ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{C}$ κ' $z_0 \in \mathbb{C}$. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο z_0 ανν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (1)$$

κ' είναι μιγαδικός αριθμός.

Σ' αυτή την περίπτωση, το παραπάνω όριο λέγεται παράγωγος της f στο z_0 κ' συμβολ. με

$$f'(z_0).$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ:

f διαφορίσιμη ~~στο~~ z_0 ανν

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}. \qquad (2)$$

Σχόλιο: Στην (2), η έκφραση $f(z_0+h)$

ορίζεται, για $|h|$ αρκετά "μικρό".

Πράγματι: εφ' όσον U ανοικτό κ' $z_0 \in U$, $\exists\, r>0 :\ D(z_0,r) \subseteq U$,

όπου $D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<r\}$.

Για $|h|<r$, έχουμε $|(z_0+h)-z_0| = |h| < r$

$\Rightarrow z_0+h \in D(z_0,r) \subseteq U$

$\Rightarrow$ το $f(z_0+h)$ ορίζεται.

Παραδείγματα:

(i) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Εάν $z_0\in\mathbb{C}$, τότε, $\forall\ z\neq z_0$,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^n-z_0^n}{z-z_0} =$$

$$= \frac{(z-z_0)\cdot(z^{n-1}+z^{n-2}\cdot z_0+\cdots+z_0^{n-1})}{z-z_0}$$

$$= \underbrace{z^{n-1}+z^{n-2}\cdot z_0+\cdots+z_0^{n-1}}_{n \text{ πλήθους όροι}}.$$

Άρα,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1}}_{n \text{ πλήθους}} = n z_0^{n-1}.$$

Επομένως, f διαφορ. στο z_0 με

$$f'(z_0) = n z_0^{n-1}.$$

<u>(ii)</u> $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. $\forall h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+h} - \overline{z_0}}{h}$$

$$= \frac{\overline{z_0} + \overline{h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

$$\frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1, & h \in \mathbb{R} \\ -1, & h \text{ φανταστικός} \end{cases}$$

Άρα, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\overline{h}}{h} = 1$, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \text{ φαντ.}}} \frac{\overline{h}}{h} = -1$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$,

$\Rightarrow$ η f <u>δεν</u> είναι διαφορ. στο z_0.

Δηλ. η $z \mapsto \bar{z}$ δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη, ενώ είναι παντού συνεχής.

Σημ. ότι είναι εξαιρετικά περίπλοκο να ορίσει κανείς συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι πουθενά διαφορ. (υπάρχει ένα παράδειγμα του Weierstrass!).

(iii) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. $\forall h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{|z_0|^2} + |h|^2 + z_0\bar{h} + \bar{z_0}h - \cancel{|z_0|^2}}{h}$$

$$= \frac{|h|^2}{h} + z_0 \frac{\bar{h}}{h} + \bar{z_0}$$

$$= \bar{h} + \bar{z_0} + z_0 \frac{\bar{h}}{h} \quad (\text{σημ. } |h|^2 = h \cdot \bar{h}).$$

Εάν $z_0 \neq 0$, το $\lim_{h \to 0} z_0 \frac{\bar{h}}{h}$ δεν υπάρχει (βλ. (ii)).

Επομένως, για $z_0 \neq 0$, το

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

δεν υπάρχει,

ενώ για $z_0 = 0$, το όριο ισούται με 0.

Άρα, f διαφορίσιμη <u>μόνο στο $z_0 = 0$</u>,

με: $f'(0) = 0$.

<u>Πρόταση 1</u>: Εαν f διαφορίσιμη στο z_0, τότε f συνεχής στο z_0.
(Αποδεικνύεται εύκολα).

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω U ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$

κ' $f, g : U \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμες στο z_0.

Τότε:

<u>(i)</u> $f+g$, $f \cdot g$ διαφορ. στο z_0 με

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0).$$

<u>(ii)</u> $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, η $\lambda \cdot f$ είναι διαφορ. στο z_0 με

$$(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0).$$

(iii) εάν $g(z_0) \neq 0$, η f/g είναι διαφορ. στο z_0 με

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από τον Ορισμό 1.

Πρόταση 3: (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης)

Έστω $U, W \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά, $f : U \to \mathbb{C}$, $g : W \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, ώστε

- $f(U) \subseteq W$
- f διαφορ. στο z_0
- g διαφορ. στο $f(z_0)$.

$$U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

Τότε, $g \circ f$ διαφορ. στο z_0 με

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

<u>Απόδειξη:</u> Υπενθυμίζουμε το παρακάτω:

"Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Τότε, f συνεχής στο z_0 <u>ανν</u>
$\forall$ ακολουθία $(z_n) \subseteq A$ με $z_n \to z_0$,
$\exists$ υπακολουθία (z_{k_n}) με $f(z_{k_n}) \to f(z_0)$."
(Βλ. αρχείο με τίτλο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G: U \to \mathbb{C}$ με

$$G(z) = \begin{cases} \dfrac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)}, & \text{αν } f(z) \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)), & \text{αν } f(z) = f(z_0). \end{cases}$$

<u>Ισχυρισμός:</u> G συνεχής στο z_0.

<u>Απόδ. Ισχυρισμού.</u> Έστω $(z_n) \subseteq U$ με

$$z_n \to z_0.$$

Επειδή f <u>συνεχής</u> στο z_0, ισχύει

$$f(z_n) \to f(z_0).$$

<u>1η περίπτωση:</u> $f(z_n) = f(z_0)$, για άπειρα n. Τότε, $\exists\, k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών |

$$f(z_{k_n}) = f(z_0), \quad n \geq 1.$$

Τότε, $G(z_{k_n}) = g(f'(z_0)), \quad n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad G(z_{k_n}) \xrightarrow{n} g(f'(z_0)) = G(z_0).$$

<u>2η περίπτωση:</u> $f(z_n) = f(z_0)$, μόνο για πεπερασμένα n. Τότε, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ |

$\forall n \geq n_0, \quad f(z_n) \neq f(z_0)$

$$\Rightarrow \quad G(z_n) = \frac{g(f(z_n)) - g(f(z_0))}{f(z_n) - f(z_0)}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} g'(f(z_0)),$$ <u>διότι g διαφορ. στο $f(z_0)$</u>.

Δηλ. $G(z_n) \to G(z_0)$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει υπακολ. (z_{k_n}) με $G(z_{k_n}) \to G(z_0)$ 5'

άρα G συνεχής στο z_0.
Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Από τον ορισμό της G προκύπτει ότι

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) =$$
$$= G(z) \cdot [f(z) - f(z_0)], \quad \underline{\underline{\forall z \in U}} \ (!)$$

Οπότε, $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$,

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} =$$
$$= G(z) \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- G συνεχής στο $z_0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} G(z) = G(z_0)$,
- f διαφορ. στο $z_0 \Longrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$

$$= f'(z_0)$$

Άρα, $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = G(z_0) f'(z_0)$

$$= g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

$\boxtimes$

<u>Ορισμός 2</u>: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f: U \to \mathbb{C}$. Η f λέγεται <u>ολόμορφη</u> ή <u>αναλυτική</u> στο U αν η f είναι διαφορ. σε <u>κάθε</u> $z_0 \in U$.

Αν $f: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, ορίζεται η <u>παράγωγος</u> <u>συνάρτηση</u> f': $\underline{U \ni z \longmapsto f'(z) \in \mathbb{C}}$

<u>Συμβολισμός:</u>

$$\mathcal{H}(U) = \{ f: U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ολόμορφη} \}$$

Από την Πρόταση 2 προκύπτει ότι $\forall f, g \in \mathcal{H}(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, ισχύει:

$$f+g \in \mathcal{H}(U), \quad f \cdot g \in \mathcal{H}(U), \quad \lambda \cdot f \in \mathcal{H}(U),$$

$$f/g \in \mathcal{H}(U'), \text{ όπου}$$

$$U' = U \setminus \{ z \in U \mid g(z) = 0 \}.$$

Σημ. ότι U' ανοικτό, λόγω συνέχειας της g.

Επιπλέον, αν $U, W \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά κ'

$f \in \mathcal{H}(U)$, $g \in \mathcal{H}(W)$ με $f(U) \subseteq W$,

τότε $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$ (βλ. Πρότ. 3).

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$

κ' $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$.

Γνωρίζουμε ότι f συνεχής στο z_0 ανν

οι $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ είναι συνεχείς

στο (x_0, y_0).

Ισχύει άραγε κάτι ανάλογο για την

διαφορισιμότητα;

Δηλ. ισχύει ότι f διαφορ. στο z_0

ανν u, v διαφορίσιμες στο (x_0, y_0) ?

<u>Όχι</u>. <u>π.χ.</u> $f(z) = \overline{z}$, $u(x,y) = x$,

$v(x,y) = -y$. Οι $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι

διαφορίσιμες αλλά f <u>πουθενά διαφορ.</u>!!

Επομένως, <u>δεν αρκεί</u> η διαφορισιμότητα των u, v στο (x_0, y_0) για να μας δώσει την διαφορισιμότητα της f στο $z_0 = x_0 + iy_0$.

Χρειάζεται κάτι παραπάνω: <u>οι συνθήκες Cauchy–Riemann στο (x_0, y_0)</u>.

<u>Πρόταση 4</u>: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ κ' $f: U \to \mathbb{C}$ διαφορ. στο z_0 με $f = u + iv$. <u>Τότε</u>, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$u_x(P_0),\ u_y(P_0),\ v_x(P_0),\ v_y(P_0),$$

$(P_0 \equiv (x_0, y_0))$ κ'

$$\left.\begin{cases} u_x(P_0) = v_y(P_0) \\ u_y(P_0) = -v_x(P_0) \end{cases}\right\} \begin{matrix}\text{Συνθήκες} \\ \text{Cauchy} \\ \text{Riemann} \\ (\text{C–R})\end{matrix}$$

Επιπλέον, $f'(z_0) = u_x(P_0) + i v_x(P_0)$.

<u>Απόδειξη:</u> Υπενθυμίζουμε το παρακάτω:

«Έστω $F: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο συσσώρευσης του A κ' $L \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = L \Leftrightarrow \left[\lim_{(x,y) \to P_0} \operatorname{Re} F(x,y) = \operatorname{Re} L \text{ κ' } \lim_{(x,y) \to P_0} \operatorname{Im} F(x,y) = \operatorname{Im} L \right],$$

$P_0 \equiv (x_0, y_0)$. »

Έστω $h = h_1 + ih_2 \neq 0$ ($h_1, h_2 \in \mathbb{R}$) με $z_0 + h \in U$.

Έχουμε $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$z_0 + h = (x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2),$$

$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = u(P_0) + iv(P_0),$$

$$f(z_0 + h) = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2).$$

Θέτουμε

$$\lambda_h(z_0) = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Τότε, $\lim\limits_{h\to 0} \lambda_h(z_0) = f'(z_0)$.

<u>Ειδικότερα:</u>

- $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}\\ h_2=0}} \lambda_h(z_0) = f'(z_0) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \lim_{h_1\to 0}\left[\frac{u(x_0+h_1, y_0) - u(x_0,y_0)}{h_1} + i\,\frac{v(x_0+h_1, y_0) - v(x_0,y_0)}{h_1}\right] = f'(z_0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h_1\to 0} \dfrac{u(x_0+h_1,y_0) - u(x_0,y_0)}{h_1} = \operatorname{Re} f'(z_0) \\[2ex] \lim\limits_{h_1\to 0} \dfrac{v(x_0+h_1,y_0) - v(x_0,y_0)}{h_1} = \operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases}$$

$\Longrightarrow \exists$ οι $u_x(P_0)$, $v_x(P_0)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ με

$$\boxed{u_x(P_0) = \operatorname{Re} f'(z_0),\quad v_x(P_0) = \operatorname{Im} f'(z_0).} \quad (3)$$

- $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \text{ φανταστ.} \\ (h_1 = 0)}} \lambda_h(z_0) = f'(z_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{h_2 \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{i h_2} + \right.$$

$$\left. + \cancel{i} \, \frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{\cancel{i} h_2} \right] = f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h_2 \to 0} \left[\frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2} - \right.$$

$$\left. - i \, \frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_2} \right] = f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h_2 \to 0} \dfrac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2} = \operatorname{Re} f'(z_0), \\ -\lim\limits_{h_2 \to 0} \dfrac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_2} = \operatorname{Im} f'(z_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ οι $u_y(P_0)$, $v_y(P_0)$ $(P_0=(x_0,y_0))$

με

$$\boxed{u_y(P_0) = -\operatorname{Im} f'(z_0),\ v_y(P_0) = \operatorname{Re} f'(z_0)} \quad (4)$$

$(3),(4) \Rightarrow \boxed{u_x(P_0) = v_y(P_0),\ u_y(P_0) = -v_x(P_0)}$

Επιπλέον, $f'(z_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0)$

$$\stackrel{(3)}{=} u_x(P_0) + i\, v_x(P_0). \quad \boxtimes$$

Σχόλιο: Το αντίστροφο της Πρότασης 4 δεν ισχύει γενικά!!

Παράδειγμα: $f = u + iv$,

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$v(x,y) = u(x,-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\forall x \neq 0$, $\dfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = \dfrac{x^3/x^2}{x} = 1 \xrightarrow{x\to 0} 1$

$$\Rightarrow \boxed{u_x(0,0) = 1}$$

$$\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0} = 1 \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(0,0)=1}$$

$\forall y \neq 0,$

$$\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0} = \frac{-y^3/y^2}{y} = -1 \xrightarrow{y\to 0} -1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_y(0,0)=-1}$$

$$\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0} = \frac{u(0,-y)}{y} = \frac{y^3/y^2}{y} =$$

$$= 1 \xrightarrow{y\to 0} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_y(0,0)=1}$$

Άρα, $u_x(0,0)=v_y(0,0)$, $u_y(0,0)=-v_x(0,0)$,

οπότε ικανοποιούνται οι (C-R) στο $(0,0)$.

$\forall z = x+iy \neq 0$, έχουμε

$$\lambda_0(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{u(x,y)+iv(x,y)}{x+iy}$$

$$= \frac{u(x,y)+iu(x,-y)}{x+iy}$$

- $$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x\in\mathbb{R}}} \lambda_0(z) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)+iu(x,0)}{x}$$

$$= \underline{1+i}$$

- $$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+ix\\ x\in\mathbb{R}}} \lambda_0(z) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,x)+iu(x,-x)}{x+ix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0+i\,\frac{2x^3}{2x^2}}{x(1+i)}$$

$$= \frac{1}{1+i}$$

$1+i \neq \dfrac{1}{1+i} \Rightarrow$ η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $z_0=0$.

Παρ' όλ' αυτά, ισχύει το παρακάτω

<u>Θεώρημα 5 (Θ. Cauchy–Riemann)</u>

Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $f=u+iv: U\to\mathbb{C}$ κ' $z_0=x_0+iy_0\in U$. Υποθέτουμε ότι:

(i) ικανοποιούνται οι συνθήκες C–R στο $P_0=(x_0,y_0)$, δηλ.

$$u_x(P_0)=v_y(P_0),\ u_y(P_0)=-v_x(P_0).$$

(ii) u, v διαφορίσιμες στο P_0.

Τότε, f διαφορίσιμη στο z_0 κ'

$$f'(z_0)=u_x(P_0)+iv_x(P_0).$$

<u>Απόδειξη (παραλείπεται)</u>

<u>Σχόλιο:</u> Στο Θ.5, η υπόθεση (ii) στην πράξη συνήθως αντικαθίσταται από την <u>ισχυρότερη:</u>

<u>(ii)′</u>: <u>∃ οι u_x, u_y, v_x, v_y σε περιοχή V του P_0 κ' είναι συνεχείς στο V.</u>

Γνωρίζουμε από την Ανάλ. ΙΙ ότι
<u>(ii)′ ⇒ (ii).</u>

Το Θ.5 εφαρμόζεται άμεσα στην εκθετική συνάρτηση.

<u>Πρόταση 6:</u> Η $z \mapsto e^z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ κ' $(e^z)' = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Α<u>πό</u>δειξη: $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Τότε, $f = u + iv$, όπου
$u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Οι u, v είναι <u>διαφορίσιμες στο</u> $\mathbb{R}^2$ κ'

$$u_x = u, \quad u_y = -v, \quad v_x = v, \quad v_y = u$$

$\Rightarrow$ <u>$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ στο $\mathbb{R}^2$</u> <u>(C−R)</u>

$\overset{\Theta.5}{\Rightarrow}$ f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ κ'

$\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$f'(z) = u_x + i v_x = u + iv = f(z). \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση 7:</u> ~~Η~~ συνάρτηση $w \mapsto \operatorname{Log} w$ είναι ολόμορφη στο $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ κ'

$$(\operatorname{Log} w)' = \frac{1}{w}, \quad \forall w \in A.$$

<u>Απόδειξη:</u> Η συνάρτηση Log είναι συνεχής (μόνο) στα σημεία $w \in A$ (βλ. αρχείο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ).

Έστω $w_0 \in A$. Για $w \neq w_0$, $w \notin 0$, θέτουμε

$z = \operatorname{Log} w$, $\quad z_0 = \operatorname{Log} w_0$, οπότε

$$w = e^{z}, \quad w_0 = e^{z_0}$$

κ'

$$\frac{\operatorname{Log} w - \operatorname{Log} w_0}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{e^{z} - e^{z_0}}.$$

Επειδή η Log είναι συνεχής στο w_0, έχουμε ότι $z \to z_0$, καθώς $w \to w_0$.

Άρα, $\displaystyle \lim_{w \to w_0} \frac{\operatorname{Log} w - \operatorname{Log} w_0}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{e^{z} - e^{z_0}} =$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}} = \frac{1}{(e^z)'\big|_{z=z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}. \quad \boxtimes$$

Επειδή
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C},$$
παίρνουμε εύκολα (δόμη Πρότ. 6) ότι

$$\underline{(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

<u>Π.χ.</u> $[\sin(z^3)]' = 3z^2 \cos(z^3), \quad z \in \mathbb{C},$

$[\cos(e^z)]' = -e^z \sin(e^z), \quad z \in \mathbb{C}.$

Συχνά ο έλεγχος των Cauchy–Riemann απαιτεί περίπλοκους υπολογισμούς. Υπάρχει εναλλακτική μέθοδος.

Έστω $f = u + iv : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (U ανοικτό).

$\forall\, z = x + iy \in U$, $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

οπότε η f μπορεί να θεωρηθεί κ' ως συνάρτηση των $z, \bar{z}$.

Ισχύει η παρακάτω:

<u>Πρόταση 8</u>: Έστω $z_0 \in U$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Υποθέτουμε ότι u, v διαφορίσιμες στο z_0. Τότε,

$$\left[f \text{ διαφορ. στο } z_0\right] \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε

$$\varphi(z,\bar z) = u\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right), \quad \psi(z,\bar z) = v\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)$$

$$, x = \frac{1}{2}(z+\bar z), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z} = u_x \frac{\partial x}{\partial \bar z} + u_y \frac{\partial y}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(u_x - \frac{1}{i} u_y\right)$$

$$= \frac{1}{2}(u_x + i u_y),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar z} = \dots = \frac{1}{2}(v_x + i v_y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left[(u_x + i u_y) + i(v_x + i v_y)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0 \Leftrightarrow \text{ ισχύουν οι C-R στο } (x_0, y_0)$$

Επειδή u, v διαφορ. στο (x_0, y_0), από το Θ.5 προκύπτει η ισοδυναμία

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \Leftrightarrow f \text{ διαφορ. στο } z_0.$$

Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)\right]$$

οπότε αν $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= \frac{1}{2}\left(2u_x(P_0) + i\,2v_x(P_0)\right)\\ &= u_x(P_0) + i v_x(P_0)\\ &= f'(z_0), \quad P_0 = (x_0, y_0).\end{aligned}$$

$\boxtimes$

<u>Εφαρμογή</u>: Να βρείτε σε ποιά $z_0 \in \mathbb{C}$ η $\sin(\bar{z})$ είναι διαφορίσιμη κ' να υπολογίσετε την παράγωγο σε αυτά τα σημεία.

<u>Λύση</u>: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\sin(\bar{z})] = 0 \Leftrightarrow \cos(\bar{z}) = 0$

$$\Leftrightarrow z = z_k = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Η παράγωγος είναι $\frac{\partial}{\partial z}[\sin(\bar{z})]\Big|_{z=z_k} = 0, k \in \mathbb{Z}$.

Μια χαρακτηριστική άσκηση:

Να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε

$$u = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x, \quad f(0) = -1.$$

Λύση: Από συνθήκες C–R έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \underline{v_y = 2x + e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x} & (1) \\ \underline{v_x = 2y + e^{-y}\sin x + e^{y}\cos x} & (2) \end{array}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y έχουμε

$$\underline{v = 2xy - e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x + c(x)} \qquad (3)$$

$$(3) \Rightarrow v_x = 2y + e^{-y}\sin x + e^{y}\cos x + c'(x)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad v_x = v_x + c'(x) \Rightarrow c'(x) = 0$$

$$\Rightarrow c(x) = c \in \mathbb{R}$$

Τώρα η (3) γράφεται

$$v = 2xy - e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Όμως,

$$-1 = f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0)$$
$$= -1 + i(c-1)$$

$\Rightarrow \quad c-1=0 \Rightarrow c=1.$ Άρα,

$\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \left(x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x\right) +$$
$$+ i\left(2xy - e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x + 1\right).$$

<u>Σχόλιο</u>: Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y, η <u>σταθερά ολοκλήρωσης εν γένει εξαρτάται από το x</u>, γι' αυτό παίρνουμε την (3) με "$c(x)$" κι όχι "c". Στη συνέχεια προκύπτει ότι $c(x) = c =$ $=$ σταθερά αλλά αυτό είναι συμπτωματικό.