 0,\, x\in\mathbb{R}} \frac{(-2x^3)+i(-2x^3)}{2x^2(x+ix)} = -1.$$

Τα δύο τελευταία όρια είναι διαφορετικά, οπότε το όριο (2) δεν υπάρχει και συνεπώς η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $z_0 = 0$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = e^x \cos y \ + \ e^y \cos x \ + \ xy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $u = \mathbf{Re}(f)$ και $f(0) = 2$.

Λύση: Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Οι συνθήκες Cauchy-Riemann δίνουν

$$v_y = u_x = e^x \cos y \ - \ e^y \sin x \ + \ y \tag{2}$$

και

$$v_x = -u_y = e^x \sin y \ - \ e^y \cos x \ - \ x. \tag{3}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y παίρνουμε

$$v = e^x \sin y \; - \; e^y \sin x \; + \; y^2/2 \; + \; c(x). \tag{4}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς x παίρνουμε

$$v_x = e^x \sin y \; - \; e^y \cos x \; + \; c'(x),$$

οπότε, λόγω της (2), $c'(x) = -x$, δηλ. $c(x) = -x^2/2 + c$, όπου c πραγματική σταθερά.
Η (3) τώρα γράφεται

$$v = e^x \sin y \; - \; e^y \sin x \; + \; \frac{y^2 \; - \; x^2}{2} \; + \; c.$$

Επειδή $f(0) = 2$, ϑα πρέπει $2 = 2 + ic \; \Rightarrow \; c = 0$.
Άρα, η ζητούμενη ακέραια συνάρτηση είναι η

$$f(x+iy) = e^x \cos y \; + \; e^y \cos x \; + \; xy \; + \; i \left(e^x \sin y \; - \; e^y \sin x \; + \; \frac{y^2 \; - \; x^2}{2} \right).$$

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό. Να δείξετε ότι:
(i) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ με $\overline{f} \in \mathcal{H}(A)$, τότε f σταθερή.
(ii) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και $|f|$ σταθερή, τότε f σταθερή.
(iii) Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ με $f^3, \, \overline{f}^2 \in \mathcal{H}(A)$, τότε f σταθερή.

Λύση: (i), (ii): Θεωρία.
(iii) Έχουμε

$$f^6 = (f^3)^2 \; \in \; \mathcal{H}(A), \quad \overline{f^6} = (\overline{f}^2)^3 \; \in \; \mathcal{H}(A)$$

και άρα $f^6 =$ σταθερή οπότε και $|f| =$ σταθερή. Επομένως,

$$|f^3| = |f|^3 = \text{σταθερή} \; \Rightarrow \; f^3 = c_1 = \text{σταθερή}$$

και

$$|\overline{f}^2| = |f^2| = |f|^2 = \text{σταθερή} \; \Rightarrow \; \overline{f}^2 = \text{σταθερή} \; \Rightarrow \; f^2 = c_2 = \text{σταθερή}.$$

Άρα,

$$c_1 = c_2 f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

–Εάν $c_2 = 0$, τότε $f(z)^2 = c_2 = 0 \; \Rightarrow f(z) = 0, \, \forall z \in \mathbb{C}$.
– Εάν $c_2 \neq 0$, τότε $f(z) = c_1/c_2, \, \forall z \in \mathbb{C}$.
Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο A.

4. Αν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη δείξτε ότι και η $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη.

Λύση: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Για κάθε $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, έχουμε

$$\frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h} = \frac{\overline{f(\overline{z_0}+\overline{h})} \;-\; \overline{f(\overline{z_0})}}{h} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z_0}+\overline{h}) \;-\; f(\overline{z_0})}{\overline{h}}\right)}.$$

Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overline{z_0}$, ισχύει

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{z_0}+\overline{h}) \;-\; f(\overline{z_0})}{\overline{h}} = f'(\overline{z_0}),$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h} = \overline{f'(\overline{z_0})}$$

και άρα η g είναι διαφορίσιμη στο σημείο z_0.

5. **(α)** Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής ($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$). Να δείξετε ότι

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \;\le\; \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

(β) Να δείξετε ότι $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz = 0$, όπου $\sigma_R(t) = R + it,\ \ t \in [0, R]$.

(γ) Εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα Cauchy, να δείξετε ότι

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x^2}dx.$$

Λύση: **(α)** Θέτουμε $z = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt$.

–Εάν $z = 0$, η αποδεικτέα προφανώς ισχύει.

–Έστω ότι $z \neq 0$. Εάν $\theta = Arg(z)$, τότε

$$\begin{aligned}
|z| \;&=\; ze^{-i\theta} = \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)dt = Re\left(\int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)dt\right) \\
&=\; \int_a^b Re\left(e^{-i\theta}\varphi(t)\right)dt \;\le\; \int_a^b |e^{-i\theta}\varphi(t)|dt = \int_a^b |e^{-i\theta}|\cdot|\varphi(t)|dt = \int_a^b |\varphi(t)|dt,
\end{aligned}$$

που είναι και η αποδεικτέα.

(β) Για $z = \sigma_R(t) = R + it$ έχουμε

$$z^2 = R^2 - t^2 + 2iRt, \quad e^{iz^2} = e^{-2Rt}\cdot e^{i(R^2-t^2)},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz\right| \;&=\; \left|i\int_0^R e^{-2Rt}\cdot e^{i(R^2-t^2)}dt\right| \;\le\; \int_0^R |e^{-2Rt}\cdot e^{i(R^2-t^2)}|dt \\
&=\; \int_0^R e^{-2Rt}dt = \frac{1}{2R}\left(1 \;-\; e^{-2R^2}\right) \stackrel{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

(γ) Για $R > 0$, θεωρούμε την κλειστή τμ. λεία καμπύλη

$$\Gamma_R = [0, R] \ + \ \sigma_R \ - \ \gamma_R, \quad \gamma_R(t) = t + it, \ \ t \in [0, R]$$

(δηλ. το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0, 0), \ (R, 0), \ (R, R)$.)
Από το θεώρημα Cauchy έχουμε

$$0 = \int_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{it^2} dt \ + \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz \ - \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz$$

ή

$$\int_0^R e^{it^2} dt \ + \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz \ = \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz.$$

Για $z = \gamma_R(t) = t + it, \ t \in [0, R]$, ισχύει

$$iz^2 = it^2(1 + i)^2 = -2t^2,$$

οπότε

$$\int_0^R e^{it^2} dt \ + \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz = (1 + i) \int_0^R e^{-2t^2} dt.$$

Για $R \to +\infty$ και λόγω του ερωτ. (β) προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = (1 + i) \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt.$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη κι επειδή $e^{it^2} = \cos(t^2) + i \sin(t^2), \ \forall t \in \mathbb{R}$, προκύπτει η αποδεικτέα.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1 + z^2}, \ z \in \mathbb{C}$.

(i) Να δείξετε ότι

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}, \ t \in [0, \pi], \ R > 0$.

(ii) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx.$$

[*Υπόδειξη*: **Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για τη συνάρτηση** f **πάνω στην κλειστή καμπύλη** $\gamma_R + [-R, R], \ R > 0$.]

Λύση: (i) Έστω $R > 1$. Τότε, $\forall z = x + iy \in \gamma_R^*$, είναι $y \geq 0$ και

$$|e^{iz}| = e^{-y} \ \leq \ 1, \quad |z^2 + 1| \geq R^2 - 1,$$

οπότε

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right| \ \leq \ \frac{1}{R^2 - 1}, \quad \forall z \in \gamma_R^*.$$

Από την ML - ανισότητα τώρα παίρνουμε

$$\left|\int_{\gamma_R^*} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz\right| \leq \text{ μήκος}(\gamma_R^*) \cdot \frac{1}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(ii) Έστω $R > 1$. Θεωρούμε την απλή κλειστή τμηματικά λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R].$$

Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z+i}$ είναι ολόμορφη στο εσωτερικό της Γ_R που περιέχει το i. Επιπλέον, η f είναι συνεχής πάνω στο Γ_R^*. Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy δίνει

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = \pi/e.$$

Τώρα έχουμε

$$\pi/e = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz \ + \int_{[-R,R]} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz \ + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx.$$

Παίρνοντας στην παραπάνω ισότητα το όριο καθώς το $R \to +\infty$, λόγω του ερωτ. (i) προκύπτει

$$\pi/e \ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx \ + \ i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}dx$$

και συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \pi/e.$$

7. Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση e^z/z πάνω στον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt = 0$.

Λύση: Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy δίνει

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i e^z \mid_{z=0} = 2\pi i.$$

Μια παραμέτρηση του κύκλου είναι $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Για κάθε $t \in [0, 2\pi]$,

$$e^{\gamma(t)} = e^{\cos t} \cdot e^{i\sin t} = e^{\cos t} \cdot [\cos(\sin t) + i\sin(\sin t)] = e^{\cos t}\cos(\sin t) \ + \ ie^{\cos t}\sin(\sin t),$$

οπότε

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{e^z}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\gamma(t)}}{e^{it}} ie^{it}dz = -\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt \ + \ i\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt.$$

Άρα

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt = 2\pi.$$

8. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1},$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [-\pi/2,\ \pi/2],\ \ R > 1$**.**

[*Υπόδειξη*: **Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy πάνω στην κλειστή καμπύλη** $\gamma_R + [Ri, -Ri]$**.**]

Λύση: Θεωρούμε την απλή κλειστή τμηματικά λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [Ri, -Ri].$$

Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy δίνει

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{1}{z+1}\ |_{z=1} = i\pi.$$

Τώρα έχουμε

$$i\pi = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-1} dz\ +\ \int_{[Ri,-Ri]} \frac{1}{z^2-1} dz.$$

Αλλά

$$\int_{[Ri,-Ri]} \frac{1}{z^2-1} dz = -\int_{[-Ri,Ri]} \frac{1}{z^2-1} dz = -\int_{t=-R}^{t=R} \frac{d(it)}{(it)^2-1} = i\int_{t=-R}^{t=R} \frac{dt}{t^2+1} = 2i\mathrm{ArctanR}.$$

Επομένως,

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-1} dz = i(\pi\ -\ 2\mathrm{ArctanR}).$$

9. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση $f : D[0, R] \to \mathbb{C}$, **όπου** $D[0, R] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\},\ R > 0$. **Εάν** $f(z_0) = 0$, **για κάποιο** z_0 **με** $|z_0|\ <\ R$, **να δείξετε ότι**

$$|f(0)|\ \leq\ \frac{M_R|z_0|}{R-|z_0|},$$

όπου $M_R = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$**.**

[*Υπόδειξη*: **Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy στα σημεία** $z_0,\ 0$ **και για τον κύκλο** $\gamma_R(t) = Re^{it},\ \ t \in [0, 2\pi]$**.**]

Λύση: Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy στα σημεία $0,\ z_0$ παίρνουμε

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z} dz, \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

οπότε

$$f(0) = f(0) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \left[\frac{f(z)}{z}\ -\ \frac{f(z)}{z-z_0} \right] dz = -\frac{z_0}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z(z-z_0)} dz.$$

Για κάθε $z \in \gamma_R^*$, έχουμε

$$|f(z)| \leq M_R\ , \quad |z(z-z_0)| = R|z-z_0| \geq R(R-|z_0|), \quad \left|\frac{f(z)}{z(z-z_0)}\right| \leq \frac{M_R}{R(R-|z_0|)}\ .$$

Η ML - ανισότητα τώρα δίνει

$$|f(0)| \leq \frac{|z_0|}{2\pi} 2\pi R \frac{M_R}{R(R-|z_0|)} = \frac{|z_0| M_R}{R-|z_0|}\ .$$

10. Έστω f ακέραια συνάρτηση με $f = u + iv$. Αν $u^2 \leq v^2$, να δείξετε ότι f σταθερή.

Λύση: Θεωρούμε την ακέραια συνάρτηση $g = e^h$, όπου $h = f^2$. Τότε,

$$|g| = e^{Re(h)} = e^{Re(f^2)} = e^{u^2 - v^2}\ \leq\ 1,$$

δηλ. η g είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$. Λόγω του θεωρήματος Liouville, η g είναι σταθερή. Τότε, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$0 = g'(z) = h'(z) e^{h(z)}\ \Rightarrow\ h'(z) = 0$$

κι επομένως $h = c =$ σταθερή. Τότε, $|f|^2 = |h| = |c|\ \Rightarrow\ |f| = \sqrt{|c|} =$ σταθερή και άρα f σταθερή.

11. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(z)|\ \leq\ A|z|^2\ +\ B, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

όπου A, B θετικές σταθερές. Να δείξετε ότι:

(i) Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 3$ και για όλα τα $R > 0$, ισχύει

$$|f^{(n)}(0)|\ \leq\ n! \frac{AR^2 + B}{R^n}\ .$$

(ii) η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

Λύση: (i) Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 3$ και $R > 0$. Θεωρούμε τον κύκλο $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy στο σημείο 0 για παραγώγους παίρνουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Για κάθε $z \in \gamma_R^*$, έχουμε

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|\ \leq\ \frac{AR^2 + B}{R^{n+1}}\ ,$$

οπότε, η ML - ανισότητα δίνει

$$|f^{(n)}(0)|\ \leq\ \frac{n!}{2\pi} 2\pi R \frac{AR^2 + B}{R^{n+1}} = n! \frac{AR^2 + B}{R^n}\ .$$

(ii) Για $n \geq 3$ παίρνουμε το όριο καθώς $R \to +\infty$ στην ανισότητα του ερωτ. (i) και προκύπτει ότι $f^{(n)}(0) = 0$.

Επειδή η f είναι ακέραια, από το θεώρημα του Taylor, έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0) z + \frac{f''(0)}{2} z^2, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\ .$$

Άρα, η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

12. Αναπτύξτε σε σειρά Laurent γύρω από το 1 τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \; + \; \frac{1}{1+z},$$

στους δακτυλίους $0 < |z-1| < 2, \quad |z-1| > 2.$

Λύση: Για $0 < |z-1| < 2$, ϑέτουμε

$$w = \frac{z-1}{2} \;\Rightarrow\; z = 1 + 2w, \quad |w| \; < \; 1$$

οπότε

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+w} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

και άρα

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} \; + \; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, \quad 0 < |z-1| < 2.$$

Για $|z-1| > 2$, ϑέτουμε

$$w = \frac{2}{z-1} \;\Rightarrow\; z = 1 + \frac{2}{w}, \quad |w| \; < \; 1$$

οπότε

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{w}{1+w} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

και άρα

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} \; + \; \frac{1}{1+z} = -\frac{1}{z-1} \; + \; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 2.$$

13. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\gamma} \frac{\overline{z}\sin(z^2)}{z^{10}} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Λύση: Για $z \in \gamma^*$ έχουμε $\overline{z} = 1/z$ οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int_{\gamma} \frac{\sin(z^2)}{z^{11}} dz = 2\pi i Res(f, 0), \quad f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^{11}}.$$

Σημ. ότι το 0 είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της f στο εσωτερικό της γ.
Για $z \neq 0$ έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^{11}} \cdot \left(z^2 \; - \; \frac{z^6}{3!} \; + \; \frac{z^{10}}{5!} \; - \; \ldots \right) \; = \; \frac{1}{z^9} \; - \; \frac{1}{3! \cdot z^5} \; + \; \frac{1}{5! \cdot z} \; - \; \ldots$$

$$\Longrightarrow \;\; Res(f, 0) = \frac{1}{5!} \;\; \Longrightarrow \;\; I = \frac{2\pi i}{5!}.$$

14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{dz}{(z-2)^2(z-4)}$ όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z| = R$ όταν (i) $R = 1$, (ii) $R = 3$ (iii) $R = 5$.

Λύση: Θέτουμε

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-4)} .$$

Τα ανώμαλα σημεία της f είναι τα 2, 4 (διπλός και απλός πόλος αντίστοιχα).

(i) Εάν $R = 1$, η f είναι ολόμορφη στο εσωτερικό της γ και συνεχής πάνω στο γ^*. Το θεώρημα Cauchy-Goursat δίνει

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(ii) Εάν $R = 3$, το μοναδικό ανώμαλο σημείο της f που περιέχεται στο εσωτερικό της γ είναι ο διπλός πόλος 2. Σύμφωνα με το Θ. Ολοκλ. Υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,2) = 2\pi i \lim_{z\to 2}\left[(z-2)^2 f(z)\right]' = -2\pi i \lim_{z\to 2}\frac{1}{(z-4)^2} = -i\pi/2.$$

(iii) Εάν $R = 5$, το εσωτερικό της γ περιέχει και τα δύο ανώμαλα σημεία 2, 4 (διπλός και απλός πόλος αντίστοιχα). Σύμφωνα με το Θ. Ολοκλ. Υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i[\ Res(f,2)\ +\ Res(f,4)\ ].$$

Είδαμε στο ερώτ. (ii) ότι $Res(f,2) = -1/4$. Επιπλέον,

$$Res(f,4) = \lim_{z\to 4}[(z-4)f(z)] = \lim_{z\to 4}\frac{1}{(z-2)^2} = 1/4.$$

Άρα,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\ -1/4\ +\ 1/4\ ) = 0.$$

15. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^2}dz,$$

όπου

(i) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ **(ii)** $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

Λύση: Θέτουμε

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2 z} .$$

Τα ανώμαλα σημεία της f είναι τα 1, 0(διπλός και απλός πόλος αντίστοιχα).

(i) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Σε αυτήν την περίπτωση το μοναδικό ανώμαλο σημείο της f που περιέχεται στο εσωτερικό της γ είναι ο απλός πόλος 0. Σύμφωνα με το Θ. Ολοκλ. Υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,0) = 2\pi i \lim_{z\to 0}[zf(z)] = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2} = 2\pi i.$$

(ii) $\gamma(t) = 1+\frac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Σε αυτήν την περίπτωση το μοναδικό ανώμαλο σημείο της f που περιέχεται στο εσωτερικό της γ είναι ο διπλός πόλος 1. Σύμφωνα με το Θ. Ολοκλ. Υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,1) = 2\pi i \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2 f(z)\right]' = 2\pi i \lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2} = 0.$$

16. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2(z-4)}dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z| = R$ όταν (i) $R = 1$ (ii) $R = 3$ (iii) $R = 5$.

Λύση: Θέτουμε

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2(z-4)}\ .$$

Τα ανώμαλα σημεία της f είναι τα 2, 4 τα οποία είναι και ρίζες του αριθμητή.

–Έχουμε

$$\lim_{z\to 2}[\ (z-2)f(z)\ ] = \lim_{z\to 2}\frac{\sin(\pi z)-\sin(2\pi)}{z-2}\cdot\lim_{z\to 2}\frac{1}{z-4} = \pi\cos(\pi z)\ |_{z=2}\cdot\frac{1}{z-4}\ |_{z=2} = -\pi/2 \neq 0,$$

οπότε το 2 είναι απλός πόλος και $Res(f,2) = -\pi/2$.

–Έχουμε

$$\lim_{z\to 4} f(z) = \lim_{z\to 4}\frac{\sin(\pi z)-\sin(4\pi)}{z-4}\cdot\lim_{z\to 4}\frac{1}{(z-2)^2} = \pi\cos(\pi z)\ |_{z=4}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}\ |_{z=4} = \pi/4 \in \mathbb{C},$$

οπότε το 4 είναι αιρόμενο και $Res(f,4) = 0$.

(i) Εάν $R = 1$, η f είναι ολόμορφη στο εσωτερικό της γ και συνεχής πάνω στο γ^*. Το θεώρημα Cauchy-Goursat δίνει

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(ii) Εάν $R = 3$, το μοναδικό ανώμαλο σημείο της f που περιέχεται στο εσωτερικό της γ είναι ο απλός πόλος 2. Σύμφωνα με το Θ. Ολοκλ. Υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,2) = 2\pi i(-\pi/2) = -i\pi^2.$$

(iii) Εάν $R = 5$, το εσωτερικό της γ περιέχει και τα δύο ανώμαλα σημεία 2, 4 (απλός πόλος και αιρόμενο αντίστοιχα). Σύμφωνα με το Θ. Ολοκλ. Υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i[\ Res(f,2)\ +\ Res(f,4)\ ] = 2\pi i(-\pi/2\ +\ 0) = -i\pi^2\ .$$

17. (α) Έστω g ολόμορφη πάνω σε μια περιοχή του 0 με $g(0) \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$Res\left(\frac{1}{z^3 g(z)},\ 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2\ -\ g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}\ .$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(e^z-1)\sin z}\ ,\quad \text{όπου}\ \ \gamma(t) = e^{it},\quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση: (α) Επειδή $g(0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή U του 0 ώστε $1/g \in \mathcal{H}(U)$.
Θέτουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^3 g(z)}, \quad z \in U.$$

Έχουμε

$$\lim_{z\to 0}[\, z^3 \cdot f(z)\,] = \lim_{z\to 0}\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(0)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \text{πόλος τάξης } \ 3 \ \text{ της } \ f.$$

Άρα

$$Res(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{g(z)}\right]'' = \ldots = \frac{2[g'(0)]^2 \ - \ g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}\ .$$

(β) $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$z(e^z - 1)\sin z = z\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = z^3 g(z),$$

όπου

$$\begin{aligned} g(z) \ &= \ \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)\cdot\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right) \\ &= \ 1 + \frac{1}{2!}z + 0z^2 + \ldots, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και

$$g(0) = 1, \quad \frac{g'(0)}{1!} = \frac{1}{2!} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{g''(0)}{2!} = 0 \Rightarrow g''(0) = 0.$$

Τα ανώμαλα σημεία της

$$\frac{1}{z(e^z - 1)\sin z} = \frac{1}{z^3 g(z)} = f(z)$$

είναι: $0,\ 2k\pi i,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 περιέχεται στο εσωτερικό της γ^*.
Άρα,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,0).$$

Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι

$$Res(f,0) = \frac{2[g'(0)]^2 \ - \ g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3} = 1/4\ ,$$

οπότε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i/4 = \pi i/2\ .$$

18. (α) Να προσδιορίσετε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\sin z = (\pi - z)\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\pi) = 1, \quad \varphi'(\pi) = 0.$$

(β)(1 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{\sin^2 z}dz\ , \quad \text{όπου } \ \gamma(t) = 4e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση: (α) $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \sin(\pi - z) = (\pi - z) - \frac{(\pi - z)^3}{3!} + \frac{(\pi - z)^5}{5!} - \frac{(\pi - z)^7}{7!} + \ldots = (\pi - z) \cdot \varphi(z),$$

όπου

$$\varphi(z) = 1 - \frac{(\pi - z)^2}{3!} + \frac{(\pi - z)^4}{5!} - \frac{(\pi - z)^6}{7!} + \ldots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Προφανώς, η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $\varphi(\pi) = 1,\ \varphi'(\pi) = 0$.

(β) Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin^2 z}$$

που περιέχονται στο εσωτερικό της γ είναι $0,\ \pm\pi$.

Είναι

$$\lim_{z\to 0}[\, zf(z)\,] = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \lim_{z\to 0} \Big(\frac{z}{\sin z}\Big)^2 = 1 \cdot 1^2 = 1 \neq 0,$$

οπότε το σημείο 0 είναι απλός πόλος της f και άρα $Res(f, 0) = 1$.

Επίσης, λόγω του ερωτ. (β),

$$\lim_{z\to\pi}[\, (z - \pi)^2 f(z)\,] = \lim_{z\to\pi} \frac{e^z - 1}{[\, \varphi(z)\,]^2} = e^\pi - 1 \neq 0,$$

οπότε το σημείο π είναι διπλός πόλος της f. Άρα,

$$Res(f, \pi) = \lim_{z\to\pi}[\, (z - \pi)^2 f(z)\,]' = \lim_{z\to\pi} \frac{e^z\varphi^2(z) - 2(e^z - 1)\varphi(z) \cdot \varphi'(z)}{[\, \varphi(z)\,]^4} = e^\pi.$$

Στη συνέχεια, από το ερωτ. (β), θέτοντας όπου z το $-z$, παίρνουμε

$$\sin z = (\pi + z)g(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

όπου $g(z) = -\varphi(-z), \quad z \in \mathbb{C}$. Προφανώς, $g(-\pi) = -1,\ g'(-\pi) = 0$.
Εργαζόμενοι όπως παραπάνω, παίρνουμε

$$Res(f, -\pi) = e^{-\pi}.$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$2\pi i(\, 1 + e^\pi + e^{-\pi}\,).$$

19. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$1 - \cos z = z^2\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \psi(0) = \frac{1}{2}\,, \quad \psi'(0) = 0.$$

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma h(z)dz$, όπου

$$h(z) = \frac{1}{1 - \cos z} + z^5 \sin\left(1/z^2\right), \qquad \gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Λύση: Είναι

$$\int_\gamma h(z)dz = \int_\gamma f(z)dz \; + \; \int_\gamma g(z)dz,$$

όπου

$$f(z) = \frac{1}{1-\cos z}, \qquad g(z) = z^5 \sin\left(1/z^2\right).$$

$\forall\, z \in \mathbb{C}$,

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} \; - \; \frac{z^4}{4!} \; + \; \frac{z^6}{6!} \; - \; \ldots \; = \; z^2 \cdot \psi(z),$$

όπου

$$\psi(z) = \frac{1}{2!} \; - \; \frac{z^2}{4!} \; + \; \frac{z^4}{6!} \; - \; \ldots .$$

Προφανώς, η ψ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $\psi(0) = \dfrac{1}{2}$, $\psi'(0) = 0$.

Επειδή $\psi(0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή U του 0 τέτοια ώστε $\psi(z) \neq 0$, $\forall z \in U$. Τότε, η $\varphi = 1/\psi$ είναι ολόμορφη στο U και

$$\frac{1}{1-\cos z} = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad z \in U, \quad \varphi(0) \neq 0.$$

Έπεται ότι το 0 είναι πόλος της $f(z) = \dfrac{1}{1-\cos z}$ τάξης 2 κι επομένως,

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \varphi'(0) = -\frac{\psi'(0)}{[\psi(0)]^2} = 0.$$

Το 0 είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της f που βρίσκεται στο εσωτερικό της γ, οπότε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Επιπλέον, $\forall z \neq 0$,

$$g(z) = z^5 \sin\left(1/z^2\right) = z^5 \left(\frac{1}{z^2} \; - \; \frac{1}{3! z^6} \; + \; \frac{1}{5! z^{10}} \; - \; \ldots \right) \; = \; z^3 \; - \; \frac{1}{3! z} \; + \; \frac{1}{5! z^5} \; - \; \ldots,$$

$$\Longrightarrow \; Res(g,0) = -\frac{1}{3!}\,.$$

Το 0 είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της g που βρίσκεται στο εσωτερικό της γ, οπότε

$$\int_\gamma g(z)dz = -2\pi i \cdot \frac{1}{3!} = -\frac{\pi i}{3}.$$

Τελικά,

$$\int_\gamma h(z)dz = 0 \; - \; \frac{\pi i}{3} = -\frac{\pi i}{3}\,.$$

20. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} .$$

Λύση: Θέτοντας $t = 2\theta$, το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\dfrac{1-\cos t}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\cos t} = \int_\gamma \frac{\dfrac{dz}{iz}}{3 - \dfrac{z^2+1}{2z}} \\ &= \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{6z - z^2 - 1} = 2i\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 6z + 1} , \end{aligned}$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Οι ρίζες του τριωνύμου $p(z) = z^2 - 6z + 1$ είναι οι $a = 3+2\sqrt{2}$, $b = 3-2\sqrt{2}$, από τις οποίες μόνο η b περιέχεται στο εσωτερικό της γ. Επομένως,

$$I = \frac{2}{i}\, 2\pi i\, Res\left(\frac{1}{p(z)}, b\right) = -4\pi \frac{1}{2z - 6}\,|_{z=b} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

21. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} dx .$$

Λύση: Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+x+1 = 0$ είναι οι

$$a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} ,$$

από τις οποίες μόνο η a έχει θετικό φανταστικό μέρος κι επομένως

$$I = 2\pi i Res(f, a), \quad \text{όπου } f(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2} = \frac{1}{(z-a)^2(z-b)^2} .$$

Προφανώς το a είναι διπλός πόλος της f, οπότε

$$Res(f, a) = \lim_{z\to a} [\, (z-a)^2 f(z)\,]' = -\frac{2}{(a-b)^3} = -\frac{2i}{3\sqrt{3}}$$

και άρα $I = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

22. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+1} dx = \pi Im(ae^{ia}), \quad \text{όπου } a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Λύση: Είναι $a^4 = (e^{i\pi/4})^4 = e^{i\pi} = -1$, οπότε οι ρίζες της εξίσωσης $z^4+1 = 0$ είναι οι αριθμοί

$$a, \quad -a, \quad \overline{a}, \quad -\overline{a}.$$

Από αυτές τις ρίζες, μόνο οι

$$a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad b = -\bar{a} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^4} dx = 2\pi i [\ Res(f,a) \ + \ Res(f,b)\ ], \quad \text{όπου} \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+1}\ .$$

Για κάθε $\rho \in \{a,\ b\}$, έχουμε

$$Res(f,\rho) = \frac{e^{i\rho}}{4\rho^3} = \frac{\rho e^{i\rho}}{4\rho^4} = -\frac{\rho e^{i\rho}}{4}\ ,$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^4} dx = -\frac{2\pi i}{4}(ae^{ia} + be^{ib}) = -\frac{\pi i}{2}(ae^{ia} \ - \overline{ae^{ia}}) = \pi Im(ae^{ia}).$$

Εξισώνοντας στην παραπάνω τα πραγματικά μέρη κι επειδή $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, παίρνουμε την αποδεικτέα.