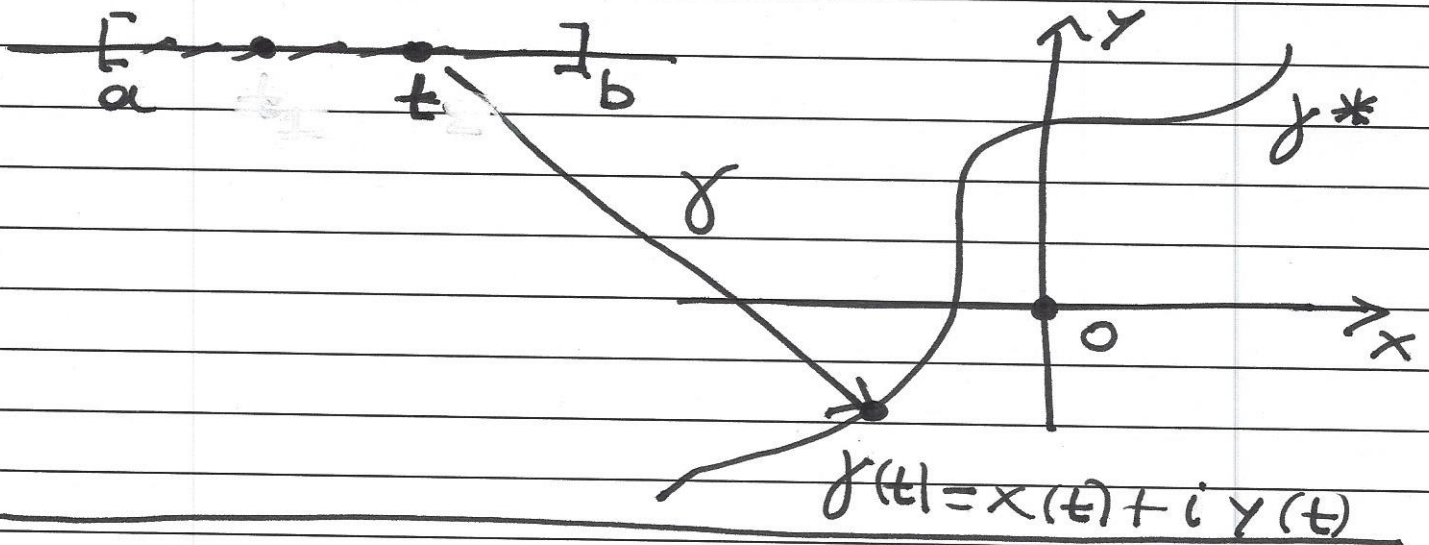


## Στοιχεία καμπυλών στο μιγαδικό επίπεδο

Ορισμός 1. Καμπύλη στο  $\mathbb{C}$  είναι

μία συνεχής συνάρτηση  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  
όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .



$\forall t \in [a, b]$ ,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , όπου

$$x(t) = \operatorname{Re} \gamma(t), \quad y(t) = \operatorname{Im} \gamma(t).$$

Έτσι, ορίζονται δύο συναρτήσεις

$$x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

με  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

Το σύνολο  $\gamma^* = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$   
λέγεται ίχνος της  $\gamma$ .

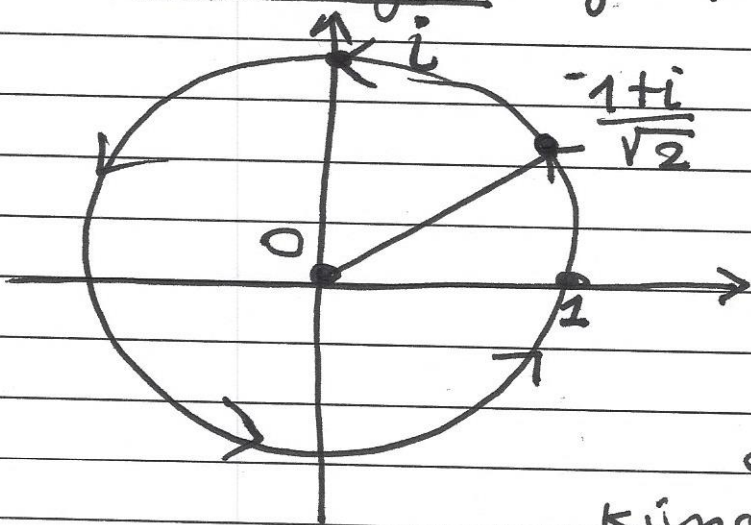
Το  $\gamma(a)$  καλείται αρχή ή το  $\gamma(b)$  πέρας της καμπύλης  $\gamma$ .

Στα σημεία του  $\gamma^*$  ορίζεται μια φυσιολογική διάταξη:

" Το σημείο  $\gamma(t_1)$  προηγείται του  $\gamma(t_2)$  αν  $t_1 < t_2$ ,  $t_1, t_2 \in [a, b]$ ."

Με αυτόν τον τρόπο καθορίζουμε τη φορά διαγραφής του  $\gamma^*$ .

Παράδειγμα:  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .



$\gamma^* = \circ$  μοναδιαίος κύκλος κέντρου  $\circ$

με φορά διαγραφής θετική, δηλ.

αντιθέση από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Πράγματι,  $0 < \pi/4 < \pi/2$ , οπότε

• το  $\gamma(0) \equiv (1, 0)$  "προηγείται" του  $\gamma(\pi/4) \equiv (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

• το  $\gamma(\pi/4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  "προηγείται" του

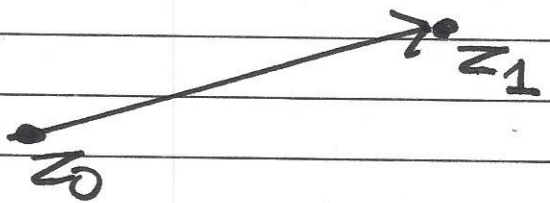
$\gamma(\pi/2) \equiv (0, 1)$ .

Συχνά <sup>ε</sup> συντίθεται <sup>η</sup> μια καμπύλη με το ίδιο της. [Παρ' όλ' αυτά οι δύο έννοιες είναι διαφορετικές.]

Παραδείγματα:

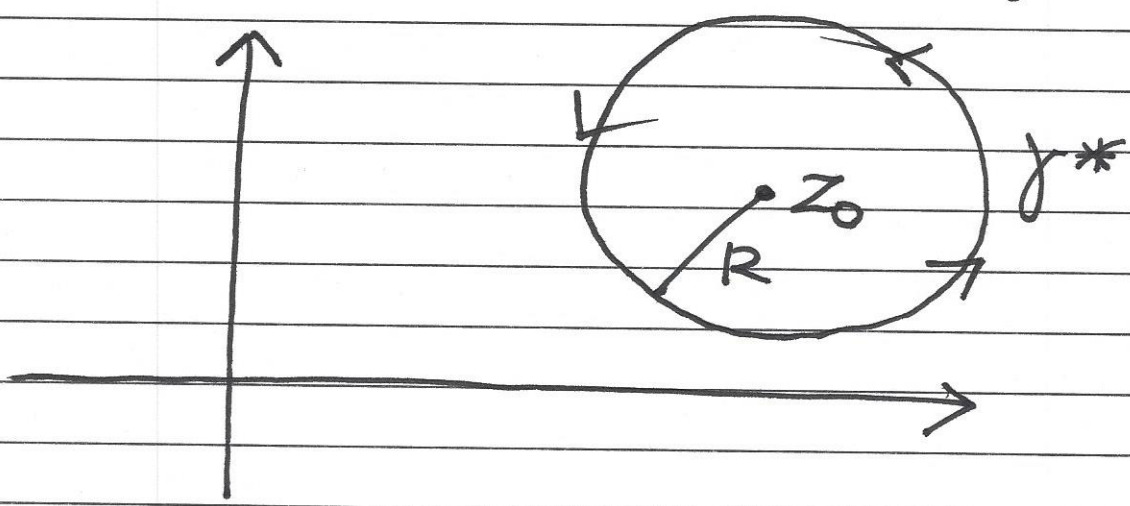
(i) Έστω  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  κ'  $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0,1]$ .

$\gamma^* = [z_0, z_1]$  = το προσανατολισμένο ευθ. τμήμα με αρχή το  $z_0$  κ' τέλος το  $z_1$ .



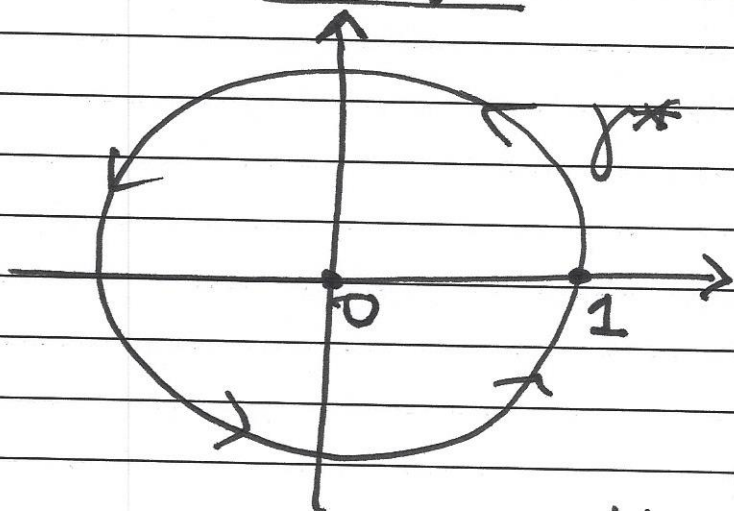
(ii) Έστω  $z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$  κ'  $\gamma_R: [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$ .

$\gamma^* = \circ$  κύκλος με κέντρο  $z_0$  κ' ακτίνα  $R$ , με θετική φορά διαγραφής



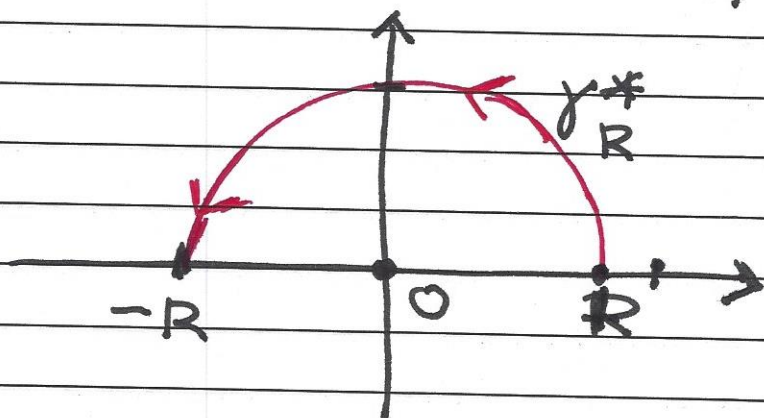
$$(iii) \gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 4\pi].$$

$\gamma^* = \circ$  μοναδιαίος κύκλος που διαγράφεται 2 φορές κατά την δευτερεύουσα φορά



$$(iv) \gamma_R(t) = R e^{it}, t \in [0, \pi] \quad (R > 0).$$

$\gamma_R^* = \circ$  ημκύκλιο κέντρου 0 ρ' ακτίνας  $R$  με δευτερεύουσα φορά διαγραφής.



Ορισμός 2. Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  καμπύλη.

Η  $\gamma$  λέγεται

- κλειστή, αν  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

- απλή, αν η  $\gamma|_{[a, b)}$  είναι 1-1

(δηλ. το  $\gamma^*$  "δεν τέμνει τον εαυτό του")

Παραδείγματα:

(i)  $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$   
 $(R > 0, z_0 \in \mathbb{C})$ .

Η  $\gamma$  είναι απλή, κλειστή.

(ii)  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 4\pi]$

Η  $\gamma$  είναι κλειστή, όχι απλή

(iii)  $\gamma: [-\pi/2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

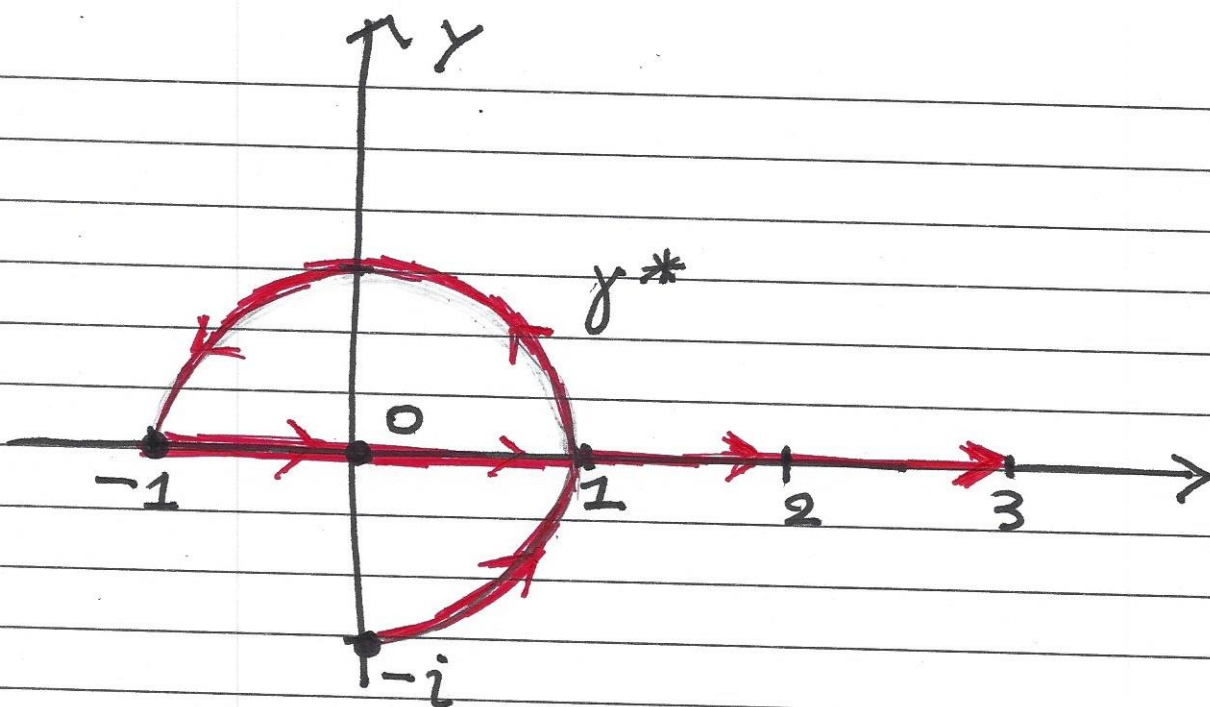
$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it}, & t \in [-\pi/2, \pi] \\ \frac{4t}{\pi} - 5, & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

$$\gamma(-\pi/2) = -i, \quad \gamma(0) = \gamma(3\pi/2) = 1,$$

$$\gamma(2\pi) = 3$$

Άρα,  $\gamma$  ούτε κλειστή, ούτε απλή.

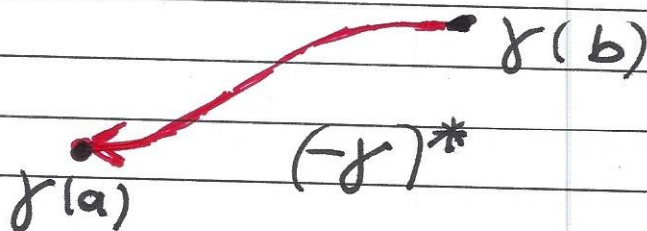
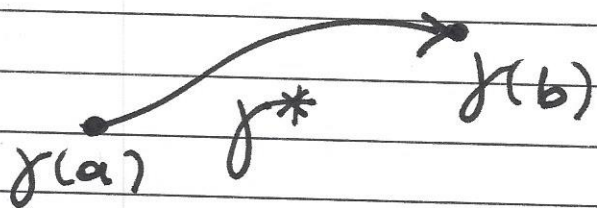
(βλ. σχήμα παρακάτω)



Ορισμός 3 Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  καμπύλη.

Η αντίθετη της  $\gamma$ , είναι η καμπύλη

$(-\gamma): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  με  $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$ .



Τα ίχνη των  $\gamma, (-\gamma)$  έχουν αντίθετες  
φορές διαγραφής.

Ορισμός 4. Έστω  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

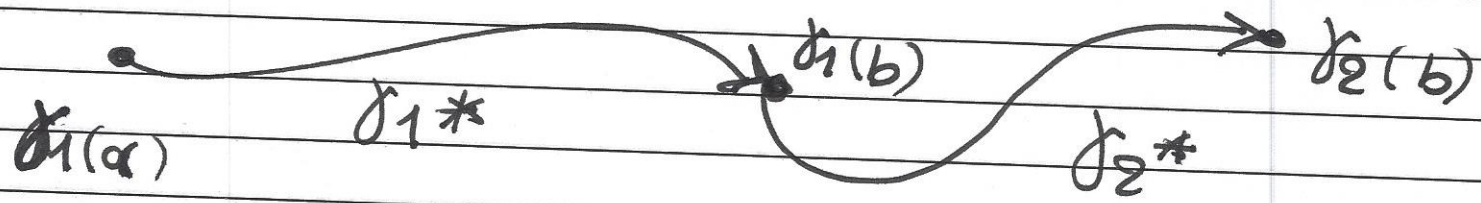
δύο διαδοχικές καμπύλες, δηλ.  $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$ .

Άθροισμα των  $\gamma_1, \gamma_2$  είναι η καμπύλη

$(\gamma_1 + \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  με

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \gamma_2(2t-b), & t \in [\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$$

Ισχύει  $(\gamma_1 + \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

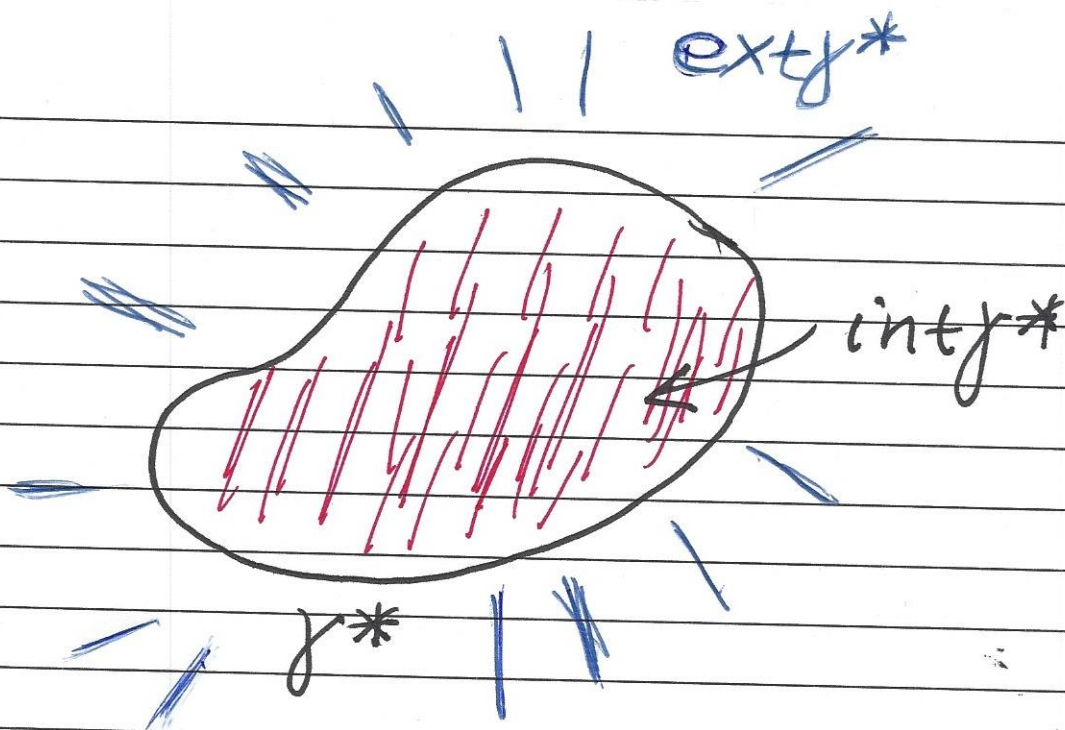


Θεώρημα 5 (Jordan)

Έστω  $\gamma$  απλή, κλειστή καμπύλη. Τότε, το  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  χωρίζεται σε δύο πεδία:

— ένα φραγμένο πεδίο που λέγεται εσωτερικό της  $\gamma$  ( $int \gamma^*$ )

— ένα μη φραγμένο πεδίο που λέγεται εξωτερικό της  $\gamma$  ( $ext \gamma^*$ )



Το παραπάνω θεώρημα του Jordan φαίνεται διασθητικά προφανές αλλά η απόδειξή του είναι δύσκολη!!

Ορισμός 6: Μια απλή, κλειστή καμπύλη

$\gamma$  λέγεται θετικά προσανατολισμένη

ανν ένας παρατηρητής που κινείται πάνω στο  $\gamma^*$  αφήνει πάντα στα αριστερά του το εσωτερικό της  $\gamma$ .

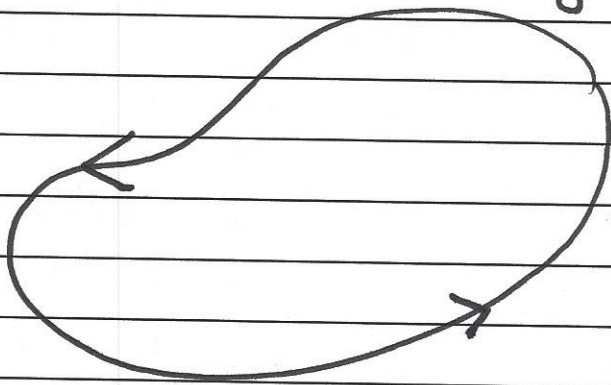
Μια καμπύλη (απλή, κλειστή) που δεν είναι θετικά προσανατολισμένη λέγεται αρνητικά προσανατολισμένη.



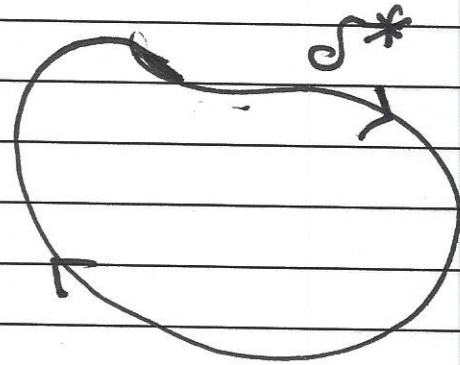
π.χ.

$\gamma^*$

9



$\gamma$ : θετικά προσανατολισμένη



$\gamma^*$

$\delta$ : αρνητικά προσανατολισμένη

Προφανώς, η  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ( $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$ ),

είναι θετικά προσανατολισμένη.

Ορισμός 7

Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

καμπύλη με  $x(t) = \operatorname{Re} \gamma(t)$ ,  $y(t) = \operatorname{Im} \gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , δηλ.

Η  $\gamma$  λέγεται λεία ανν:

(i) οι  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες

(ii)  $\gamma'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in (a, b)$

όπου  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

Σχόλιο: Η συνθήκη (ii) του ορισμού

απαιτεί σε κάθε σημείο του  $\gamma^*$  το διάνυσμα της ταχύτητας να είναι  $\neq 0$  ή αρα να ορίζεται καλά η εφαπτομένη.

Παράδειγμα:

$$(i) \gamma_R(t) = z_0 + R e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (z_0 \in \mathbb{C}, R > 0).$$

Η  $\gamma_R$  είναι λεία.

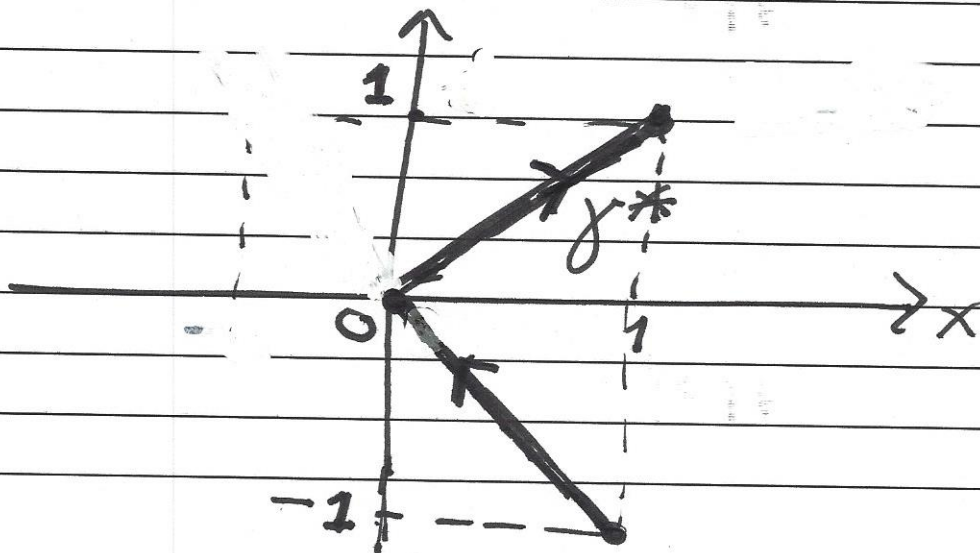
$$(ii) \gamma(t) = \begin{cases} t^2 + t^2 i, & t \in [0, 1] \\ t^2(1-i), & t \in [-1, 0] \end{cases}$$

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0, 1] \\ -t^2, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Οι  $x(\cdot), y(\cdot)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο  $[-1, 1]$  αλλά

$$\gamma'(0) = x'(0) + i y'(0) = 0$$

$\Rightarrow$  η  $\gamma$  δεν είναι λεία.

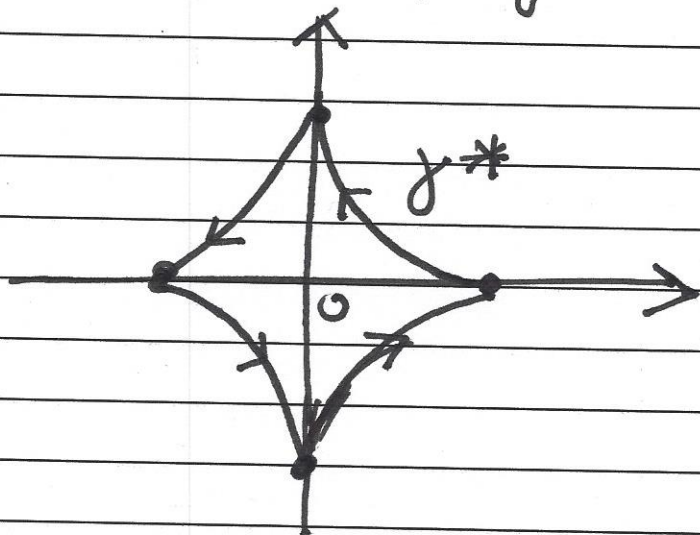


Σημ. ότι  
στο  
σημείο  
0 υπάρχει  
"γωνία"!

$$(iii) \quad \gamma(t) = \cos^3 t + i \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$$

$\Rightarrow$  η  $\gamma$  δεν είναι λεία.



Ορισμός 8. Μια καμπύλη που είναι το

αθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών ονομάζεται τμηματικά λεία.

Οι καμπύλες των παραδειγμάτων (ii), (iii) (βλ. παραπάνω) είναι τμηματικά λείες.

Ορισμός 9. Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

λεία καμπύλη. Μήκος της  $\gamma$  (συμβ.  $\|\gamma\|$ )

είναι ο αριθμός

$$\|\gamma\| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Παράδειγμα:  $\gamma_R(t) = z_0 + R e^{it}, t \in [0, 2\pi]$

( $z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$ ).

$$\begin{aligned} \|\gamma_R\| &= \int_0^{2\pi} |\gamma_R'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |R i e^{it}| dt = \\ &= \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R. \end{aligned}$$

Πρόταση 10. Εάν  $\gamma$  τμηματικά

δεία καμπύλη με  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ ,

όπου  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  διαδοχικές δείες

καμπύλες ( $n \geq 1$ ), τότε το μήκος της  $\gamma$

είναι ο αριθμός  $\|\gamma\| = \sum_{k=1}^n \|\gamma_k\|$ .